

콘크리트의 漸進的 破壞에 대한 非線型 構成모델 확립研究

A Nonlinear Constitutive Model for Progressive Fracturing of Concrete

吳 炳 煥*
Oh, Byung Hwan

Abstract

Presented is a nonlinear constitutive model for progressive tensile fracturing of concrete. The model is incremental, path-dependent, and tensorially invariant. The total strain tensor is assumed to be a sum of a purely elastic component and an inelastic component. The material is considered to contain weak planes of all directions which characterize the planes of the microcracks. A one-to-one functional dependence is assumed between the normal stress and the normal strain across each of the weak planes. The tangential stiffness of concrete is then derived from the principle of virtual work. The present theory can be applied to loading histories which are nonproportional or during which the principal directions rotate. Good agreement with the available direct tensile test data which cover strain-softening is demonstrated.

要 旨

本 論文에서는 콘크리트의 漸進的 引張破壞現象을 解析할 수 있는 增分形이며, 進路從屬의이고, 텐서적으로 不變性인 非線型構成모델이 提案되었다. 全 變形度는 彈性成分과 非彈性成分의 合으로 表示된다. 콘크리트內部에는 微細龜裂의 根源이 되는 弱한 面들이 모든 方向으로 存在하며, 이 弱한 面에서의 法線應力은 法線變形度의 함수라고 가정된다. 이와 같은 根本概念아래 假想일의 原理로부터 콘크리트의 接線剛度가 유도된다. 本 理論은 非比例荷重이나 主應力의 方向이 變하는 경우 등의 一般의 荷重狀態에 적용할 수 있으며, 이것이 本 모델의 主要한 목적이 될 수 있다. 本 理論을 變形軟化現象을 보이는 直接引張實驗資料와 비교한 결과 좋은 일치를 얻었다.

1. 序 論

콘크리트는 應力-變形度관계에 있어서 變形軟化(strain-softening)現象이라는 특징을 갖는다. 이 變形軟化現象은 변형도가 증가하면서 응력은 감소되는 현상으로서 그 원인은 콘크리트가 어느정도 이상의 荷重을 받으면 그 內部에 미세균

열이 발생하기 때문이다. 콘크리트가 압축하중을 받는 경우에는 이러한 현상을 설명할 수 있는 해석적인 構成모델(constitutive model)이 어느정도 提案되어 있는 상태이지만 콘크리트가 引張力을 받는 경우에는 이러한 구성모델의 理論的 개발이 거의 이루어져 있지 않은 실정이다. 그것은 콘크리트의 引張하중상태에 대한 완전한 실험결과가 거의 없었고, 또한 構造解析을 단순화하기 위하여 콘크리트는 引張강도에 도달하면

*正會員 · 서울大學校 工科大学 助教授 土木工學科

바로 파괴된다고 가정하여 왔기 때문이다. 그러나 근래에 발표된 인장상태에 대한 훌륭한 실험 결과^(10, 12, 16)로부터 인장을 받는 콘크리트의 성질이 뚜렷이 밝혀졌으며, 이것은 콘크리트가 최대 응력(즉, 引張強度)에 도달한 후에도 바로 완전 파괴되지 않고 변형과 균열량이 증가하면서 응력이 감소된다는 것을 알려주게 되었다. 콘크리트의 이러한 성질은 실제 콘크리트구조물의 일반구조해석뿐만 아니라 콘크리트部材의 파괴에 측 및 파괴해석에도 아주 중요한 의미를 갖게 된다.

따라서 본 연구의 목적은 콘크리트구조물의 실제적이고도 정확한 해석 및 설계를 위하여 지금까지 제안되지 않은 引張을 받는 콘크리트의 정확한 構成方程式을 유도하고, 이를 이용한 解析모델을 제시하는 데 있다. 이 해석모델은 非比例荷重(non-proportional loading)이나 主應力의 方向이 변하는 경우(例, 지진하중)등의 일반적인 하중상태에 있는 콘크리트의 비선형 해석을 가능케 하며, 종래의 선형해석으로 인한 부정확성을 극복할 수 있게 한다.

2. 構成모델의 形態와 基本假定

콘크리트는 骨材 등의 함유로 非均質性(heterogeneous)의 性質을 나타낸다. 특히, 하중을 받으면 骨材와 시멘트풀사이의 부착면이 弱해지고 微細균열이 發生하기 시작한다. 이와 같이 콘크리트内部에는 균열이 일어나는 많은 弱한面(weak planes)들이 分布하게 된다. 等方性(isotropy)의 경우 이 弱한面들의 方向과 分布는 均一한 것으로 고려된다. 이러한 弱한面 위에 作用하는 應力과 變形度는 그 개념상 微視應力(microstress) 및 微視變形度(microstrain)라고 정의하며, 이것은 콘크리트를 巨視的으로 본, 즉 우리가 보통 사용하는 巨視應力(macrostress) 및 巨視變形度에 대응되는 개념이다. 종래의 塑性理論에서는 弱한面의 微視應力은 巨視應力의 그 면에 대한 成分(component)과 같다고 가정되어 왔다.^(3, 18) 그러나 이와 같은 理論은 금속이나 강재 등 소성현상을 일으키는 재료에는 비교적 잘 적용될 수 있으나 콘크리트 등의 균열현상을 갖는 材料에는 수렴성(convergence)과 안정성(stability)이 없어 타당성이 없다. 따라서 本 研究에서는

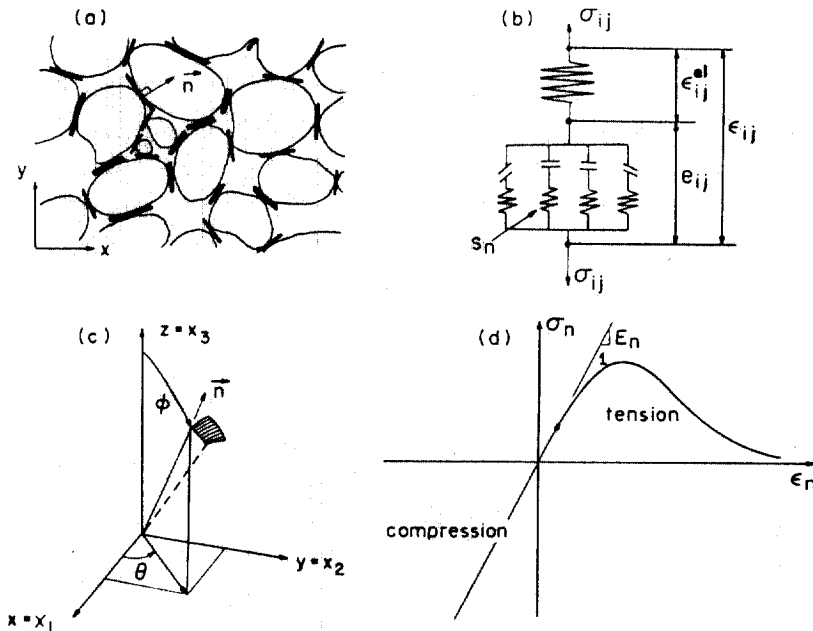


그림 1. (a) 弱한面의 微細構造 概略圖, (b) 本 理論의 Rheological Model, (c) 球座標系, (d) 弱한面의 法線應力-變形度關係

콘크리트에 잘 적용될 수 있는 理論의 유도를 위해 다음과 같은 基本概念과 가정을 바탕으로 한다.

巨視變形度 ϵ_{ij} 는 균열에 영향을 받지 않는 彈性變形度 ϵ_{ij}^e 와 균열로 인한 應力減少量 나타내는 非彈性變形度 e_{ij} 의 합으로 表示된다. 즉,

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + e_{ij} \quad (1)$$

여기서, 아래첨자는 直交좌표계 (cartesian coordinates) $x_i (i=1, 2, 3)$ 를 나타낸다. 式 (1) 은 다음절에서 보여지듯이 콘크리트의 初期포아손비 (Poisson's ratio) 를 정확히 계산하기 위한 攸연적인 관계가 된다. 다음 고려사항으로는 콘크리트 内部의 各 弱한 面에 作用하는 法線微視變形度 (normal microstrain) e_n 은 그 面에서의 巨視變形度 e_{ij} 의 成分과 같다는 가정이다. 즉,

$$e_n = n_i n_j e_{ij} \quad (2)$$

여기서, $n_i =$ 弱한 面上的 單位法線벡터 n 의 方向餘弦 (direction cosines) 이며, 아래첨자의 반복은 합을 나타낸다. 또한 各 弱한 面上的 미시應력 s_n 은 그 面的 法線微視變形度 e_n 의 함수로서 均열로 인한 특성을 서술하게 된다. 즉,

$$s_n = \frac{2\pi}{3} f(e_n) \quad (3)$$

여기서 $(2\pi/3)$ 은 다음절에서 유도될 計算式의 간편화를 위하여 사용되는 계수이다. 또한 均열로 인한 微視剪斷應力의 減少는 均열폭이 어느 정도이하에서는 거의 무시할 정도이므로 여기서는 계산의 간편을 위하여 고려하지 않기로 한다.

3. 콘크리트의 非線型 構成모델

3.1. 構成方程式의 誘導

應力 σ_{ij} 와 s_n 사이의 平衡條件을 決定하기 위하여 δe_{ij} 로 인한 假想일을 고려하면 다음과 같다.

$$\delta W = \frac{4}{3} \pi \sigma_{ij} \delta e_{ij} = 2 \int_S s_n \delta e_n dS \quad (4)$$

여기서 $(4\pi/3)$ 는 半徑 1 의 球에 대한 積分을 나타내는 係數이다. S 는 單位半球의 表面을 表示하고, $dS = \sin \phi d\theta d\phi$, 그리고 dS 는 $f(\vec{n}) dS$ 로도 表示할 수 있는데 여기서 $f(\vec{n})$ 는 各 方向의 弱한 面的 正常頻度分布 (normalized frequency distribution) 를 나타내는 것으로서 材料의 非等方性을 特性짓는 함수이다. 等方性일 경우

에는 $f(\vec{n}) = 1$ 이 된다. 式 (4) 의 積分을 半球에 대해서만 수행해도 되는 理由는 σ_n 과 e_n 의 값이 球의 맞은편 위치에 있는 값들과 같기 때문이다. 式 (2) 와 (3) 을 (4) 에 代入하면,

$$\sigma_{ij} \delta e_{ij} = \int_S f(e_n) n_i n_j \delta e_{ij} dS \quad (5)$$

式 (5) 는 어느 δe_{ij} 에 대해서도 成立되어야 하므로, 式 (5) 를 다시 쓰면,

$$\sigma_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(e_n) n_i n_j \sin \phi d\phi d\theta \quad (6)$$

또한 式 (2) 의 特性으로부터

$$df(e_n) = f'(e_n) de_n = f'(e_n) n_k n_l de_{kl} \quad (7)$$

式 (6) 을 미분하여 式 (7) 을 여기에 代入하면 다음式을 얻는다.

$$d\sigma_{ij} = B_{ijkl} de_{kl} \quad (8)$$

여기서,

$$B_{ijkl} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a_{ijkl} f'(e_n) \sin \phi d\phi d\theta \quad (9)$$

그리고 $a_{ijkl} = n_i n_j n_k n_l$ 이며, B_{ijkl} 은 콘크리트의 弱한 面들로 이루어진 系統의 接線剛度가 된다. 本 研究에서 고려되고 있는 流性學의 모델 (rheologic model) 이 그림 1(b) 에 表示되어 있다. 式 (1) 에서 表示된 追加彈性變形度 ϵ_{ij}^e 에 대한 compliance 는 彈性理論으로부터 다음과 같이 表示될 수 있다.

$$C_{ijkl}^e = \frac{1}{9K_a} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2G_a} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (10)$$

여기서, $K_a =$ 겉보기체적계수 (bulk modulus), $G_a =$ 剪斷彈性係數, $\delta_{ij} =$ Kronecker delta 이다.

따라서, 콘크리트의 全應力-變形關係의 增分形態는 式 (1), (8), (10) 으로부터 다음과 같이 表示될 수 있다 [그림 1(b)].

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} de_{kl} \quad (11)$$

여기서 $D_{ijkl} = \left[(B_{ijkl})^{-1} + \left(C_{ijkl}^e \right) \right]^{-1}$ (12)

이제 弱한 面으로 인한 非彈性變形度 e_{ij} 에 의한 初期彈性포아손비를 점검하기 위하여 一軸變形狀態 (uniaxial strain) 를 고려하기로 한다. 즉, $e_x \neq 0$, $e_x = e_y = 0$ 일 때 σ_x 와 σ_y 를 계산하고, 이에 따른 포아손비 ν 를 계산한다. 여기서 $n_x = n_3 = \cos \phi$, $n_y = n_2 = \sin \phi \sin \theta$, $n_z = n_1 = \sin \phi \cos \theta$, 변형도가 아주 적은 初期狀態에서의 $f(\epsilon_n) = E_n \epsilon_n$,

여기서 $E_n = f'(0)$, $\varepsilon_n = \varepsilon_2 \cos^2 \phi$ 의 관계식들을 식 (6)에 代入하면 다음 식을 얻는다.

$$\sigma_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} E_n \varepsilon_2 \cos^4 \phi \sin \phi d\phi d\theta = \frac{2\pi}{5} E_n \varepsilon_2 \quad (13)$$

$$\sigma_y = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} E_n \varepsilon_2 (\sin \phi \sin \theta)^2 \cos^2 \phi \sin \phi d\phi d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{15} E_n \varepsilon_2 \quad (14)$$

따라서 弱한 面만을 고려했을 때 포아슨비는 식 (13)과 (14) 그리고, Hooke의 法則으로부터 $\sigma_y / \sigma_x = 1/3 = \nu / (1 - \nu)$ 이고, 이로부터 $\nu_s = 1/4$ 을 얻는다. 이 포아슨비 $\nu_s = 0.25$ 는 실제 콘크리트의 포아슨비(보통 $\nu = 0.18$)와는 차이가 크므로 그대로 사용할 수가 없다. 또한 ν_s 값이 하나로 고정되므로 이의 수정을 위하여 식 (1)과 (10)의 追加彈性變形度 ε' 을 고려해야 한다. 變形軟化의 安定性의 견지에서 식 (10)의 剛度(stiffness)는 크도록 해야 하고, 또한 初期포아슨비의 精確한 계산을 위하여서도 一般的으로 $1/G_a = 0$ 이거나 $1/K_a = 0$ 이어야 한다. 왜냐하면, 일반적으로 $1/K_a > 0$ 이고 $1/G_a = 0$ 이면 全體系統의 포아슨비 ν 는 弱한 面系統(weak plane system)의 포아슨비 ν_s 보다 적고, $1/K_a = 0$ 이고 $1/G_a > 0$ 이면 全體系統의 포아슨비 ν 는 ν_s 보다 크기 때문이다. 여기서는 실제적으로 콘크리트의 포아슨비 ν 는 $\nu_s = 0.25$ 보다 적으므로 前者의 경우 즉, $1/G_a = 0$ 을 취해야 한다. 따라서 要求되는 포아슨비를 얻기 위해 K_a 값을 결정해야 하는데, 이를 위해 一軸應力狀態를 고려하면 다음 식을 얻는다. 즉, 식 (8)~(14)로부터

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_s} \sigma_{11} + \frac{1}{3K_a} \frac{\sigma_{11}}{3},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{-\nu_s}{E_s} \sigma_{11} + \frac{1}{3K_a} \frac{\sigma_{11}}{3} \quad (15)$$

여기서 $\nu_s = 0.25$, $E_s = 2\pi E_n / 5$ 이다. 그리고 $\varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon_{11}$ 이므로 식 (15)로부터

$$K_a = \frac{(1 + \nu)}{9(\nu_s - \nu)} E_s \quad (16)$$

上記의 식 (11)은 식 (9), (10), (12), (16)과 함께 本構成모델의 基本을 이룬다. 이제 本 모델을 실제로 사용하기 위하여 均열현상을 일으키는 弱한 面들에 대한 기본적인 構成法則(constitutive law)을 定義해야 한다. 引張에 대한 실험결과^(10, 12, 16, 19)에서 나타난 것처럼, 각 弱한 面

에서는 均열로 인한 應力の 減少현상을 수반하게 된다. 따라서 이러한 현상을 가장 잘 서술할 수 있는 數學的 曲線式으로는 實驗結果로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varepsilon_n > 0 \text{ 이면 : } \sigma_n = E_n \varepsilon_n e^{-(k \varepsilon_n^m)} ;$$

$$\varepsilon_n < 0 \text{ 이면 : } \sigma_n = E_n \varepsilon_n \quad (17)$$

여기서 E_n , k 및 m 은 常數이다. 다음節의 實驗結果와의 比較에서 보여지듯이 식 (17)의 도입은 아주 만족스러운 結果를 주게 된다.

3.2. 構成方程式의 數值積分

本構成모델의 中心이 되는 식 (9)는 數值積分에 依해서 計算되어야 한다. 식 (9)의 數值積分形態는 다음과 같이 表示될 수 있다.

$$B_{ijkm} \approx \sum_{\alpha=1}^N w_\alpha [a_{ijkm} f'(e)]_{n^\alpha} \quad (18)$$

여기서 w_α 는 加重值(weights)이고, $\alpha = (1, 2, \dots, N)$ 는 半徑 1의 半球表面에 대한 積분점의 수이며, n^α 는 球中心으로부터 積분점까지의 單位 벡터를 表示한다. 有限要素解析인 경우 이 積分은 各要素에 대해서, 그리고 要素內의 各積分點에 대해서, 그리고 모든 荷重段階에 대해서 積分이 수행되어야 한다. 따라서 이와 같은 積分을 수행하기 위해서는 매우 效率的인 數值積分公式를 이용해야 한다. 사각형의 $\theta\phi$ 平面에서의 積분은 積분點이 極(pole)쪽으로 모이게 되어 效果的인 方法이 되기 어렵다. Albrecht and Collatz^(1, 2, 9) 등이 開發한 正規多面體를 利用하는 方法은 積분點이 均일하게 분포되어 있어 매우 效果적일 수 있다. 그러나 가장 많은 面을 가진 正規多面體(regular polyhedron, Platonic solid)는 正 20面體(icosahedron)이므로, 半球에 대하여 10개의 積분點밖에 가질 수 없게 된다. 그러나 變形軟화와 같은 非線型問題에 대해서는 積분結果의 正確性이 問題가 된다. 그림 2(a)는 正 20면체^(2, 9)를 이용하여 本構成모델의 積分結果를 試驗한 것이다. 結果의 正確性試驗方法은 一軸應力荷重(즉, $\sigma_{11} \neq 0$ 이고 다른 모든 $\sigma_{ij} = 0$)을 球의 여러 다른 점에 作用시켰을 때 그 結果가 어떤가로부터 측정된다. 그림 2(a)에서 보여진 바와 같이 荷重位置(그림 2(a)에서 a, b, \dots, f)에 따라 그 계산結果가 많은 차이를 보이고 있다. 여

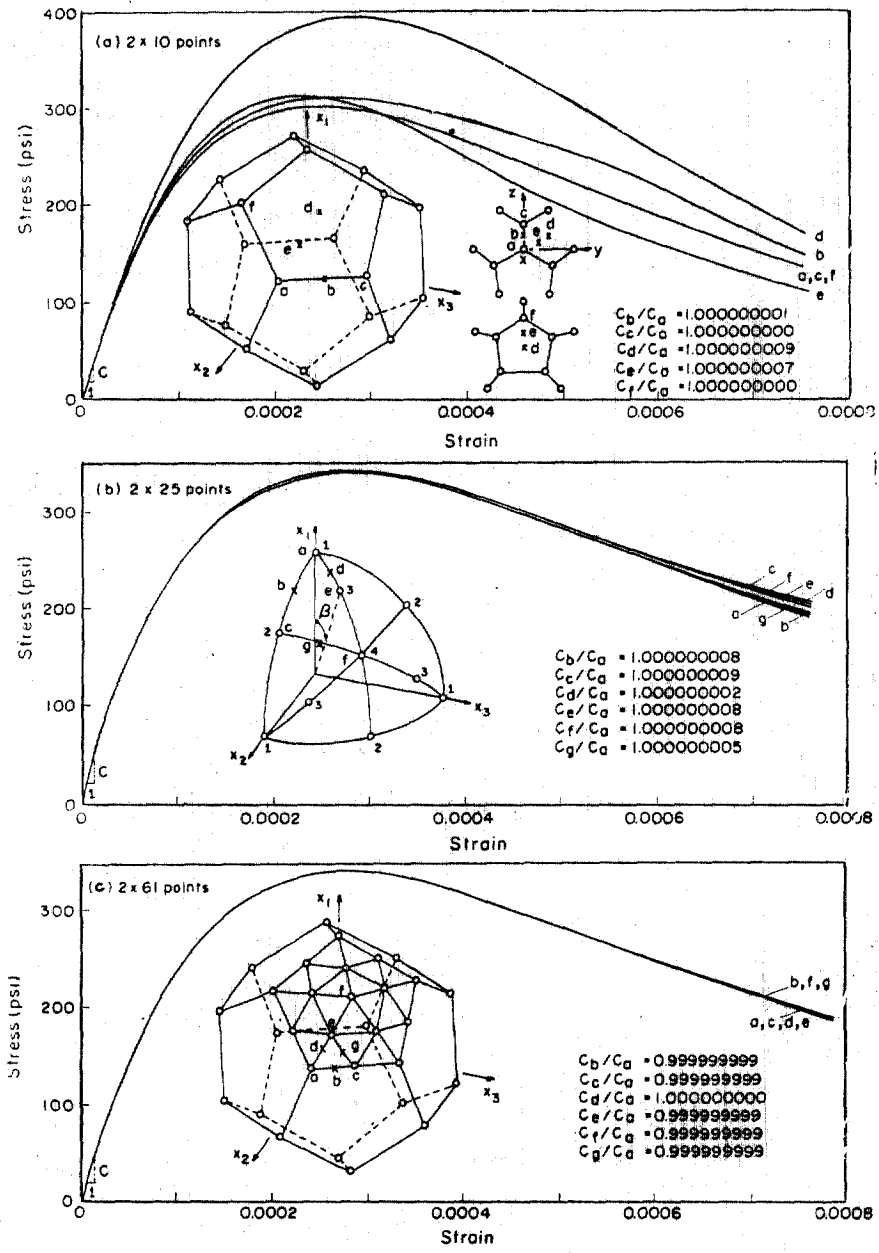


그림 2. 一軸應力荷重의 各作用方向에 따른 應力-變形度關係

기서 사용된 계수값들은 $E_n = 245,000 \text{ kg/cm}^2 (= 3,485 \text{ ksi})$, $k = 6,280$, $m = 1$ 이다. 만약 積分公式가 정확했다면 그림 2(a)의 모든 結果曲線들은 같아야 한다. 그러나 같은 荷重狀態에서 서로 많은 차이가 있으며 이것은 이 적분공식이, 특히 非線型問題에 대해 별로 정확하지 못함을

보여주고 있다. 따라서 좀더 정확하고 有效한 公式를 사용해야 하며, 본 研究에서는 이를 위하여 球表面에 대한 새로운 수치적분공식을 유도하여 사용하였다. 이 開發된 公式들은 直交對稱 및 完全對稱성을 띠고 있어 平面應力이나 平面變形問題 等に 적은 수의 積分點을 가지고도 아

주 有效하게 사용할 수 있는 좋은 점을 가지고 있다. 이렇게 유도된 公式들 가운데 積分公式의 正確性을 보기 위하여 2×25 點에 대한 計算結果를 그림 2(b)에 表示하였고, 2×61 點에 대한 結果는 그림 2(c)에 表示하였다. 이들 그림에서 보는 바와 같이 2×25의 結果는 2×10의 結果

에 비해 상당히 精確해졌고, 2×61의 結果는 모든 경우가 거의 일치되는 曲線을 보이고 있어 精確성이 아주 높음을 알 수 있다. 따라서 실제적이고도 精確한 해석을 위해서는 半球에 대하여 최소 25 點 이상의 積分點을 사용해야 하며 다음節의 實驗結果와의 比較에서도 이 有效적인 2

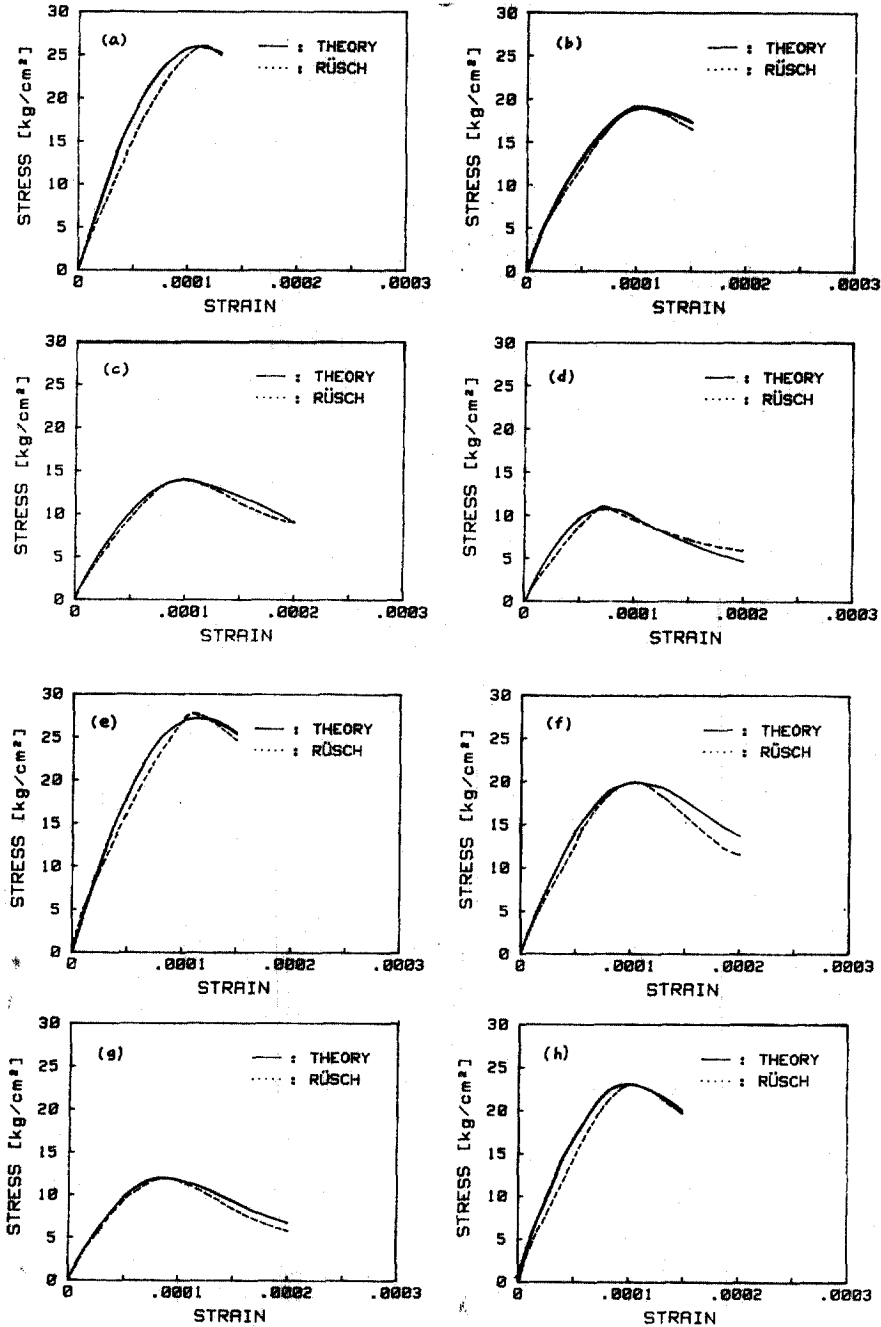


그림 3. Rüschi의 引張實驗結果와의 比較

×25 公式를 이용하였다.

4. 解析節次 및 實驗結果와의 比較

前節에서 유도된 構成모델의 解析要領은 다음과 같다.

1) 式 (2)로부터 各적분점에 대하여 $e_n^{(a)}$ 를 求하고, 이것을 利用하여 式 (9)의 $f'(e_n)$ 을 계산한다. 만약, 逆荷重(unloading)현상이 일어나면 逆荷重剛度(unloading stiffness)를 利用하며 이는 다음節에 상술되어 있다.

2) 式 (18)의 B_{ijkm} 을 계산하고, 이어서 式 (12)의 D_{ijkm} 을 계산한다. 有限要素解析時 이것을 모든 要素와 적분점에 대하여 수행한다.

3) 式 (11)을 이용하여 未知의 應力 및 變形度를 求한다. 有限要素解析時에는 먼저 주어진 荷重增加에 대한 節點變位の 增加量을 계산하고, 이로부터 變形도와 應力을 계산한다.

4) 같은 荷重段階의 다음반복계산이나 다음하중단계의 계산을 수행한다.

이러한 해석要領에 따라 本 모델을 여러 引張實驗資料^(10, 12, 16)와 비교한 結果가 그림 3~5에 表示되어 있으며 만족할만한 結果를 보여주고 있다. 이 실험결과와의 비교로부터 얻어진 係數

E_n 과 k 의 값이 표 1에 表示되어 있다. 係數 m 의 값은 各 실험자료와의 比較로부터 最適值로서 $m=2$ 가 산출되었으며, 따라서 모든 경우에 대하여 $m=2$ 로 고정하여 계산하였다.

本 모델에서 사용되는 係數는 E_n 과 k 로서 本 모델사용時 各 콘크리트에 대하여 이들의 入力值를 안다는 것은 실제계산에 매우 큰 도움을 주게 된다. 따라서 이들의 값을 콘크리트의 대표적인 基準性質인 압축강도 σ_{ck} 의 함수로 表示되는 近似式을 實驗資料와의 回歸分析(regression analysis)을 통하여 유도하였다. 즉 여기서 얻어진 近似式은 다음과 같다.

$$E_n = 0.196 \times 10^6 \sqrt{\sigma_{ck}}, \quad k = \frac{0.189 \times 10^{10}}{\sqrt{\sigma_{ck}}} \quad (19)$$

5. 一般荷重狀態에 대한 適用

前節에서의 一軸引張實驗結果는 좀더 단순하고 간단한 公式으로도 예측 및 해석될 수 있다. 그러나 이러한 간단한 公式들은 實際構造物에서 發生하는 多軸應力狀態, 非比例荷重 또는 主應力의 方向이 變하는 경우 등 일반하중상태에 적용할 수가 없다. 그러므로 本 構成모델의 중요

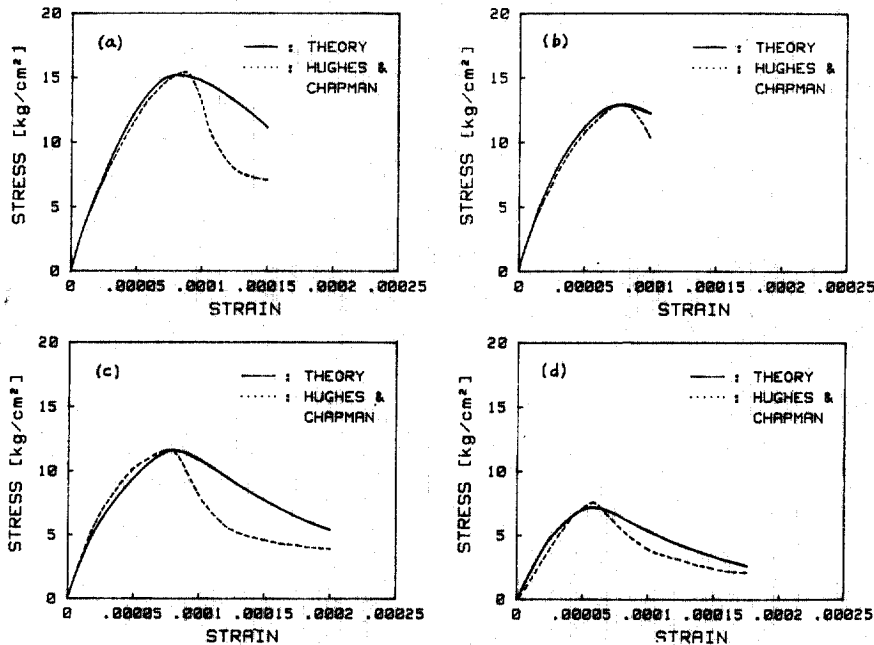


그림 4. Hughes, Chapman의 引張實驗結果와의 比較

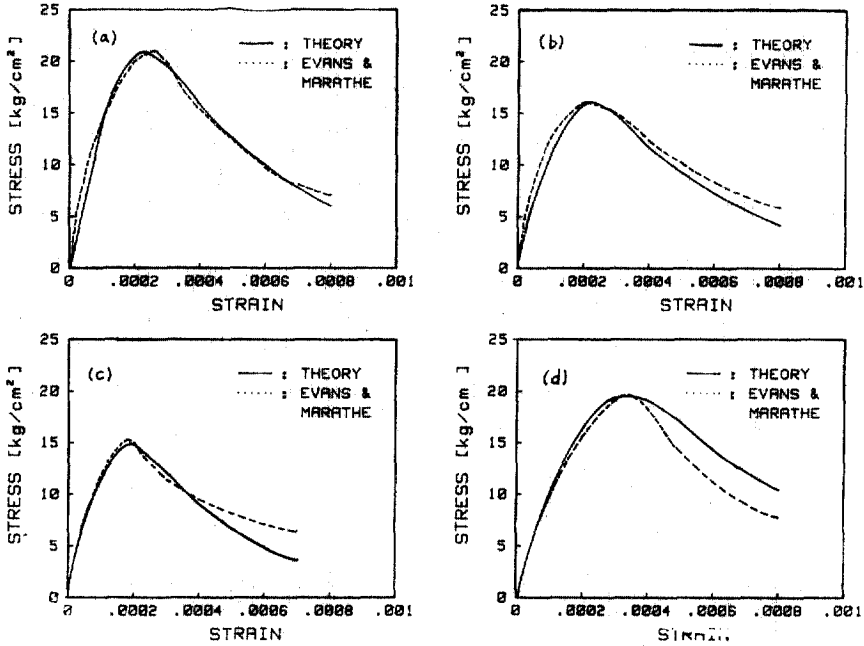


그림 5. Evans, Marathe의 引張實驗結果와의 比較

표 1. 實驗資料에 따른 E_N 과 k 값

Test Series	$E_N (\times 10^6 \text{kg/cm}^2)$	$k (\times 10^3)$	
Rüsch	a	0.395	0.975
	b	0.295	1.010
	c	0.231	1.160
	d	0.246	2.200
	e	0.404	0.930
	f	0.320	1.080
	g	0.230	1.550
	h	0.385	1.170
Hughes, Chapman	a	0.305	1.700
	b	0.283	2.000
	c	0.257	2.050
	d	0.210	3.600
Evans, Marathe	a	0.150	0.220
	b	0.122	0.240
	c	0.134	0.340
	d	0.098	0.105

한 가치는 본 理論이 실제상황에서 일어나는 임의의 일반하중상태에 잘 적용될 수 있다는 데에 있다. 非比例荷重 등 一般狀態의 인장하중을 받는 콘크리트에 대한 실험결과가 아직까지 없기 때문에 여기서는 하나의 전형적인 경우를 해석

하기로 한다. 즉, 처음에 일축인장을 가하되 最大應力을 넘어서 最大應力이 半으로 감소되는 變形軟化區間까지 가하고, 그 뒤에 (a) 引張應力 σ_x 를 고정시키고 전단하중 ε_{xy} 를 가하거나 또는 (b) 인장변형도 ε_x 를 고정시키고 전단하중 ε_{xy} 를 가한다. 이와 같은 荷重狀態는 특히 原子力發電所 積남용기의 지진해석시 관심이 되는데 즉, 지진에 의한 수평전단력이 일어나기 이전에 수평방향으로 部分균열이 일어난 경우이다.

이러한 非比例荷重의 경우 어느 弱한 면에서는 逆荷重이 일어나게 되는데 이를 위해 逆荷重 擧動에 대한 고찰이 필요하다. 간단한 方法으로서 逆荷重이 彈性的(즉, 경사도 E_n)으로 거동한다고 가정할 수도 있으나, 이는 사실상 너무 단순하므로 여기서는 콘크리트에 좀더 실제적인 거동을 고려하기로 한다. 이를 위해 전단을 받는 콘크리트의 實驗資料에 근거를 둔 실제적인 모델⁵⁾을 利用하기로 한다. 즉,

$$\sigma_n = -a_1 + a_2 \tan^{-1}[a_3(\varepsilon_n - a_4)] \quad (20)$$

여기서 $a_2 = 0.334(1 + 1.38e^{-400\varepsilon_n})\sigma_m$,

$$a_1 = \sigma_m - 1.57a_2$$

$$a_3 = 0.07(1 + 13.29e^{-14(\varepsilon_n)^{0.25}}) \frac{E_n}{a_2}$$

$$a_4 = \varepsilon^* - (1/a_3) \tan[(\sigma^* + a_1)/a_2]$$

$$\sigma_\infty = 0.6 \left(\frac{1.86 + 15 \times 10^5 \varepsilon^{*3}}{1 + 15 \times 10^5 \varepsilon^{*3}} \right) \sigma_{ck}$$

여기서 σ^* 와 ε^* 는荷重이逆荷重으로變하는 순간에서의應력과變형도이다. σ_∞ =압축應력상태에서의漸近値이다. 위에서 설명된 두가지의荷重경우에 대한結果가 그림 6에表示되어 있다. 여기서 $E_s = 147,630 \text{ kg/cm}^2 (=2,100 \text{ ksi})$, $k=0.199 \times 10^8$, $m=2$, $\sigma_{ck} = 178 \text{ kg/cm}^2$ 가 사용되었다. 이 그림에서 보는 바와 같이荷重의實際狀態에 따라 그結果가 상당히 다른 것을 알 수 있다.

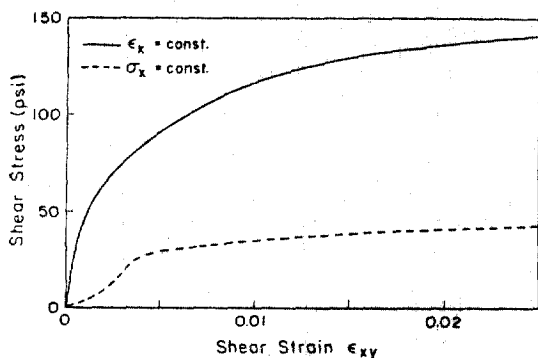


그림 6. 引張과 剪斷의 복합하중 상태에서의 應力-變形度關係

6. 結 論

前節에서 서술된 本 研究內容으로부터 얻어진 主要 結論은 다음과 같다.

1. 콘크리트內部에는 균열발생의 根源이 되는 많은 弱한面(weak plane)이 存在하며, 本 構成 모델에서는 이 弱한面에서의 應力減少가 그 面의 變形度の 함수라는 가정아래 假想일의 原理로부터 콘크리트의 接線剛度(tangential stiffness)를 얻을 수 있다.

2. 弱한面의 微細變形도와 콘크리트의 巨視的인 變形도를 연결시킴으로서 變形軟化現象을 安定性있게 모델할 수 있다.

3. 本 構成모델은 增分形이고 進路從屬의이므로 非比例荷重이나 主應力의 方向이 變하는 경우 등 一般적이고도 실제로 중요한 경우에 효과적으로 이용할 수 있다. 또한 本 모델을 有限要

素解析에 유용하게 이용할 수 있다.

4. 本 理論과 引張實驗資料와의 比較는 만족스러우며, 本 모델을 이용하기 위하여는 두개의 係數만이 필요한데 이들을 求하는 近似式이 유도되었다.

5. 既存의 公式보다 우수하고 效率인 球表面에 대한 數值積分公式를 유도하였다.

謝 辭

이 論文은 1983년도 문교부 학술연구조성비에 의하여 연구되었으므로 이에 감사를 드립니다.

參 考 文 獻

1. Abramowitz, M., and Stegun, I. A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", Dover Publications, Inc., New York, 1970.
2. Albrecht, J., and Collatz, L., "Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale, "Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 38, Heft 1/2, Jan./Feb., pp. 1~15.
3. Batdorf, S.B., and Budiansky, B., "A mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip, NACA TN1871, April, 1949.
4. Bazant, Z.P., and Oh, B.H., "Strain-Rate Effect in Rapid Triaxial Loading of Concrete", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 108, No. EM5, October 1982, pp. 764~782.*
5. Bazant, Z.P., and Gambarova, P., "Model for Shear of Cracks in Concrete", *Report on Concrete, To be published.*
6. Bazant, Z.P., Ozaydin, K., and Krizek, R.J., "Micromechanics Model for Creep of Anisotropic Clay", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, 1975, pp. 57~78.*
7. Birkimer, D.L., and Lindemann, R., "Dynamic Tensile Strength of Concrete Materials", *ACI Journal, Vol. 68, January 1971, pp. 47~49.*
8. Blakey, F.A., and Beresford, F.D., "Tensile Strains in Concrete", *Report C2.2-1 and C2.2-2, Division of Building Research, CSIRO, Melbourne.*
9. Encyclopedic Dictionary of Mathematics, ed. by Shohichi Lyanaga and Yukiyosi Kawada, *M.I.T.*

Press, Vol. I, Vol. II, 1980.

10. Evans, R.H., and Marathe, M.S., "Microcracking and Stress-Strain Curves for Concrete in Tension", *Materiaux et Constructions, No. 1*, Jan.-Feb., 1968, pp. 61~64.
11. Heilmann, H.G., Hilsdorf, H.H., and Finsterwalder, K., "*Festigkeit und Verformung von Beton unter Zugspannungen*", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 203, W. Ernst & Sohn, West Berlin, 1969.
12. Hughes, B.P., and Chapman, G.P., "The Complete Stress-Strain Curve for Concrete in Direct Tension", *Bulletin RILEM, No. 30*, pp. 95~97, 1966.
13. Kaplan, M.F., "Strains and Stresses of Concrete at Initiation of Cracking and near Failure", *ACI Journal, Vol. 60, No. 7*, July 1963, pp. 853~880.
14. Kaplan, M.F., "Crack Propagation and the Fracture of Concrete", *ACI Journal, Vol. 58, No. 11*, Nov. 1961.
15. Ngo, D., and Scordelis, A.C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures", *ACI Journal, Vol. 64, No. 3*, March, 1967.
16. Rüsck, H., and Hilsdorf, H., "*Deformation Characteristics of Concrete under Axial Tension*", Voruntersuchunge, Bericht Nr. 44, Munich, May, 1963.
17. Sanders, J.L., "Plastic Stress-Strain Relations Based on Linear Loading Function", *Proceedings, 2nd U.S. National Congress on Applied Mechanics, ASME, 1955*, pp. 455~460.
18. Taylor, G.I., "Plastic Strain in Metals", *J. Inst. Metals, Vol. 62*, 1938, pp. 307~324.
19. Todd, J.D., "The Determination of Tensile Stress-Strain Curves for Concrete", *Proceedings, Institution of Civil Engineers, Vol. 4, No. 2, Part I*, Mar. 1955, pp. 201~211.
20. Wood, D.N., "Exploration of Principal Stress Space with Kaolin in a Triaxial Apparatus", *Geotechnique, Vol. 25*, 1975, pp. 783~797.

(接受: 1984. 3. 6)