

2次元 보 有限要素의 非線形 解析

A Nonlinear Analysis of Two-Dimensional Beam Finite Elements

申 英 滉*
Shin, Young Shik

Abstract

A nonlinear formulation of a beam finite element(NB6) on the total Lagrangian mode for the geometrically nonlinear analysis of two-dimensional elastic framed structures is presented. The NB6 beam element has been degenerated from the three-dimensional continuum by introducing the deep beam assumptions and consists of three reference nodes and three relative nodes. The element characteristics are derived by discretizing the beam equations of motion using the Galerkin weighted residual method and are reduced-integrated repeatedly for each loading step by the Newton-Raphson iteration technique. Several numerical examples are given to demonstrate the accuracy and versatility of the proposed nonlinear NB6 beam element.

要 旨

本 研究에서는 2次元 彈性 뼈대 構造物의 幾何學의 非線形 解析을 위하여 Total Lagrangian 方法에 의한 보 有限要素(NB6)의 Formulation을 보여주고 있다. 이 보 要素는 3次元 連續體로부터 깊은 보 假定을 利用하여 誘導되며 3個의 基準節點과 3個의 相對節點으로 이루어진다. 보의 運動 方程式은 Galerkin의 加重殘差法으로 Discretization되며 要素剛度 및 質量매트릭스는 Newton-Raphson 方法으로 每荷重 段階마다 反復計算되어 減少積分法으로 求解된다. 本 研究에서 提案되는 NB6 非線形 보 要素의 正確도와 效率性을 考察하기 위하여 몇가지 例題을 解析하였다.

1. 序 論

最近 컴퓨터의 發達로 말미암아 各種 構造物의 非線形 解析에 관한 研究가 活潑히 進行되고 있으며 有限要素法에 의한 여러가지 形態의 많은 非線形 보 要素들이 開發되고 있다. 一般의으로 이와 같은 보 要素들은 特定한 보의 假定을 導入하여 3次元 連續體로부터 보 要素를 誘導하는 Classical approach와 먼저 連續體로부터 連

續體 要素를 誘導하고 特定한 境界條件을 利用하여 보 要素를 誘導하는 Degeneration approach⁽¹⁻⁶⁾에 의하여 誘導되고 있다.

Degeneration 方法으로 非線形 解析을 하는 경우 要素 매트릭스는 Total Lagrangian 方法과 Updated Lagrangian 方法으로 구하여짐이 보통이며 이 두 方法의 根本的인 差異點은 前者의 경우 時間 $t=0$ 일때의 Reference configuration를 基準으로 하는데 반해 後者의 경우는 Updated configuration을 基準으로 하여 未知의 節點變位를 計算한다. 그러나 等方性(Isotropic)보의 경우

* 正會員 · 嶺南大學校 工科大學 專任講師, 土木工學科

- REFERENCE NODES
- RELATIVE NODES

- \bar{X} : REFERENCE COORDINATES
- \bar{x} : SPATIAL COORDINATES
- r, s : NATURAL COORDINATES

$$u(r, s) = \sum_{a=1}^n N^a(r, s) \bar{U}^a \quad \text{where } n = \begin{cases} 4 & \text{for NB4} \\ 6 & \text{for NB6} \end{cases}$$

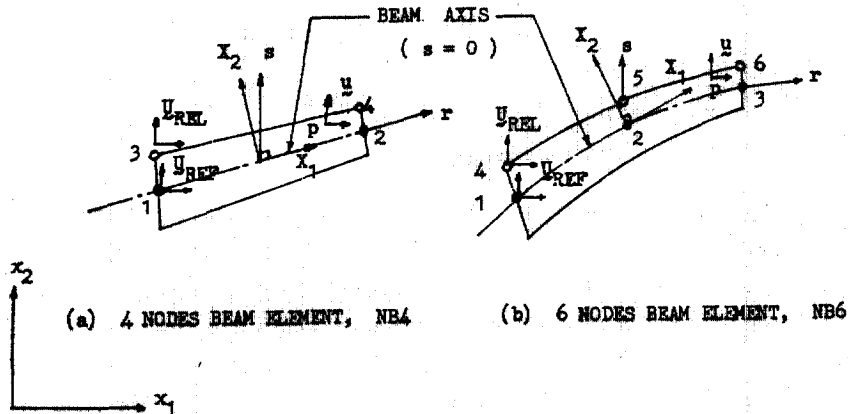


그림 1. Configuration of proposed beam elements NB4 and NB6.

에는 前者의 方法이 後者의 方法보다 效率的인 것으로 알려져 있다.

지금까지 Saafan⁽⁷⁾의 보 要素를 비롯하여多數의 類似한 非線形 보 要素⁽⁸⁻¹²⁾들이 開發되었지만 이 보 要素들은 모두 誘導過程이 複雜하고 適用範圍가 限定되어 있으며 剪斷變形의 影響을 包含하지 않고 있다. 또한 Jennings⁽¹³⁾와 Yang⁽¹⁴⁾은 보다 簡單한 보 要素를 提案한 바 있으나 이 보 要素들도 얇은 보 理論에 根據하고 있으므로 剪斷變形의 影響을 考慮하지 않고 있다. 最近에 Wood등⁽¹⁵⁾과 Bathe⁽¹⁶⁾등은 Degeneration 方法으로 誘導한 보 要素들을 提案하고 있으나 Wood등이 提案한 보 要素는 극히 얇은 보에 대하여 適合치 않으며 Bathe등이 提案한 보 要素도 誘導過程이 매우 複雜하다.

따라서 本 研究에서는 보의 幾何學의 非線形 解析을 위하여 要素매트릭스의 反復計算이 보다 經濟的이며 보의 L/h 比에 關係없이 效率的인 非線形 보 要素(NB6)의 3次元 連續體로부터의 Degeneration을 보여주고 있다. 本 研究에서 提案되는 NB6 보 要素는 그림 1에서 보는 바와

같이 보 要素의 中立軸上에 3개의 基準節點(Reference node)과 上部 境界面上에 3개의 相對節點(Relative node)으로 이루어지며 鉛直 軸 ω 와 平面回轉 θ 를 各 節點의 自由度로 取하고 있다. 따라서 일반적으로 平面回轉 θ 로 表示되는 彎變形은 中立軸上의 基準節點에 대한 相對節點의 相對的인 變位로 나타내어진다⁽¹⁾. NB6 보 要素의 要素매트릭스는 보의 運動方程式을 Galerkin 加重殘差法으로 Discretization하여 誘導하며 減少積分法^(17,18)(Reduced integration technique)으로 積分된다. 또한 2개의 基準節點과 2개의 相對節點을 갖는 NB4 보 要素와의 比較 및 NB6 보 要素의 效率性을 여러가지 例題解析을 통하여 考察하였다.

2. 非線形 보 要素(NB6)의 誘導

2.1 보의 運動方程式의 Discretization

空間에서의 質點의 運動을 나타내기 위한 空間 直角座標 \bar{x} 와 基準 Configuration B_0 를 나타내기 위한 基準直角座標 \bar{X} 의 座標系를 使用

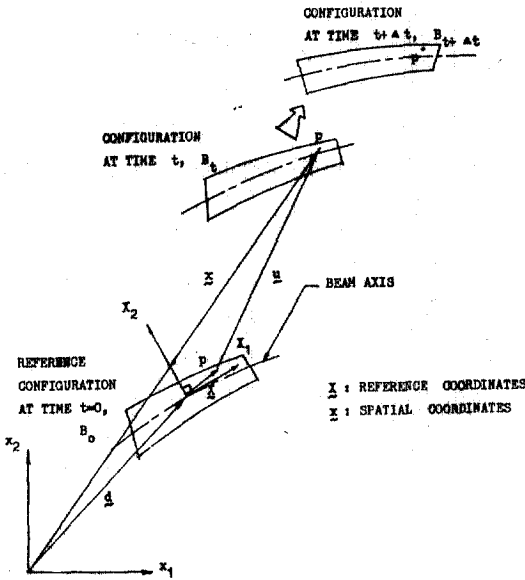


그림 2. Motion of a beam element.

하면 任意的 質點 $P(X)$ 의 時間 t 일 때의 B_0 의 基準點으로부터의 變位 u 는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$x_i(X, t) = \delta_{ij} X_j + d_j + u_i(X, t) \quad (1)$$

여기서 δ_{ij} 는 x 座標系와 X 座標系 사이의 Cartesian shifter를 나타내며 d 는 그림 2에서 보는 바와 같이 X 의 原點에서부터의 位置벡터이다. 또한 i, j 는 x 座標系, I, J 는 X 座標系에 對應하는 指數를 나타낸다.

物體의 運動方程式을 Total Lagrangian 形態로 表示하면 다음과 같다.

$$(S_{IJ} F_{I,J})_{,I} + \rho_0 b_j - \rho_0 \ddot{u}_j = 0 \quad \text{in } B_0 \quad (2)$$

여기서 ρ_0 는 B_0 에서의 物體의 質量密度, b 는 體力벡터, S 는 2次 Piola-Kirchoff 應力 텐서 (Tensor), 그리고 F 는 B_0 에서 B_t 까지의 運動에 대한 變形的 變化度 (Deformation gradient)를 나타낸다. 만일 物體內의 質點의 運動이 微分可能할만큼 완만 (Smooth)하다면

$$F_{I,J} = \frac{\partial x_j}{\partial X_I} \quad (3)$$

또한 B_0 의 境界表面 ∂B_0 에 대한 境界條件은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n_i S_{IJ} F_{I,J} - T_j = 0 \quad \text{on } \partial B_0 \quad (4)$$

여기서 n 는 ∂B_0 에 鉛直으로 作用하는 單位벡터이고 T 는 ∂B_0 에 作用하는 既知의 牽引力 (Traction)이다.

式(2)와 式(4)에 Galerkin 加重殘差法을 適用하면 Galerkin weak form 方程式은

$$\begin{aligned} G(u, \delta u) = & - \int_{B_0} (S_{IJ} F_{I,J})_{,I} \delta u_i dV \\ & - \int_{B_0} (\rho_0 b_j - \rho_0 \ddot{u}_j) \delta u_j dV \\ & + \int_{\partial B_0} (n_i S_{IJ} F_{I,J} - T_j) \delta u_j dA \\ = & 0 \quad (5) \end{aligned}$$

여기서 δu 는 加部函數 (Weight function)이다.

B_0 에서의 u 와 δu 의 連續性을 利用하고 式(5)의 右邊의 첫째 項에 Gauss-Green 定理을 適用하면, 하나의 要素에 대한 Galerkin 函數는 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned} G^e(u, \delta u) = & \int_{B_0^e} S_{IJ} F_{I,J} \delta u_i dV \\ & - \int_{B_0^e} (\rho_0 b_j - \rho_0 \ddot{u}_j) \delta u_j dV \\ & - \int_{\partial B_0^e} T_j \delta u_j dA \quad (6) \end{aligned}$$

여기서 上部添字 e 는 하나의 要素를 나타낸다.

Natural coordinates (r, s) 에서 質點 P 의 變位 $u(r, s)$ 는 節點값 U^a 로 表示할 수 있다. 즉,

$$u(r, s) = \sum_{a=1}^n N^a(r, s) U^a \quad (7)$$

$$N^a(r, s) = R^a(r) S^a(s) \quad (8)$$

여기서

$$R^a(r) = \frac{1}{2} (1 + r^a r) \quad (9.a)$$

$$S^a(s) = 1 + s^a (s - 1) \quad (9.b)$$

이고 r^a 와 s^a 는 r 과 s 方向으로의 節點의 座標를 나타낸다. 따라서 座標系 X 의 原點이 要素의 中央에 位置한다면 任意的 質點 $P(X)$ 의 變位函數 $u(X)$ 와 加重函數 $\delta u(X)$ 는 各各의 節點값 U^a 와 δU^a 로 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$u(X) = \sum_{a=1}^n N^a(X) U^a \quad P(X) \in B_0^e \quad (10)$$

$$\delta u(X) = \sum_{a=1}^n N^a(X) \delta U^a \quad P(X) \in B_0^e \quad (11)$$

式(10)과 式(11)을 式(6)에 代入하여 整理하면

$$\begin{aligned} G^e(U, \delta U) = & \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \delta U_j^b (M_{j,i}^{ab} U_i^a \\ & + K_j^b - R_j^b) \quad (12) \end{aligned}$$

여기서 要素質量매트릭스 M_{ji}^{ba} 는

$$M_{ji}^{ba} = \int_{B_0} \delta_{ij} \rho_0 N^a N^b dV \quad (13)$$

要素剛度매트릭스 K_j^b 는

$$K_j^b = \int_{B_0} S_{ij} F_{jJ} N^a N^b dV \quad (14)$$

그리고 要素外力벡터 R_j^b 는

$$R_j^b = \int_{\partial B_0} T_j N^b dA + \int_{B_0} \rho_0 b_j N^b dV \quad (15)$$

각각의 要素들의 Galerkin 函數를 組合하면

$$\begin{aligned} G(U, \delta U) &= \delta U^T [M\dot{U} + K(U) - R] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

그런데 δU 는 任意的 加重函數 δy 의 節點값이므로 式(16)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\dot{U} + K(U) - R = 0 \quad (17)$$

2.2 內力벡터의 線形化 (Linearization)

類似靜的解析(Quasi-static analysis)에서는 式(17)의 慣性力 項을 없이하여 다음과 같은 보의 非線形 方程式을 얻을 수 있다.

$$K(U) - R = 0 \quad (18)$$

式(18)을 Newton-Raphson 方法으로 풀기 위하여 非線形 項 $K(U)$ 를 U 에 대하여 線形化하면 다음과 같이 된다.

$$DK(U_n^m) \Delta U_n^m = R_n - K(U_n^m) \quad (19)$$

여기서 $DK(U_n^m)$ 은 n 번째 荷重段階에 對應하는 U_n 을 얻기 위한, m 번째 反復計算에서 求해진 變位函數 U_n^m 에 대한 接線 剛度매트릭스이며 ΔU_n^m 은 U_n^m 의 增分이다. 式(19)의 $DK(U_n^m)$ 은 다음과 같이 成分式으로 表示할 수 있다.

$$DK_{ji}^{ba}(U_n^m) = \left. \frac{\partial K_j^b}{\partial U_i^a} \right|_{v=V_n^m} \quad (20)$$

式(14)를 式(20)에 代入하면

$$\begin{aligned} DK_{ji}^{ba}(U_n^m) &= \int_{B_0} \left[\frac{\partial S_{ij}}{\partial U_i^a} F_{jJ} N^b N^c \right. \\ &\quad \left. + S_{ij} \frac{\partial F_{jJ}}{\partial U_i^a} N^b N^c \right] dV \Big|_{v=V_n^m} \end{aligned} \quad (21)$$

따라서 式(1), (3)과 式(7)에서 F_{jJ} 는

$$F_{jJ} = \delta_{jJ} + N^a J U_i^a \quad (22)$$

式(21)과 (22)에 Green의 變形率 텐서 $E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{iJ} F_{jJ} - \delta_{ij})$ 를 導入하고 $\frac{\partial S_{ij}}{\partial U_i^a} = \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} \right) \left(\frac{\partial E_{kl}}{\partial U_i^a} \right)$ 를 利用하여 整理하면 하나의 要素에 對하 DK 는 다음과 같이 表示될 수 있다.

$$\begin{aligned} DK_{ji}^{ba}(U_n^m) &= \left[\int_{B_0} [F_{jJ}(U) N^b N^c] \left[\frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}}(U) \right] \right. \\ &\quad \left. [F_{iL}(U) N^a N^c] dV \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_0} \delta_{ij} N^a N^c S_{ij}(U) N^b N^c dV \right]_{v=V_n^m} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 式(23)의 첫번째 項은 有限運動의 效果를 包含한 彈性 接線 剛性度를 나타내며 두번째 項은 初期應力의 影響을 나타내고 있다.

2.3 應力-變形率 關係

線形 彈性 等方性 材料의 4次 彈性텐서는 一般的으로 다음과 같이 表示된다.

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} \quad (24)$$

式(24)를 Lamé의 常數 λ 와 μ 를 使用하여 다시 쓰면

$$2C_{klmn} = \lambda \delta_{kn} \delta_{lm} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \quad (25)$$

그런데 보의 X_2 方向으로 平面應力 假定을 導入하면 2次 Piola-Kirchoff 應力과 Green의 變形率사이에는 다음과 같은 關係式이 成立한다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서 E 와 G 는 Young 係數와 剪斷彈性 係數이다.

2.4 要素매트릭스의 두께積分 (Thickness integration)

一般的으로 非線形 解析에서는 積分點의 數에 따라 要素매트릭스의 反復計算의 多少가 決定된다. 따라서 本 研究에서는 計算을 減少시키기 위하여 소위 減少積分法과 더불어 보의 두께 方向으로 積分을 遂行한다. 이 두께 積分은 (r, s) 座標系의 s 의 多項式으로 모든 變數를 나타내어 領域 s 에 대하여 積分하는 것이다. 즉 DK_{ji}^{ba} 와 K_j^b 를 모두 r 과 s 의 函數로 表示하고 Gauss 積分點에서의 Jacobi 行列의 값이 同一斷面의 中立軸에서의 값과 같다는 假定을 導入하여 直線部材 및 曲線部材의 경우에 모두 $J(r, s) = J(r, 0)$ 이 成立하도록 積分한다. 이러한 假定의 物理的인 意味는 積分點에서의 微小要素의 體積變化는 中立軸上的의 任意的 點에서의 體積變化와 같다고 할 수 있으며 이는 보의 두께가 相對적으로 얇을수록 잘 成立한다. 따라서 要素매트릭스는

Gauss 積分에 의하여 보의 길이方向으로 減少積分하고 보의 두께方向으로 1次積分하여 구한다.

3. 解析例題 및 考察

本 研究에서 提案된 非線形 要素의 效率性을 考察하기 위하여 여러가지 例題를 解析하였다. 非線形 問題의 모든 解는 Newton-Raphson 方法에 의하여 FEAP⁽¹⁹⁾ 프로그램으로 每 荷重 段階마다 反復計算하였으며 收斂條件은 變位 正規(Norm)의 10^{-5} 倍보다 작은 變位 增分の Euclidean 正規로 하였다.

3.1 線形 캔틸레버 보

NB6 要素의 正確度를 알아보기 위하여 그림 3과 같은 캔틸레버 보를 集中荷重을 받는 경우와 等分布荷重을 받는 경우에 대하여 각각 깊은 보($h/L=0.5$)와 얇은 보($h/L=0.001$)의 경우를 解析하였다. 表 1에는 必要한 積分次數를 나타내었으며 Shear-locking 現象을 피하기 위하여 剪斷 에너지 項만 減少積分하였다. 表 2, 3과 그림 3에서 보는 바와 같이 하나의 NB6 要素로도 正確解(Analytical solution)를 얻을 수 있었으며 다른 要素들보다도 보다 넓은 h/L 의 범위내에서 正確解에 대한 收斂性이 좋음을 알 수 있다.

表 1. Integration orders used for the two proposed nonlinear beam elements NB4 and NB6.

Element Type	Required quadrature for exact integration		Exact shear integration scheme		Reduced shear integration scheme	
	Bending	Shear	Bending	Shear	Bending	Shear
NB4	1×2	2×2	2×2	2×2	1×2	1×2
NB6	2×2	3×2	3×2	3×2	2×2	2×2

表 2. Normalized tip displacements(w) and equivalent rotations(θ) for a thick and a thin cantilever beam subjected to an end point load modelled by NB4 and NB6 with exact and reduced shear integrations.

(1) Thick beam ($h/L=0.5$)

Number of elements	NB4				NB6			
	Exact		Reduced		Exact		Reduced	
	w	θ	w	θ	w	θ	w	θ
1	0.3333	0.3333	0.7778	1.0000	0.9366	1.0000	1.0000	1.0000
4	0.8889	0.8889	0.9861	1.0000	0.9996	1.0000	1.0000	1.0000
9	0.9759	0.9759	0.9972	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0.9922	0.9922	0.9991	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(2) Thin beam ($h/L=0.001$)

Number of elements	NB4				NB6			
	Exact		Reduced		Exact		Reduced	
	w	θ	w	θ	w	θ	w	θ
1	0.20×10^{-5}	0.20×10^{-5}	0.7500	1.0000	0.7500	1.0000	1.0000	1.0000
4	0.32×10^{-4}	0.32×10^{-4}	0.9844	1.0000	0.9844	1.0000	1.0000	1.0000
9	0.16×10^{-3}	0.16×10^{-3}	0.9969	1.0000	0.9969	1.0000	1.0000	1.0000
16	0.51×10^{-3}	0.51×10^{-3}	0.9990	1.0000	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000

表 3. Normalized tip displacements(w) and equivalent rotations(θ) for a thick and a thin cantilever beam subjected to a uniformly distributed load modelled by NB4 and NB6 with exact and reduced shear integrations

(1) Thick beam($h/L=0.5$)

Number of elements	NB4				NB6			
	Exact		Reduced		Exact		Reduced	
	w	θ	w	θ	w	θ	w	θ
1	0.4286	0.5000	1.0000	1.5000	0.9183	1.0000	1.0000	1.0000
4	0.9049	0.9167	1.0000	1.0312	0.9994	1.0000	1.0000	1.0000
9	0.9794	0.9819	1.0000	1.0060	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0.9934	0.9942	1.0000	1.0020	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

(2) Thin beam($h/L=0.001$)

Number of elements	NB4				NB6			
	Exact		Reduced		Exact		Reduced	
	w	θ	w	θ	w	θ	w	θ
1	0.20×10^{-5}	0.20×10^{-5}	1.0000	1.5000	0.6687	1.0000	1.0000	1.0000
4	0.32×10^{-4}	0.33×10^{-4}	1.0000	1.0312	0.9792	1.0000	1.0000	1.0000
9	0.16×10^{-3}	0.16×10^{-3}	1.0000	1.0060	0.9960	1.0000	1.0000	1.0000
16	0.51×10^{-3}	0.51×10^{-3}	1.0000	1.0020	0.9987	1.0000	1.0000	1.0000

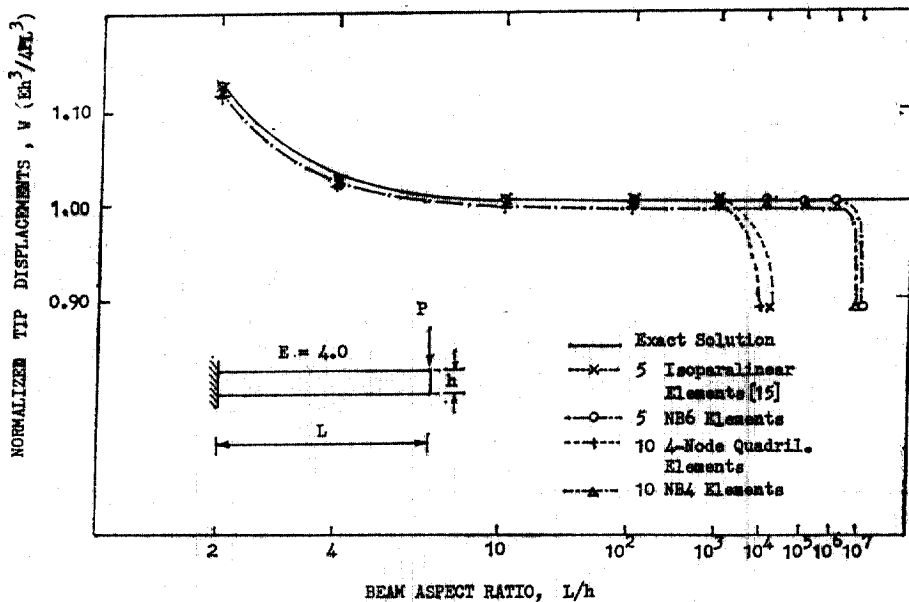


그림 3. A cantilever beam subjected to an end point load.

3.2 集中荷重을 받는 薄板形 캔틸레버 보

그림 4 에 보인 캔틸레버 보를 하나의 NB6 要

素와 세개의 NB6 要素로 解析하여 Bisshopp⁽²⁰⁾에 의한 正確解 및 Bathe⁽¹⁴⁾ 등에 의한 有限要素解와 比較하였다. 또한 깊은 보($a/h=2$)와 얇을

보($a/h=100$)의 경우로 나누어 解析하였다. 그림 4에서 보는 바와 같이 같은 數의 要素를 사용한 경우 Bathe 등의 要素보다 NB6 要素가 正確解에 보다 近接함을 알 수 있으며 또한 얇은 보의 解를 구함에 必要한 反復計算의 數는 깊은 보의 경우보다 항상 많음을 알 수 있다. 그림 5에서는 NB6 보 要素가 NB4 보 要素보다 항상 正確한 解를 나타냄을 보여주고 있다.

3.3 集中荷重을 받는 1端 固定 他端 傾지 아치(Arch)

그림 6에 보인 바와 같이 頂部(Apex)에 時間에 따라 增加하는 하나의 集中荷重을 받는 1端 固定 他端 傾지 아치를 6개의 NB6 要素와 12개의 NB4 要素로 解析하였다. 荷重-變位 曲線은 그림 6에서 보는 바와 같으며 正確解⁽²¹⁾와 比較하였다. 그림 6에서 보는 바와 같이 6개의 NB6에 의한 解는 12개의 NB4에 의한 解보다 훨씬 正確함을 알 수 있다. 또한 不安定(Instability) 荷重의 誤差는 NB6 要素의 경우 0.9%, NB4 要素의 경우에는 9%이다

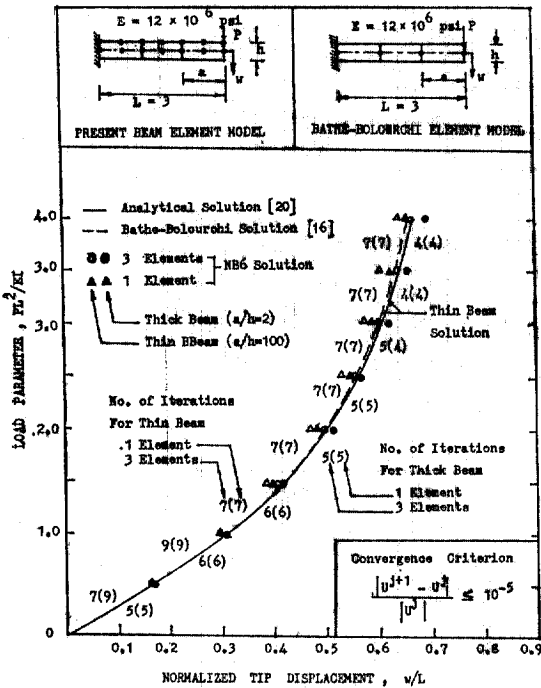
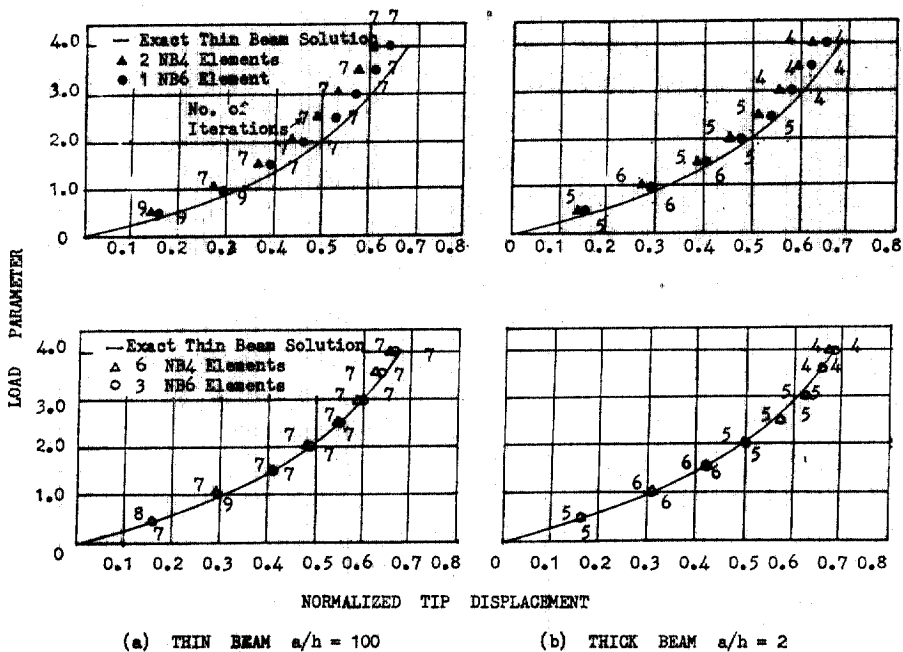


그림 4. Comparisons of load-deflection curves from large displacement analysis of a cantilever beam subjected to tip load.



(a) THIN BEAM $a/h = 100$

(b) THICK BEAM $a/h = 2$

그림 5. Comparisons of tip deflections for thin and thick beams using the NB4 and NB6 elements with varying mesh sizes.

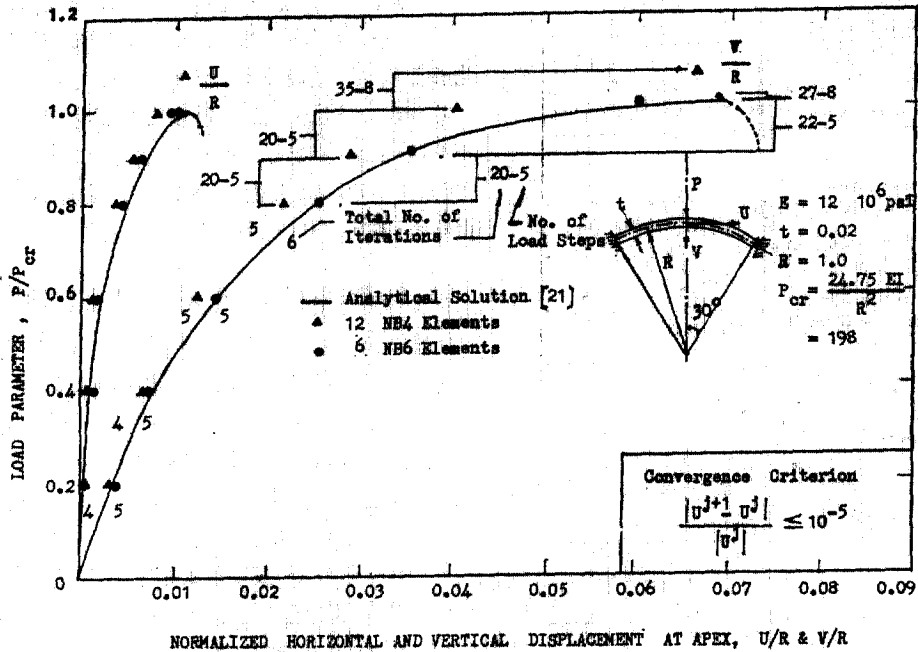


그림 6. Load-deflection curve of a clamped-hinged arch under a concentrated vertical load at the apex.

4. 結 論

本 研究에서는 2次元 버대 構造物의 大變形 解析을 위한 非線形 보 要素를 提案하였다. 이 보 要素들은 다른 보 要素들에 비하여 誘導過程이 簡單하고 보의 두께 方向으로의 積分을 遂行함으로써 反復計算을 減少시킬 수 있었다. 따라서 NB6 보 要素는 적은 數의 要素로서도 充分히 正確한 結果를 얻을 수 있으며 보의 h/L 比에 關係없이 適用할 수 있는 높은 效率성을 보여주고 있다.

謝 辭

本 研究는 嶺南大學校의 1984年度 校費 研究費 支援에 의하여 遂行되었음을 밝히며 本 研究를 可能케한 嶺南大學校에 感謝를 드리는 바이다.

參 考 文 獻

1. W. Kanok-Nukulchai, R.L. Taylor and T.J.R. Hughes, 'A Large Deformation Formulation for Shell Analysis by the Finite Element Method',
2. T.J.R. Hughes, R.L. Taylor and W. Kanok-Nukulchai, 'A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11, pp. 1529~1543(1977).
3. W. Kanok-Nukulchai, 'A Simple and Efficient Finite Element for General Shell Analysis', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14, 179~200(1979).
4. W. Kanok-Nukulchai and Y.S. Shin, 'A Versatile and Improved Higher-order Beam Element', *Proc. ASCE, J. Str. Eng.*, 110, p. 9(1984).
5. 申英渥, "高次變位를 考慮한 보 要素의 解析", 大韓土木學會論文集, 第2卷第3號, pp. 75~86(1982).
6. 邊東均, 申英渥, 蔣鍾卓, "剪斷變形과 回轉慣성을 考慮한 Timoshenko보의 自由振動 解析", 大韓土木學會論文集, 第3卷第4號, pp. 109~122(1983).
7. S.A. Saafan, 'Nonlinear Behaviour of Structural Plane Frames', *Proc. ASCE, J. Str. Eng.*, 4, 557~579(1963).
8. J.J. Connor, R.D. Logcher and S.C. Chan, 'Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures', *Proc. ASCE, J. Str. Eng.*, 6, pp. 1525~1547(1968).

9. S.S. Tezcan, Discussion of 'Numerical Solution of Nonlinear Structures' by T.J. Poskitt, *Proc. ASCE, J. Str. Eng.*, 6, pp. 1613~1625(1968).
10. C. Oran, 'Tangent Stiffness in Plane Frames', *Proc. ASCE, J. Str. Eng.*, 6, 973~985 pp.(1973).
11. C. Oran and A. Kassimali, 'Large Deformations of Framed Structures under Static and Dynamic Loads', *Computers & Structures*, 6, pp. 539~547 (1976).
12. A.K. Chugh, 'Stiffness Matrix for a Beam Element Including Transverse Shear and Axial Force Effects', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11, pp. 1681~1697(1977).
13. A. Jennings, 'Frame Analysis Including Change of Geometry', *Proc. ASCE, J. Str. Eng.*, 3, pp. 627~644(1968).
14. T.Y. Yang, 'Matrix Displacement Solution to Elastica Problems of Beams and Frames', *Int. J. Sol. Structures*, 9, pp. 829~842(1973).
15. R.D. Wood and O.C. Zienkiewicz, 'Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells', *Computers & Structures*, 7, pp. 725~735(1977).
16. K.J. Bathe and S. Bolourchi, 'Large Displacement Analysis of Three Dimensional Beam Structures', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14, pp. 961~986(1979).
17. O.C. Zienkiewicz and E. Hinton, 'Reduced Integration, Function Smoothing and Non-conformity in Finite Element Analysis', *J. Franklin Inst.*, 302, pp. 443~461(1976).
18. R.S. Sandhu and K.J. Singh, 'Reduced Integration for Improved Accuracy of Finite Element Approximations', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 14, pp. 23~37(1978).
19. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd edn., McGraw-Hill, London(1977).
20. K.E. Bisshopp and D.C. Drucker, 'Large Deflections of Cantilever Beams', *Quart. Appl. Math.*, 3, pp. 272~275(1945).
21. D.A. DaDeppo and R. Schmidt, 'Instability of Clamped-hinged Circular Arches Subjected to a Point Load', *Trans. ASME, J. Appl. Mech. Ser. E.*, 42, pp. 894~896(1975).

(接受: 1984. 7. 10)