보의 振動解析에 관한 硏究

金 永 植* · 文 德 弘*

A Study on theVibration Analysis of Beam

Yeong-Sik KIM* and Duk-Hong MOON*

The transfer matrix method is well-known and extensively used for finding solutions in vibration problems. At the final stage of this method natural frequencies are obtained by a trial and error search procedure.

In this paper authors presented the method which needed only a few division number to yield an accurate solution and the most effective method to get an approximate solution in the case of beam vibrations. The methods which were presented by authors could be applied for the beam with nonuniform section and uniformly distributed load, and the values of numerical calculations by these methods have just agreed with those of experiments.

緖　　論

傳達매트릭스法은 振動問題의 解析을 위한 한 방법으로 널리 사용되고 있다[1),2),3)]. 이 방법의 마지막 단계는 振動數 行列式을 0으로 하는 解를 구하는 것이다. 전자계산기의 발달과 함께 任意의 試行값들에 대한 振動數 行列式의 값들이 연속적으로 주어지고 이에 따라 쉽게 구하고자하는 解를 찾을 수 있으나 이는 근본적으로는 試行錯誤法이다.

최근 이러한 試行錯誤 과정을 배제하고 계통적으로 解를 구하기 위한 擴張傳達매트릭스法에 대한 문헌들이 발표되었다[4),5),6)]. 이 방법은 Newton-Raphson의 반복법[7)]을 이용한 數値解析的인 방법으로 종래의 傳達매트릭스法에 비해 직접적이고 시간적으로도 경제적인 방법이다.

그러나 이 방법도 구하고자하는 해에 收斂할 수 있는 初期試行값을 선택했을 경우에만 解를 구하는 것이 가능하며 또한 이렇게 하여 구한 해가 몇차 振動數인가를 알 수 없다는 것이 결점으로서 이 방법이 실용화되지 못하는 중요한 원인으로 생각된다.

한편 보에 傳達매트릭스法을 적용하기 위해서는 等價의 集中質量系로 置換해야하며 均一斷面보에 있어서는 分割數를 크게 할수록 嚴密解에 가까운 解를 얻게 된다. 그러나 質量의 分配方法에 따라서는 分割數를 작게 하더라도 충분히 정확한 解를 얻을 수 있다.

본 硏究에서는 보에 傳達매트릭스法을 적용함에 있어서 均一斷面보의 分割方法과 이에 의한 數値計算의 結果를 嚴密解에 비교하여 가장 가까운 값을 얻을 수 있는 방법을 제시하고 이를 不均一斷面을 가지거나 여기에 任意의 荷重이 작용하는 보에도 적용하여 數値計算의 結果를 實驗値와 비교하였다. 또한 振動數 方程式의 近似解를 구하기 위한 3가지 반복법에 대해 그 실용성을 검토하여 가장 효율적인 방법도 아울러 제시하였다.

理　　論

1. 傳達매트릭스法과 振動數 行列式

보에 있어서 質量의 貫性은 몇 개의 分割된 質點에 集中되어 있고 彈性은 무게없는 보의 길이에 分

* 釜山水産大學: National Fisheries University of Pusan

布되어 있다고 생각할 때 兩端의 狀態벡터사이의 關係式은

$$Z_n=F_nP_{n-1}F_{n-1}\cdots\cdots P_1F_1Z_0=AZ_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

이를 매트릭스 要素로 나타내면

$$\begin{pmatrix}-W\\ \theta\\ M\\ V\end{pmatrix}_n=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\ a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-W\\ \theta\\ M\\ V\end{pmatrix}_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

式(2)에서 W, θ, M, V는 각각 처짐, 경사각, 모멘트 및 전단력을 나타내며 0 및 n은 兩端의 절점번호이다.

지금 (i) 兩端固定, (ii) 一端固定 他端支持, (iii) 一端固定 他端自由, (iv) 兩端支持의 4가지 境界條件을 생각할 때 이들 境界條件에 대한 式은 각각

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & -W_0=\theta_0=-W_n=\theta_n=0\\ \text{(ii)} & -W_0=\theta_0=-W_n=M_n=0\\ \text{(iii)} & -W_0=\theta_0=M_n=V_n=0\\ \text{(iv)} & -W_0=M_0=-W_n=M_n=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

이다. 각 境界條件에 대한 式(3)을 式(2)에 대입하므로서 振動數 方程式

$$|D|=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

를 얻는다. 여기서 $|D|$는 振動數 行列式이고 傳達매트릭스法의 마지막 단계는 振動數 方程式의 解를 찾는 것이다.

2. 振動數 方程式의 近似解를 구하기 위한 반복법

$|D|=0$의 近似解를 구하기 위한 반복법으로 區間半減法(Half-Interval Search; HIS)[8], 線形內挿法(False-Position Method; FPM)[8] 및 Newton-Raphson의 방법(Newton-Raphson Method; NRM)의 3 가지를 적용시켜 보자. 解의 存在區間을 알 때 제 1 近似解는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_H=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\omega_F=\omega_1+\frac{|D|_1}{|D|_1-|D|_2}\cdot(\omega_2-\omega_1)\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\omega_{N+1}=\omega_N-\frac{|D|_N}{|D|'_N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

式(5), (6)에서 ω_1 및 ω_2는 ω에 대한 任意의 試行값들이며 $|D|_1$ 및 $|D|_2$는 이때의 $|D|$의 값들이다. (단, $|D|_1\cdot|D|_2<0$) 또 式(7)에서 ω_N은 ω_1 및 ω_2사이의 任意의 試行값이다. $|D|'_N$은 $|D|_N$의 ω에 대한 導函數를 나타낸다.

數値計算 및 實驗

1. 數値計算

數値計算에 사용된 均一斷面보의 諸元은 Table 1과 같다.

Table 1. Specifications of uniform beam

Young's modulus	18,582	(kg/mm^2)
Specific weight	7.43×10^{-6}	(kg/mm^3)
Length	200	(mm)
Width	30	(mm)
Thickness	1.5	(mm)

分割數 및 質量의 分配方法에 따른 解의 收斂傾向을 조사하기 위해 각 境界條件에 있어서 다음에 제시한 3 가지 방법으로 質量을 集中시키고 分割數를 증가시키면서 數値計算을 행하였다.

(i) 방법 1 ; 보를 n개의 要素로 等分割하고 全體質量을 n으로 나누어 각 要素의 中央點에 集中시킨다.

(ii) 방법 2 ; 방법 1과 같이 分割하되 全體質量을 $(n-1)$로 나누어 兩端을 제외한 $(n-1)$개의 分割點에 集中시킨다.

(iii) 방법 3 ; 방법 1과 같이 分割하되 全體質量을 n으로 나누어 $(n-1)$개의 分割點에 集中시키고 나머지 質量의 1/2씩은 兩端(固定 혹은 支持)에 集中시킨다. (단, 自由端이 있는 경우에는 自由端에 集中시켜야 할 質量을 自由端으로 부터 要素길이의 1/6의 위치에 集中시킨다.)

한편 振動數 方程式의 近似解를 구하는 반복법의 數値計算에 있어서는 上記의 結果에서 얻어진 分割數 및 分割方法을 택하였다.

매트릭스 演算에 있어서는 먼저 左端의 境界條件을 고려하여 계산을 행하고 나중에 右端의 境界條件을 고려함으로써 먼저 계산을 행하고 나중에 兩端의 境界條件을 고려하는 것에 비해 계산시간을 1/2로 단축시킬 수 있도록 하였다.

2. 實 驗

본 研究의 分割數 및 質量의 分配方法을 不均一斷面을 가진다든지 또는 任意의 위치에 任意의 荷重이 작용하는 보의 경우에도 적용시킬 수 있는가를 검토하기 위해 Fig. 1의 4가지 對象系에 대한 實驗을 행하였다.

材料의 Young율은 均一斷面보의 굽힘振動에 관한

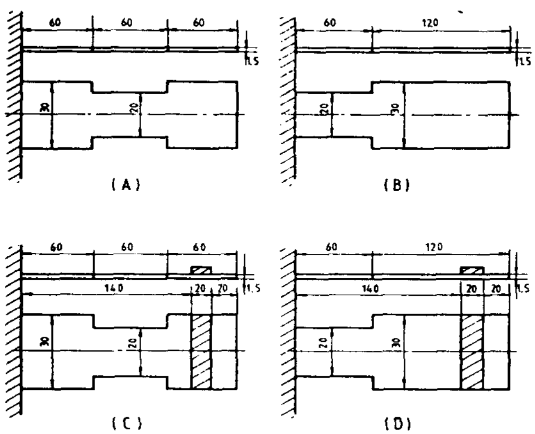

Fig. 1. Specifications of experimental system.

理論式으로 부터 逆算하여 19,825kg/mm^2로 하였고, 比重量은 7.77×$10^{-6}kg/mm^3$, 等分布荷重은 2.41×$10^{-3}kg/mm$이다.

實驗은 Function Generator에서 발생한 周期的인 加振力을 증폭시켜, 電磁石을 이용하여 加振시킨 것으로 Stroboscope로 共振時의 振動數를 측정하였다.

結果 및 考察

Fig. 2~5는 각각 兩端固定, 一端固定 他端支持, 一端固定 他端自由, 兩端支持인 均一斷面보에 있어서 分割數에 따른 振動數의 傾向을 나타내며 點線은 嚴密解이다.

각 境界條件에 있어서 방법 2는 分割數 20인 경우에서 조차 嚴密解와 상당히 차이가 크며, 방법 1과 방법 3은 分割數 4이하에서는 嚴密解와 약간의 차이를 보이나 分割數 6이상에서는 두 방법이 모두 嚴密解와 거의 일치한다. 다만 외팔보의 경우에는 방법

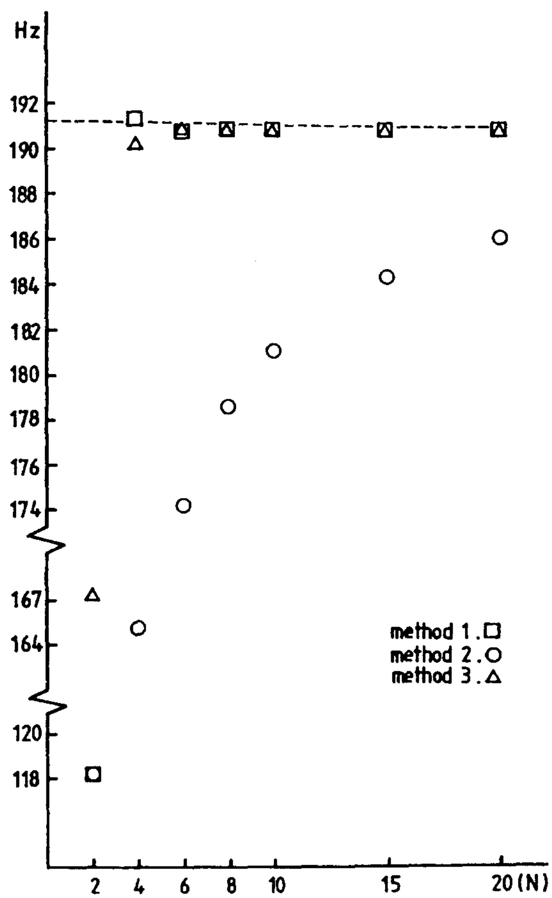

Fig. 2. Bending frequencies vs. number of element in fixed beam.

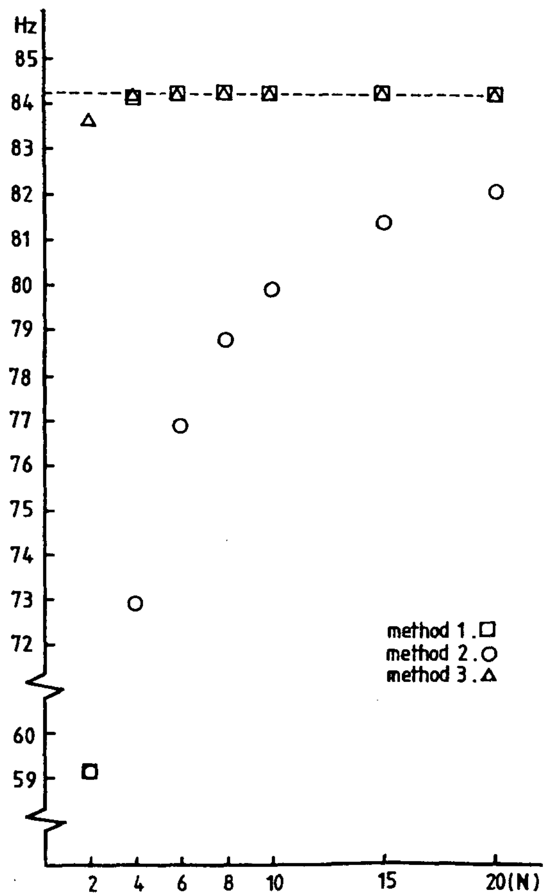

Fig. 3. Bending frequencies vs. number of element in one end fixed other end supported beam.

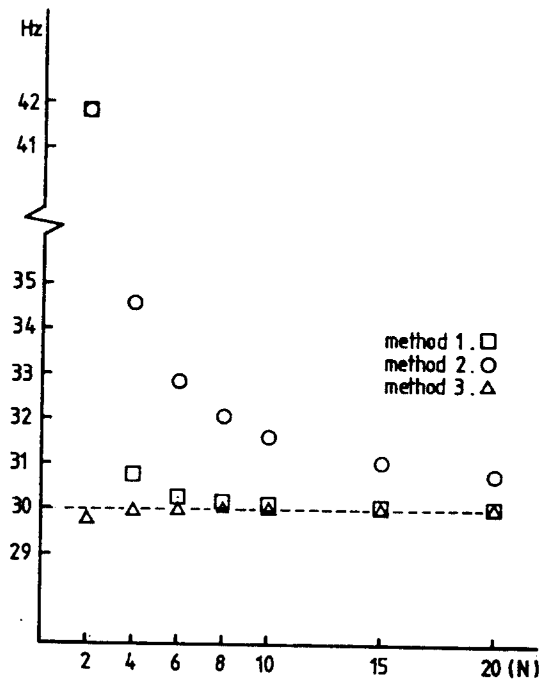

Fig. 4. Bending frequencies vs. number of element in cantilever.

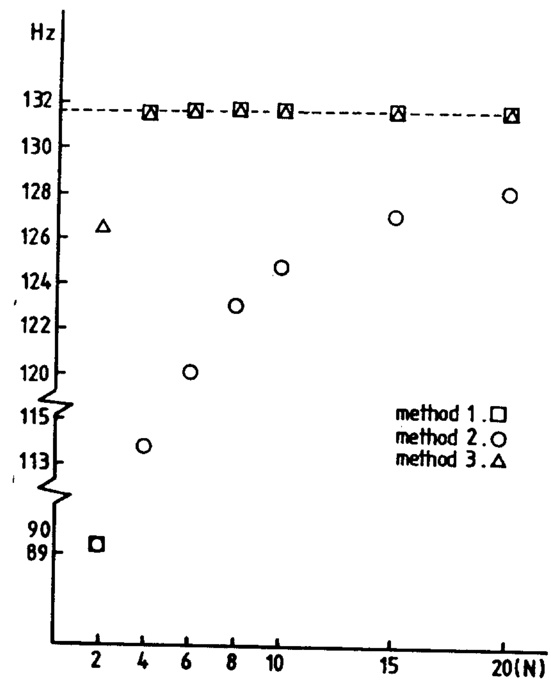

Fig. 5. Bending frequencies vs. number of element in beam with simply supported ends.

1 보다 방법 3이 더욱 嚴密解에 가까운 것을 알 수 있다.

어느 방법이라도 分割數를 크게하면 嚴密解에 가까운 解를 얻을 수 있으나, 演算時間의 측면에서 생각하면, 필요이상으로 分割數를 크게하는 것은 바람직하지 못하며 방법 3으로 分割數 6이면 충분하리라 생각된다.

Table 2는 각 境界條件에 있어 동일한 조건하에서 1차 固有振動數를 계산하는데 소요된 3가지 반복법의 반복횟수를 나타내고 있다. HIS는 收斂速度에 있어서 다른 두 방법에 비해서 훨씬 느리며, Table 3에 각 境界條件에 있어, FPM과 NRM으로 각각의 $\Delta\omega$에 대하여 1차와 2차 固有振動數를 구하는데 소요된 반복횟수를 나타내고 있다.

Table 3에서 보는 바 처럼 FPM 및 NRM의 收斂速度는 비슷하게 나타나고 있는데, NRM의 적용을 위해서는 매트릭스의 확장이 필요하고, 이 확장된 매트릭스의 演算에 2배의 시간이 소요된다는 것을 생각하면, FPM이 훨씬 효율적인 방법이라는 것을 알 수 있다. 외팔보에 있어서, $\Delta\omega=500$인 경우는, 收斂速度나 演算시간에 있어서, NRM이 빠른데 이것은 예외적인 특별한 경우이다.

이 結果로 미루어 均一斷面보의 振動에 대한 傳達

Table 2. Convergence iteration number by HIS, FPM and NRM in the case of mode number 1($\Delta\omega=10$)
Convergence criterion; $|D|\leq 1\times10^{-6}$

Boundary condition	Method		
	HIS	FPM	NRM
Fixed	5	1	1
One end fixed other end supported	17	2	4
One end fixed other end free	13	3	3
Supported	27	6	7

Table 3. Convergence iteration number by FPM and NRM

Convergence criterion; $|D| \leq 1 \times 10^{-6}$

Boundary condition	$\Delta\omega$	Mode number 1 FPM	Mode number 1 NPM	Mode number 2 FPM	Mode number 2 NRM
Fixed	10	1	1	1	1
	50	1	1	2	2
	100	1	1	2	2
	500	2	3	4	3
One end fixed other end supported	10	2	4	2	3
	50	3	5	5	5
	100	4	5	6	6
	500	5	7	10	6
One end fixed other end free	10	3	3	3	4
	50	4	4	5	4
	100	4	4	5	4
	500	14	4	18	6
Supported	10	6	7	7	7
	50	9	9	7	8
	100	10	11	9	9
	500	13	10	13	12

매트릭스法의 적용에 있어서 振動數 方程式의 近似解를 구하는 반복법은 FPM이 가장 효율적인 방법이라는 것을 알 수 있다.

Table 4는 $\Delta\omega=10$인 경우 近似解의 存在區間 兩端의 試行값과 그 때의 $|D|$값들을 나타내며, Table 5는 각 境界條件에 있어서 FPM에 의한 近似解에의 收斂擧動을 보인다. Table 4에서 알 수 있는 바와 같이 兩端固定의 경우, $|D|$가 가장 작으며, 兩端支持의 경우가 가장 큰데 이것이 收斂速度에 영향을 미친다는 것을 Table 5에서 알 수 있다. Table 5에 의하면 兩端固定의 경우 收斂速度가 가장 빠르며 兩端支持의 경우는 가장 느리게 나타나고 있다.

한편 반복횟수는 境界條件, $\Delta\omega$의 선택에 따라 달

Table 4. Trial value of which determinants are opposite sign and its determinant in the case of mode number 1($\Delta W=10$)

Boundary condition	Trial value(rad/sec)	Determinant
Fixed	1,190	6.61×10^{-5}
	1,200	-7.65×10^{-6}
One end fixed other end supported	820	2.32×10^{-1}
	830	-1.27×10^{-1}
One end fixed other end free	180	8.53×10^{-2}
	190	-1.60×10^{-2}
Supported	520	1.26×10^{3}
	530	-1.26×10^{2}

라지며 가능한 한 $\Delta\omega$를 크게 취하는 것이 近似解의 存在區間을 아는데 소요되는 반복과정을 줄이게 되므로 演算시간면에서 효율적이다.

$\Delta\omega$의 선택은 材料特性, 分割方法, 境界條件 等에 따라 달라질 수 있으며 본 硏究에서는 初期試行값을 0으로 했을때 최대 500을 취하였다.

Table 6은 實驗A~D의 結果와 電算프로그램에 의한 數値計算의 結果를 비교하여 나타내고 있다.

본 實驗裝置로서 2차 이상의 共振點은 판별하기가 곤란하여 實驗値와 計算値의 비교는 1차 振動數에 한하였다. 또 數値計算에 있어서는 實驗 C, D의 等分布荷重을 等價의 集中質量으로 置換하였고 質量分配의 3가지 방법에 있어서는 分割數를 모두 6으로 하였다.

Table 6에서 不均一한 斷面을 가지거나 여기에 任意의 荷重이 작용하는 경우에서도 방법 1과 방법 3에 의한 數値計算의 結果는 實驗値와 거의 일치하며, 방법 3쪽이 實驗値와 더욱 가까운 것을 알 수 있다.

즉, 본 硏究에서 제시한 分割數 및 質量分配에 대

Table 5. Convergence iteration value by FPM in the case of mode number 1(rad/sec)

$\Delta\omega=10$, Convergence criterion; $|D| \leq 1\times10^{-6}$

Iteration number	Fixed	One end fixed other end supported	One end fixed other end free	Supported
1	1198.96312	826.456453	188.421815	529.092834
2		826.462462	188.452734	529.097993
3		826.462468	188.452845	529.097996
4		826.462466		529.097997
5				529.097996
6				529.097996
Theoritical solution	1199.47264	826.598073	188.49979	529.127458

Table 6. The value of numerical calculation by 3 division methods vs. experiment for each condition(rad/sec)

Specimen	Division method			Experimental value
	1	2	3	
A	233.13	252.93	232.06	229.34
B	199.44	221.14	198.37	197.92
C	134.84	139.64	135.73	136.24
D	118.60	123.68	119.16	119.90

한 방법은 不均一한 斷面을 가진다든지 任意의 위치에 任意의 荷重이 작용하는 보의 경우에 있어서도 그대로 적용될 수 있음을 알 수 있으며, 본 研究에서 다루지 않은 테이퍼型 斷面을 가진다든지 多點支持된 경우 등의 보에도 이 방법이 적용가능한가의 여부는 앞으로 조사해야 할 문제인 것으로 생각된다.

結 論

본 研究에서는 보에 傳達매트릭스法을 적용함에 있어서 均一斷面보의 分割方法과 이에 의한 數値計算의 結果를 嚴密解에 비교하여, 가장 가까운 값을 얻을수 있는 방법을 제시하고, 이를 不均一斷面을 가지거나, 여기에 任意의 荷重이 작용하는 보에도 적용하여, 數値計算의 結果를 實驗値와 비교하였다. 또한 振動數 方程式의 近似解를 구하기 위한 3가지 반복법에 대해 그 실용성을 검토하여 가장 효율적인 방법을 아울러 제시하였다. 그 結果를 요약하면 다음과 같다.

1. 均一斷面에 있어서 質量의 分配方法은 방법 3이 가장 精度가 좋으며 이 경우 分割數 6이상이면 어떠한 境界條件에서든지 嚴密解에 거의 일치한다.

2. 上記1의 分割數 및 質量의 分配方法은 不均一斷面을 가지거나 任意의 위치에 任意의 荷重이 작용하는 경우에도 그대로 적용할 수 있다.

3. 振動數 方程式의 近似解를 구하는 반복법은 FPM이 가장 효율적이다.

4. 質量分配에 대한 方法 3과 FPM을 組合하여 數値計算을 행함으로써 종래의 傳達매트릭스法에 비해 演算時間을 훨씬 단축시킬 수 있다.

參 考 文 献

1) Pestel, E.C. and Leckie, F.A.(1963):Matrix method in elastomechanics. McGraw-Hill Book Company.

2) Thomson, W.J.(1981): Theory of vibration with applications. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 313-328.

3) Tse, F.S., Morse, I.E. and Hinkle, R.T.(1978): Mechanical vibrations. 2nd ed. Allyn and Bacon, Inc., 202-214.

4) Dawson, B. and Davis, M.(1974): An improved transfer matrix method procedure. International journal for numerical method in engineering, Vol.8, 111-117.

5) Sankar, S.(1979): On the torsional vibration of branched systems using extended transfer matrix method. ASME, 101, 546-553.

6) 金永植(1983): 分布質量系의 固有振動數 解析에 관한 研究. 釜山水産大學 碩士學位論文, 1-29.

7) Kreyszig, E.(1979): Advanced engineering mathematics. 4th ed. John Wiley and Sons, 765-766.

8) 孫炳鎭(1978): Fortran과 數値解法. 成文社, 195-201.