円環의 振動에서 軸力과 中心線의 伸張이 振動數에 미치는 영향

On the Effects of Axial Prestress and Central Line Extension on the Flexural Vibration of a Circular Ring

金 光 植* · 金 康 年**

Abstract

There are various ringshaped automotive and machine parts and the study about the characteristics of ring are the important basis of the quality control and performance improvement of outer race of ball bearing, railwheel, ring gear, piston ring, and other ringshaped seals, etc.

In this study, the effect of prestress which arise inevitably during the fitting of the ring shape parts and the effect of central line extension/contraction on the vibrational characteristics of ring are verified. Although many studies are made on the vibration of ring, the study about prestress and extension were rather scarce and rare.

As a result of the study, a series of frequency formulas are derived. The result of this study can be utilized in the improvement of design as well as in the quality control during the fitting work.

要 約

自動車를 비롯한 各種機械類의 部品中에는 円環의 形狀을 갖는 部品이 많으며 円環에 관한 진동 特性의 규명을 볼 베아링(ball bearing)의 內·外輪, 鐵道車輪, 円環 歯車, 피스턴-링, 其他 Seal 等의 品質 및 性能의 向上에 重要한 基礎가 된다고 볼 수 있다.

本 研究에서는 円環 形狀인 機械部品의 組立과 관련하여 必히 發生하는 軸力(prestress)으로 인한 円環의 振動特性과 아울러 円環斷面의 中心線이 伸張(extension) 또는 縮小(contraction) 할 수 있는 경우의 振動特性을 규명하였다.

그간 円環의 振動에 關한 많은 研究가 있었으나 軸力(prestress)과 伸縮에 관한 研究는 極少하다고 보겠으며, 特히 軸力에 관한 研究는 本 研究에서 最初로 취급되었다고 하겠으며 伸張에 관한 研究로서도 굽힘과 伸張을 同時에 線形理論으로 취급하였음을 밝히는 바이다.

研究결과로서 一連의 振動數 公式을 유도하였으며 이를 國産 베아링에 적용 수치계산하고 數表化 하였다.

本 研究결과는 베아링의 組立과정중의 品質관리 및 振動周波數 分析에 의한 설계技術 向上에 실제적으로 應用될 수 있다고 思料되는 바이다.

記 號 說 明

A ; area of ring cross section

b ; width of rectangular cross section ring

* 漢陽大學校 工科大學 精密機械工學科 敎授
** 漢陽大學校 大學院 機械工學科 博士課程

e ; extension of circumferential line of ring cross section

E ; modulus of elasticity of material of ring

f ; frequency of ring vibration

G ; modulns of shear

g ; gravitational acceleration

h ; height of rectangular cross section ring

I ; area moment of inertia of cross section of ring about the normal axis to the plane of vibration

J ; mass moment of inertia of ring per unit length about the normal axis to the plane of vibration

K′ ; form factor of cross section

k ; radius of gyration of ring cross section

M ; moment of force

m ; mass of the ring per unit length, $m=SA/g$

N ; Shear force

n ; number of nodes in a circumference of a cireular ring

R ; radius of undeformed center line of cireular ring

S ; axial prestressing force of compression

T ; normal force acting at ring cross section

t ; time

u ; radial displacement of ring element

w ; tangential displacement of Ring element

β ; angular deformation due to shear

θ ; angle coordinate

ζ ; slope of deflection curve due to moment

ψ ; total angular rotation of ring element $\psi=\beta+\phi$

ζ ; density of ring material

Ω_e ; natural circular frequency of a ring with extensional effect

Ω_s ; natural circular frequency of a ring with axial prestress

Ω_c ; natural circular frequency of a ring by classical theory

μ ; parameter

ζ ; parameter

ξ ; parameter

1. 序 論

各種 回轉機械類의 基本要素의 하나인 円環의 振動에 관한 硏究는 이미 백여년 이상의 역사를 갖고 있는 問題로서 많은 學者들의 硏究가 있어왔다. 本 硏究는 円環의 문제중에서도 特히 radial ball bearing의 外輪의 振動을 염두에 두고 베아링 外輪을 하우싱에 組込時 發生하는 振動數의 變化의 問題를 解析하였다. 아울러 円環部品이 回轉운동 및 다른 原因에 의해 円環斷面의 中心線이 伸張하는 경우에 中心線의 伸張이 円環의 固有振動數에 미치는 영향을 硏究檢討하였다.

円環振動에 있어서 軸力의 영향에 관한 硏究는 全無한 狀態이며 中心線 伸張의 문제는 極少하나마 약간의 硏究가 있었다고 하겠다.[2],[3] 베아링의 振動을 円環의 振動으로 보는 學者[4] 들이 있었지만 軸力과 組込상태와를 연결시켜 생각지는 않았다.

彈性體 振動理論의 基礎가 되는 支配方程式은 소위 古典理論[5] 으로 알리어져 있고 Love와 Timoshenko에 依해 開拓되었으며 많은 學者들이 이를 修正하고 補完함으로써 實際係[6]와 수렴시켜 왔다고 볼 수 있다.

그중에서도 特히 回轉관성에 관한 硏究[7], 剪斷變形에 관한 硏究[8], 점성감쇠[9],[10]에 관한 硏究, 그리고 最近의 軸力에 관한 硏究[11] 等이 特記할만 하다.

2. 理論解析

2.1. 軸力을 받는 円環의 振動에 關한 理論模型

2.1.1. 回轉慣性과 剪斷變形을 고려하지 않은 경우의 軸力을 받는 圓環의 振動

本 解析에서는 円環의 回轉관성과 剪斷變形效果 等을 무시하고 軸力의 영향만을 檢討하기 위해 軸壓力(compressive prestress force)을 받

는 円環要素를 模型化 하였다. Fig. 1은 單位長의 円環要素를 나타내는 그림으로서 $Rd\theta=1$의 관계가 성립하는 微少要素이다.

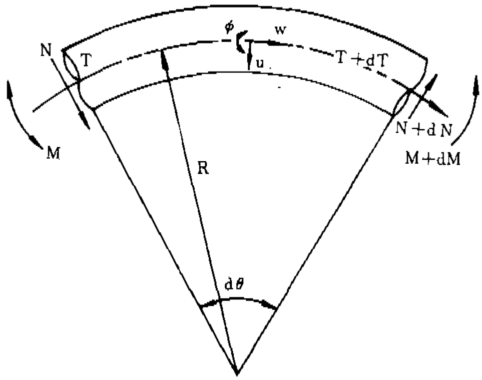

Fig 1. Ring element

Newton의 제 2法則으로부터 반경방향 운동의 방정식은

$$-N+\left(N+\frac{\partial N}{\partial\theta}d\theta\right)+\left(T+\frac{\partial T}{\partial\theta}d\theta\right)d\theta$$

$$=mRd\theta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

양변을 $Rd\theta$로 나누면

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial N}{\partial\theta}+T\right)=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

한편 원주방향의 운동 방정식은

$$-T+\left(T+\frac{\partial T}{\partial\theta}d\theta\right)-\left(N+\frac{\partial N}{\partial\theta}d\theta\right)d\theta$$

$$=mRd\theta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

양변을 $Rd\theta$로 나누면

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}-N\right)=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2}$$

回轉관성은 무시하였으므로 円環에 作用하는 外力 모멘트의 平衡式은

$$-M+\left(M+\frac{\partial M}{\partial\theta}d\theta\right)+\left(N+\frac{\partial N}{\partial\theta}d\theta\right)Rd\theta=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial\theta}+NR=0 \tag{3}$$

材料力學의 理論으로부터 모멘트의 크기와 變形間의 관계는 軸壓力까지 고려할 때 다음과 같이 된다. 즉,

$$-Su+M=\frac{EI}{R^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+u\right) \tag{4}$$

여기서 S가 Prestressing compressive force이다. 한편 中心線의 伸張은 없다고 가정하면 單位長의 伸張은

$$e=\frac{T\cdot 1}{A\cdot E}$$

으로 表示되고 同時에 $e=-ud\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}d\theta$이므로 $Rd\theta=1$의 관계를 이용 $d\theta=\frac{1}{R}$을 代入하면 $e=\frac{1}{R}\left(-u+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=0$의 관계로 부터

$$u=\frac{\partial w}{\partial\theta} \tag{5}$$

의 관계가 成立한다.

上記한 (1)로부터 (5)까지의 관계式을 연립하여 다음과 같은 운동方程式이 유도된다.

$$\frac{\partial^6 w}{\partial\theta^6}+2\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{R^2S}{EI}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$\left(w-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=\frac{mR^4}{EI}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) \tag{6}$$

Byerly의 方法에 依해 $w=w_0e^{i(n\theta+\Omega_s t)}$의 형태로 가정하여 (6)式에 代入하면 다음과 같은 관계式이 얻어진다.

$$n^2(n^2-1)^2-\frac{R^2S}{EI}n^2(n^2-1)$$

$$=\frac{mR^4}{EI}(1+n^2)\Omega_s^2 \tag{7}$$

이를 固有円振動數 Ω_s에 관해 풀면

$$\Omega_s=\sqrt{\frac{EIn^2(n^2-1)^2-R^2Sn^2(n^2-1)}{mR^4(1+n^2)}} \tag{8}$$

되고 여기서 根號속의 첫번째 項이 軸力의 영향을 나타내는 項이 된다. 즉, 軸壓力의 豫壓을 받는 円環의 진동수는 軸力의 크기에 比例하여 減少됨을 알 수 있다.

축압력이 진동수에 미치는 영향을 고려하기 위해 $\mu=\frac{\Omega_s}{\Omega_c}$라는 배개變數를 導入하여 비교하여보

자. 여기서 Ω_c는 Love의 古典理論에 依한 진동수이며 Ω_s는 (8)式에 의해 정의되는 軸力을 받는 경우의 진동수이다.

$$\eta = \frac{\Omega_s}{\Omega_c} = \frac{\sqrt{\dfrac{EIn^2(n^2-1)^2 - R^2Sn^2(n^2-1)}{mR^4(n^2+1)}}}{\sqrt{\dfrac{EIn^2(n^2-1)^2}{mR^4+(n^2+1)}}}$$

$$= \left(1 - \frac{R^2S}{EI(n^2-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{S}{E \cdot A \cdot (n^2-1)} \cdot \left(\frac{R}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

(9)式에 依하면 軸力에 의한 진동수 감쇄비는 S와 $\left(\frac{R}{k}\right)^2$에 비례하여 감소함을 알 수 있다. 즉, S가 클수록, $\left(\frac{R}{k}\right)$이 클수록 축력의 영향을 크게 받음이 나타나고 高次진동형이 될수록 축력의 영향은 적어짐을 알 수 있다.

한편 (8)式에서 $\Omega = 0$으로 놓고 S에 관하여 풀면 円環의 임계좌굴하중(critical buckling load)이 얻어질 수 있으며 이는 바로 動的解析에 의한 円環의 임계좌굴하중을 求한 것이 되겠다. 즉,

$$\frac{EI\,n^2(n^2-1)^2 - R^2S\,n^2(n^2-1)}{mR^4(1+n^2)} = 0$$

으로부터

$$S_{CR} = \frac{EI(n^2-1)}{R^2} \tag{10}$$

이 되며 最低次變形 모드로서 n=2를 代入하면

$$S_{CR} = \frac{3\,EI}{R^2} \tag{11}$$

가 되며 이 값은 Timoshenko의 靜的解析으로부터 얻어진 円環의 임계좌굴荷重과 같은 값이다. Timoshenko[12] 의 理論은 上記한 方法이 아닌 材料力學的 관점에서 (11)式을 유도하였던 바 上記의 方法은 相互間 方法과 結論의 正當性을 확인하여 주는 것이라고 말할 수 있겠다.

2.1.2. 回轉관성을 고려할 경우의 軸力의 진동수에 미치는 영향

만일 Moment의 平衡式인 (3)式 代身에 回轉관성을 고려한 回轉운동 方程式을 쓴다면

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} + NR = J\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{12}$$

가 되고 여기서 J는 質量관성 모멘트이다. (3)式 대신 (12)式을 사용하여 円環진동의 支配方程式을 구성할 경우 (6)式은 追加項

$$\frac{JR^4}{EI}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w\right)$$

가 追加되며 진동수 公式은 다음과 같이 된다. 즉,

$$\Omega = \sqrt{\frac{EIn^2(n^2-1)^2 - R^2Sn^2(n^2-1)}{mR^4(1+n^2) + JR(n^2-1)^2}} \tag{13}$$

가 되어 축압력으로 인한 진동수 감소효과가 多少 적어진다. 또한 임계좌굴하중 역시 變化가 없으나 다만 Ω가 0가 되기까지의 과정에만 差異가 있음을 알 수 있다.

2.1.3. 剪斷變形을 고려할 경우의 軸力의 진동수에 미치는 영향

만일 剪斷變形과 軸壓力과를 同時에 고려하자면 全變形角 ψ는 굽힘 모멘트에 의한 變形角 ϕ와 剪斷變形에 의한 變形角 β의 合임에 유의하여 $\psi = \phi + \beta$로 놓고 이때 剪斷力은

$$N = K'\beta AG \tag{14}$$

가 된다. 이때 K'는 Form Factor로 알려진 형상계수이고 G는 전단탄성계수이다.

굽힘모멘트는

$$-SU + M = \frac{EI}{R}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \tag{15}$$

全回轉角은

$$\psi = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta} + w\right) \tag{16}$$

인 관계를 使用하여 다음과 같은 운동방정식이 유도된다.

$$\frac{\partial^6 w'}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{R^2S}{EI}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$

$$= \frac{mR^4}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{mR^4}{EI}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

$$+\frac{mR^2}{K'AG}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-w\right) \tag{17}$$

Byerly의 方法에 의한 (17)式의 해를

$w=w_o e^{i(n\theta+\Omega_s t)}$ 의 꼴로 놓으면 Ω_s는 다음과 같이 구해진다. 즉,

$$\Omega_s=\sqrt{\frac{EIn^2(n^2-1)^2-R^2Sn^2(n^2-1)}{mR^4(n^2+1)+\dfrac{EI\ mR^2(n^2+1)n^2}{K'AG}}} \tag{18}$$

上記 (18)式의 追加項 $\dfrac{EImR^2n^2(n^2+1)}{K'AG}$ 은 $mR^4(n^2+1)$에 對比, 상당히 큰 진동수의 減少를 수반하는 項으로서 상대적으로 축력에 의한 진동수 감소효과가 적어진다고 볼 수 있으나 전체적으로는 Ω는 (8)式이나 (13)式에 比하여 감소된다고 볼 수 있다. (18)式에서 $G\rightarrow\infty$면 剪斷效果가 없는 경우로서 (8)式에 一致한다. 한편 (18)式에서 $\Omega=0$로 놓고 임계좌굴 하중을 求하여 보면 $S_{CR}=\dfrac{3EI}{R^2}$ 로 되어 前項의 결과와 같아짐을 알 수 있다. 즉, 전단변형의 고려는 원환의 경우, 임계하중에 영향이 없음을 나타낸다.

2.2. 中心線의 伸張을 고려한 円環의振動模型

大部分의 円環의 문제에서 中心線의 伸張이 없다고 가정하는 것은 어디까지나 하나의 가정이며 실제문제의 경우 어쩔 수 없이 中心線의 伸張이 있다고 상상할 수 있다고 가정할 수 있다. 이러한 경우의 中心線의 伸張의 영향을 검토해 보기로 하였다. 실제로 中心線의 신장은 回轉 또는 기타의 原因으로 인한 體力을 받는 경우에는 必須的으로 고려되어야 한다.

回轉관성이나 전단변형, 기타 축력의 영향 등을 論外로 하고 前項의 관계式을 다시 活用하기 위해 다음과 같은 基本方程式을 구성해 보자.

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial N}{\partial\theta}+T\right)=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{19}$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}-N\right)=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{20}$$

$$\frac{\partial M}{\partial\theta}+NR=0 \tag{21}$$

$$M=\frac{EI}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{w}{R}\right) \tag{22}$$

$$e=\frac{T\cdot 1}{AE}=\frac{1}{R}\left(-u+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) \tag{23}$$

(23)式은 Timoshenko의 伸張에 관한 表現과 같은 것이다. (23)式에서

$$T=\frac{AE}{R}\left(-u+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) \tag{24}$$

로 쓸 수 있으며 (21)式에서

$$N=\frac{1}{R}\left(-\frac{\partial M}{\partial\theta}\right) \tag{25}$$

이 되며 (24)와 (25)式을 (19)式에 대입하여 정리하면

$$\frac{EI}{R^4}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}-\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}\right]+\frac{AE}{R^2}\left[\frac{\partial w}{\partial\theta}-u\right]=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{26}$$

의 半徑方向 運動方程式이 얻어진다.

마찬가지로 (24)와 (25)式을 (20)式에 대입 정리하면

$$\frac{EI}{R^4}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right]+\frac{AE}{R^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{27}$$

의 円周方向의 運動方程式이 얻어진다.

(26)式과 (27)式의 解로서 各各

$$u=u_o e^{i(n\theta+\Omega_e t)}$$
$$w=w_o e^{i(n\theta+\Omega_e t)} \tag{28}$$

를 가정하면 (26)式과 (27)式으로부터 다음과 같은 관계가 成立되어야 한다.

$$\begin{bmatrix}\dfrac{EIn^4}{R^4}-\dfrac{AE}{R^2}+m\Omega_e^2, & i\left(\dfrac{EIn^3}{R^4}+\dfrac{AE}{R^2}n\right)\\ i\left(\dfrac{-EIn^3}{R^4}-\dfrac{AEn}{R^2}\right), & \left(-\dfrac{EIn^2}{R^4}-\dfrac{AEn^2}{R^2}+m\Omega_e^2\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_o\\ w_o\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{29}$$

(29)式이 成立하기 위한 條件으로부터 Ω_e가 求해질 수 있다.

$$\Omega_e=\sqrt{\frac{EIn^2(n^2+1)}{mR^4}+\frac{EA(n^2+1)}{mR^2}} \tag{30}$$

(30)式으로 表現된 Ω_e가 中心線의 伸張을 고려한 円環의 굽힘진동에 관한 진동수 公式이다. (30)式의 根號속의 제 1 항이 굽힘진동부분이며 제 2 항이 中心線의 伸張진동부분으로서 Timoshenko의 振動數公式과 一致하는 部分이다.

上記式은 中心線의 축소時에는 (23)式에서 $\frac{\partial w}{\partial \theta}$의 項이 (一)가 되어야 한다. 伸張의 영향을 評價하기 위해서 上記 (30)式으로 表現된 Ω_e와 古典理論으로 부터 얻어진 Ω_c와의 比를 $\zeta=\frac{\Omega_e}{\Omega_c}$로 定義하면

$$\zeta=\frac{\sqrt{\frac{EIn^2(n^2-1)}{mR^4}+\frac{EA(n^2+1)}{mR^2}}}{\sqrt{\frac{EIn^2(n^2-1)^2}{mR^4(1+n^2)}}}$$

$$=\frac{(n^2+1)}{(n^2-1)}\left[1+\left(\frac{R}{k}\right)\cdot\frac{1}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{31}$$

가 된다. 즉, 中心線의 伸張의 영향은 단면 2차 모멘트의 回轉半徑과 円環의 半徑에 比例하며 고차 진동형에서는 별로 영향이 없어짐을 알 수 있다. (31)式의관계를 $\frac{R}{k}=4$의 대단히 두꺼운 원환과 $\frac{R}{k}=20$ 정도의 얇은 원환에 대해 계산하고 Fig. 2에 圖示하였다. (31)式에 나타난 바 例컨대 $\frac{R}{k}=5$의 경우 ζ의 값은 $n=5$에서 1.1867로서 伸張을 고려하지 않을 때와 대비하여 약 19% 정도의 진동수 증가가 예상되며 이러한 결과는 일반적으로 알려진 바 순수한 伸張形의 진동형에서 진동수가 굽힘形의 진동수보다 비교도 안될 정도로 큰 것으로 알려져 있는 것과는 커다란 차이가 있음을 보여주고 있다. 다만 그러한 경우는 $\frac{R}{k}$이 무척 크거나, 低次진동형일 때만 옳다는 결론이 된다. 여기에서 굽힘과 伸張間의 상관기여도를 알아보기 위하여 매개변수 ξ를 다음과 같이 定義해 보기로 하자.

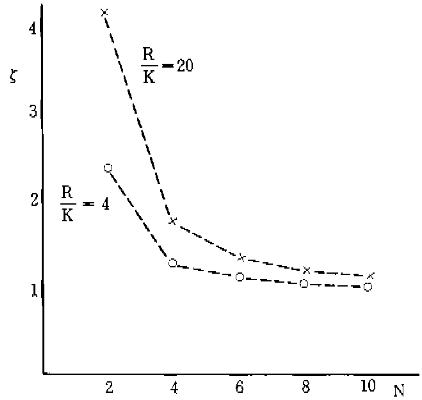

Fig 2. Effect of extension

$$\xi=\frac{\sqrt{\frac{EI(n^2+1)}{mR^2}}}{\sqrt{\frac{EIn^2(n^2+1)}{mR^4}}}=\frac{1}{n}\left(\frac{R}{k}\right) \tag{32}$$

즉, ξ는 굽힘진동부분과 신장진동부분의 상대적인 기여도를 評價할 수 있는 매개變數가 될 수 있다. $\frac{R}{k}=4$의 경우와 $\frac{R}{k}=20$의 경우를 $n=2$로 부터 $n=10$ 까지를 Fig. 3에 圖示하였다.

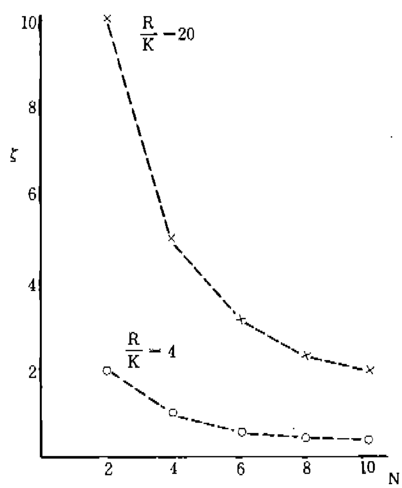

Fig 3. Relative contribution of flexure and extension

3. 數値계산 및 실제應用例

前項의 축압력과 진동수의 문제를 國産 Radial 볼베아링 6206, 6208, 6210, 6212, 6214 등의 계

열에 적용하여 각기 하우싱과의 조립상태를 H7 급 기준구멍에 대하여 각각 30mm 기준으로 +10, +20, +30, +40, +50 μm 까지의 5단계의 組込상태로 區分하여 回轉中의 베아링에 發生하는 진동수를 예측, 계산하였다. 그 계산 결과를 Table 1에 정리하였다. 따라서 Table 1은 조립한 상태에서의 베아링의 외륜에 발생하는 진동수의 表라고 볼 수 있으며 베아링의 진동설계 및 조립기준으로 유용하게 쓰여질 수 있다.

한편 조입상태와 축력간의 환산은 먼저 기준경으로부터 실제 베아링외륜의 내경크기로 환산하여 이를 원주方向의 變形으로 환산, 軸力으로 계산 하였다. 한편 n의 값은 실제계에 중요한 低次에서만(n=4 까지) 계산하였다.

Table 1. Vibration freanencies depending on the fit. Data obtained by EQ(18)

Type of bearing	Loose fit +10 μm	+20	Medium +30	+40	Tight fit +50
6206 n=2	2447	2340	2225	2107	1982
n=3	7051	6943	6830	6718	6605
n=4	13477	13369	13257	13147	13036
6208 n=2	2364	2286	2203	2120	2033
n=3	6755	6676	6594	6513	6430
n=4	12854	12775	12693	12612	12532
6210 n=2	1840	1757	1668	1576	1479
n=3	5306	5223	5135	5049	4962
n=4	10146	10063	9976	9891	9806
6212 n=2	1406	1335	1259	1179	1094
n=3	4071	4000	3926	3852	3777
n=4	7799	7728	7654	7581	7508
6214 n=2	1434	1374	1310	1245	1176
n=3	4125	4065	4002	3942	3877
n=4	7878	7818	7756	7694	7633

4. 結 論

円環의 平面内의 굽힘진동에 있어서 軸壓力의 효과가 固有振動數에 미치는 영향과 또한 中心線의 伸張을 고려했을 경우의 固有振動數의 變化를 硏究한 결과 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 軸壓力을 받는 円環의 理論模型을 구성하고 振動數 公式을 유도하였으며 그 결과 軸壓力은 진동수의 감소를 가져옴을 알았다. 그리고 그 相對的 효과는 고차진동형보다 저차 진동형에서 더 큰 效果를 수반하였다.

(2) 軸壓力을 받는 극한적인 상태로서 座屈荷重을 유도할 수 있음을 보였으며 그 결과 Timoshenko의 결론과 相互 확인할 수 있었다.

(3) 中心線의 伸張이 存在한다고 가정할 때의 진동수 公式을 유도하였으며 그 결과 伸張모드가 굽힘모드의 진동수보다 훨씬 큰 것은 저차진동에서만 옳으며 그것도 $\frac{K}{R}$가 적을 때에만 그러하였다. 따라서 $\frac{K}{R}$가 크고, 고차진동형인 경우는 기존의 理論처럼 굽힘진동과 伸張진동을 區分해석함은 타당치 않다.

References

(1) A. E. H. Love ; "A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity," Dover Publications (1947)

(2) S. Timoshenko ; "Vibration Problems in Engineering," 4th ed., John Wiley & Sons (1974)

(3) L. L. Phillipson ; "On the Role of Extension in the Flexural Vibration of Rings," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME. Vol. 23, pp. 364~366 (1956)

(4) T. Nagamaitu ; 高速玉軸受の騒音に関する研究 日本機械学会 論文集, 43巻, 376号 (昭52-12), pp. 4660~4669

(5) R. Hoppe ; "The Bending Vibration of A Circular Ring," Crelles Journal of Math., Vol. 73, 1871, pp. 158

(6) W. Kuhl ; " Messungen zu den Theorien Der Eigen Schwingungen von Kreisringen Beliebiger Wandstarke," Aknstische Zeitschrift, Vol. 7, pp. 10~151 (1942)

(7) 金光植 ; "대칭軸 단면을 가진 원환의 고차굽힘 진동형에 관한 연구," 大韓機械学会誌, 제 13권 4호, pp. 311~318 (1973)

(8) J. Kirkhope ; "In-plane Vibration of a Thick Circular Ring," Journal of Sound and Vibration, Vol. 50, No. 2, pp. 219-227 (1980)

(9) R. R. Archer ; "Small Vibrations of Thin Incomplete Circular Rings," Int. Journal of Mechanical Sciences, Vol. 1, pp. 43-56 (1969)

(10) 金光植 · 金康年 ; "대칭단면 원환부품의 平面 진동에 관한 研究 " 韓国自動車工学会誌 제 6 권 1호, pp. 56-62

(11) 金光植 · 金康年 ; "Determination of the Critical Buckling Load of a Circular Ring by the Dynamical Aspect, 大韓機械学会 春季大会 論文抄録集, 1984

(12) S. Timoshenko ; "Theory of Elastic Stability." 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., 1961, pp. 289.