

水平位置決定에 있어서 3邊測量的 位置誤差에 관한 研究

Study on the Positioning Error of Horizontal Point Fixing by Trilateration

柳	福	模*
Yeu,	Bock	Mo
李	鍾	勳**
Lee,	Jong	Hun
劉	煥	熙***
Yoo,	Hwan	Hee
鄭	昌	植****
Chung,	Chang	Sik

Abstract

This paper is a study on the determination of plane coordinates by observing only the distance with EDM (Electromagnetic Distance Measuring instrument).

The advent of EDM has made a precise measurements of long distance be possible, therefore many studies on trilateration were made.

It is the object of this study to investigate the error distribution of trilateration according to the changing distance and the geometric figure.

要 旨

전자파거리측정기의 출현으로 거리의 정밀측정이 가능해지므로써 水平位置決定技法 중에 한 방법인 3邊測量的 研究가 本格化 되기에 이르렀다.

따라서 本 研究에서는 전자파거리측정기에 의하여 邊만을 觀測하므로써 水平位置決定을 하였고 基準點間의 거리변화에 따른 誤差分布와 幾何學的 條件을 變化시켜 未知點의 좌표에 미치는 영향을 分析하여 基準點의 최적위치선정에 의의를 두고있다.

1. 序 論

水平位置의 解析에 관하여서는 많은 技法이 研究開發되어 왔으나 水平位置에 가장 큰 몫을 차지하고 있는 距離測定의 精度를 높이는데 많은

어려움이 있었다. 따라서 從來는 角과 距離觀測에 依存하는 3角測量方法으로 수평위치를 결정하였으나 전자파거리측정기의 출현으로 거리관측의 정도가 향상됨에 따라 거리측정만하여 水平位置決定을 할 수 있는 3邊測量的 研究가 本格化되기에 이르렀다⁽¹⁾.

3邊測量에 의한 網調整은 條件方程式에 의한 方法과 觀測方程式에 의한 方法이 있는데 종래

*正會員·延世大學校 工科大学 教授, 土木工學科

**延世大學校 産業技術研究所 研究員

***延世大學校 工科大学 土木工學科 博士課程

****正會員·釜山水產大學 專任講師, 海洋工學科

는 條件方程式에 의한 方法을 사용하였으나 최근 컴퓨터의 발달로 많은 계산량을 필요로 하는 觀測方程式에 의한 網調整이 가능하게 되었다^(2,3). 따라서 본 연구에서는 最大基線 100 m, 最小基線 10 m로 기선길이를 설정한 4邊型網中心에서 대칭형으로 設定한 觀測모형을 Kern DM 102 광거리측정기를 이용하여 20회 반복 측정해서 거리측량을 하였고 여기서 얻은 Data를 전산처리하여 얻어진 결과들을 비교분석 하였다.

2. 3邊測量의 解析理論

測地網調整은 조건방정식에 의한 조정과 관측 방정식에 의한 조정이 있으며 관측방정식에 의한 網調整은 조건방정식에 의한 網調整보다 많은 方程式을 처리해야 한다⁽⁴⁾. 따라서 간단한 계산에만 의존했던 과거에는 이용되지 못하였으나 최근에 컴퓨터의 발달로 관측방정식에 의한 調整이 널리 이용되고 있다^(5,6).

2.1 方向補正

測點 i 로부터 測點 j 의 座標面上에서 觀測方向角을 t_{ij} , 測點 i 로부터 測點 j 의 球面上에서 觀測方向角을 T_{ij} 라하면

$$t_{12} = T_{12} + (t_{12} - T_{12}) \quad \text{또는} \quad t_{12} = T_{12} - (T_{12} - t_{12})$$

$$t_{21} = T_{21} + (t_{21} - T_{21}) \quad \text{또는} \quad t_{21} = T_{21} - (T_{21} - t_{21})$$

이며 $(t_{12} - T_{12})$, $(t_{21} - T_{21})$, $(T_{12} - t_{12})$ 및 $(T_{21} - t_{21})$ 은 다음식으로 계산한다.

$$(t_{12} - T_{12})'' = -\frac{e''}{4R_0^3 m_0^3} (y_1' + y_2') (x_2' - x_1') + \frac{e''}{12R_0^3 m_0^3} (x_2' - x_1') (y_2' - y_1') \quad (1)$$

$$(t_{21} - T_{21})'' = \frac{e''}{4R_0^3 m_0^3} (y_1' + y_2') (x_2' - x_1') + \frac{e''}{12R_0^3 m_0^3} (x_2' - x_1') (y_2' - y_1') \quad (2)$$

$$(T_{12} - t_{12})'' = \frac{e''}{6R_1^3 m_0^3} (x_2' - x_1') (2y_1' + y_2') - \frac{e''}{3R_1^3 m_0^3} \eta^2 t (x_2' - x_1')^2 (y_1' + y_2') + \frac{e''}{6R_1^3 m_0^3} \eta^2 t (y_2' - y_1') (3y_1'^2 + 2y_1' y_2' + y_2'^2) \quad (3)$$

$$(T_{21} - t_{21})'' = -\frac{e''}{6R_1^3 m_0^3} (x_2' - x_1')$$

$$(y_1' + 2y_2') + \frac{e''}{3R_1^3 m_0^3} \eta^2 t (x_2' - x_1')^2$$

$$(y_1' + 3y_2') - \frac{e''}{6R_1^3 m_0^3} \eta^2 t (y_2' - y_1')$$

$$(y_1'^2 + 2y_1' y_2' + 3y_2'^2) \quad (4)$$

여기서

R_1 : 平均曲率半徑, $t = \tan \varphi_1$ (φ_1 : 偏心角)

$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_1$, e' : 第2離心率

R_0 : 座標系原點의 平均曲率半徑

m_0 : 0.9999

x_i', y_i' : 測點 i 의 x, y 의 近似座標

2.2 距離補正

測點 i 로부터 測點 j 의 座標面上에서 測定距離를 s_{ij} , 測點 i 로부터 測點 j 의 球面上에서 測定距離를 S_{ij} 라하면

$$s_{12} = S_{12} \left(\frac{s}{S} \right)_{12} \quad \text{또는} \quad S_{12} = s_{12} \left(\frac{S}{s} \right)_{12}$$

이며 $\left(\frac{s}{S} \right)_{12}$ 및 $\left(\frac{S}{s} \right)_{12}$ 는 다음식으로 계산한다

$$\left(\frac{s}{S} \right)_{12} = m_0 \left[1 + \frac{1}{6R_0^2 m_0^2} (y_1'^2 + y_1' y_2' + y_2'^2) \right] \quad (5)$$

$$\left(\frac{S}{s} \right)_{12} = m_0 \left[1 - \frac{1}{6R_1^2 m_0^2} (y_1'^2 + y_1' y_2' + y_2'^2) + \frac{\eta^2 t}{6R_1^2 m_0^2} (x_2' - x_1') (y_1'^2 + 2y_1' y_2' + 3y_2'^2) \right] \quad (6)$$

2.3 觀測方程式

觀測方程式에서는 距離, 方向角 및 方位角에 대한 사항을 고려하여야 한다.

1) 距離의 觀測方程式

$$v_{(s_{12})} = \frac{v_s}{S_{12}'} \cdot e'' = -b_{12} \Delta x_1 - a_{12} \Delta y_1 + b_{12} \Delta x_2 + a_{12} \Delta y_2 - \frac{S_{12} - S_{12}'}{S_{12}'} e'' \quad (7)$$

2) 方向角의 觀測方程式

$$v_{(t_{12})} = -\Delta x_1 + a_{12} \Delta x_1 - b_{12} \Delta y_1 - a_{12} \Delta x_2 + b_{12} \Delta y_2 - l_{12} \quad (8)$$

3) 方位角의 觀測方程式

$$v_{(a_{12})} = a_{12} \Delta x_1 - b_{12} \Delta y_1 - a_{12} \Delta x_2 + b_{12} \Delta y_2 - m_{12} \quad (9)$$

여기서,

$$S_{12}' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$

$$t_{12}' = \tan^{-1} \left(\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \right)$$

$$l_{12} = z_1' + U_{12} - t_{12}', \quad m_{12} = A_{12} + \gamma + (t_{12} - T_{12}) - t_{12}'$$

$$a_{12} = \frac{y_2' - y_1'}{S_{12}'^2} e'', \quad b_{12} = \frac{x_2' - x_1'}{S_{12}'^2} e''$$

$$x_1 = x_1' + \Delta x_1, \quad y_1 = y_1' + \Delta y_1,$$

$$x_2 = x_2' + \Delta x_2, \quad y_2 = y_2' + \Delta y_2$$

x_i, y_i : 測點 i 의 x, y 좌표 (최확값)

x_i', y_i' : 測點 i 의 x, y 좌표 (근사값)

$\Delta x_i, \Delta y_i$: 測點 i 의 x, y 좌표 (보정값)

Δz_1 : 標定誤差

z_1' : 測點 1 과 零方向의 근사좌표로부터 구한 方向角

U_{12} : 測點 1 에서 관측한 零方向과 測點 2 의 x, y 좌표면상의 夾角

A_{12} : 測點 1 로부터 測點 2 의 測地方位角

γ : 測點 1 의 子午線 收差角

(7)式, (8)式, (9)式을 이용하여 線型觀測方程式을 형성하여 matrix 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$DQ = K + V \quad (10)$$

여기서,

D 는 미지수의 계수 matrix

Q 는 미지보정값 dX_u, dY_u matrix

K 는 상수 matrix,

즉(측정길이-초기근사 좌표값)

V 는 測定한 길이의 잔차

$$D = \begin{pmatrix} (y_B - y_A)/AB & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (y_C - y_A)/AC & (x_C - x_A)/AC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (y_D - y_A)/AD & (x_D - x_A)/AD \\ (y_B - y_C)/BC & (y_C - y_B)/BC & (x_C - x_B)/BC & 0 & 0 \\ (y_B - y_C)/BD & 0 & 0 & (y_D - y_B)/BD & (x_D - x_B)/BD \\ 0 & (y_C - y_D)/CD & (x_C - x_D)/CD & (y_D - y_C)/CD & (x_D - x_C)/CD \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} AB - (AB)_0 \\ AC - (AC)_0 \\ AD - (AD)_0 \\ BC - (BC)_0 \\ BD - (BD)_0 \\ CD - (CD)_0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} d_{yB} \\ d_{yC} \\ d_{xC} \\ d_{yD} \\ d_{xD} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{AB} \\ V_{AC} \\ V_{AD} \\ V_{BC} \\ V_{BD} \\ V_{CD} \end{pmatrix}$$

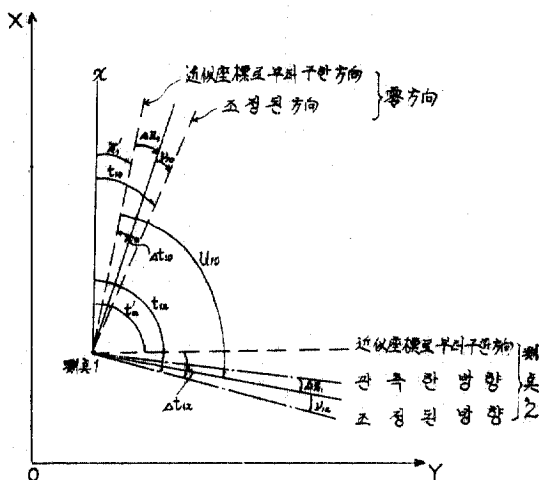


그림 2-1. 方向角補正

위의 (10)式을 구성하고 있는 matrix D, K, Q, V 를 형성하는 방법에 따라 假想座標系에 의한 方法과 Tangent 方法이 있다.

2.3.1 假想座標系에 의한 方法

본 기법은 假想座標系에서 y 축은 임의의 기선축으로 설정한다. 따라서 이 축방향의 dx 는 零이 된다.

그림 2-2에서와 같이 사변형에서 基準點 A 와 座標 X_A, Y_A 와 기선 AB 의 方向을 고정하여 조정할때 X, Y 座標系가 地上座標系가 된다.

A 의 座標가 고정이므로 d_{xA}, d_{yA} 는 零이 된다. AB 선이 y 축이므로 B 점에서 x 의 이동이 없으

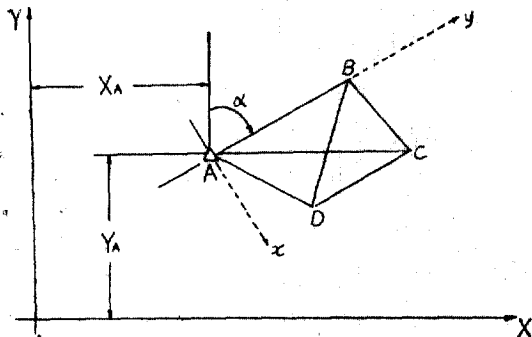


그림 2-2. 假想座標系

므로 $d_{x,B}$ 는 零이 된다. 조정은 이 가상좌표계에
서 이루어지며 조정 後 좌표들은 X, Y 座標系로
변화된다⁽⁷⁾.

2. 3. 2 Tangent 方法

그림 2-3에서와 같이 IJ 선의 方向을 고정하
면 조정에 의한 J 의 위치는 IJ 선상에서 이동하
여야 한다. 그림 2-3에서 J 점이 조정후 J' 로 이
동되었다면 IJ 의 방위각과 dX_J, dY_J 의 관계는
다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$dX_J = dY_J \tan \alpha \quad (11)$$

이 方法은 假想座標軸을 이용하지 않고 X, Y

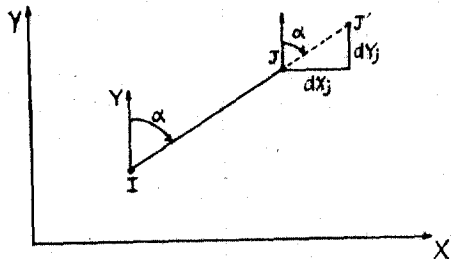


그림 2-3. Tangent 方法

座標系에서 直接조정을 한다는 長點이 있다⁽⁸⁾.

그림 2-3에서 觀測된 거리 IJ 에 대해서 다
음과 같은 觀測方程式이 형성된다.

$$K_{LAB} + V_{Lab} = \frac{X_{B_0} - X_A}{(AB)_0} dX_B + \frac{Y_{B_0} - Y_A}{(AB)_0} dY_B \quad (12)$$

$$dX_B = dY_B \tan \alpha \quad (13)$$

(13)式을 (12)式에 代入하면

$$K_{LAB} + V_{LAC} = \frac{(X_{B_0} - X_A) \tan \alpha + Y_{B_0} - Y_A}{(AB)_0} dY_B \quad (14)$$

이며 그림 2-2에서 線 BC 와 BD 에 대한 觀
測方程式의 dY_B 의 係數를 決定한다. 線 AB 를
고정하는 tangent 方法을 使用하여 그림 2-3
과 같은 網을 조정할 때 matrix의 計算方法은
다음과 같이 처리한다.

$$D = \begin{pmatrix} [(X_B - X_A) \tan \alpha + Y_B - Y_A] / AB & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (Y_C - Y_A) / AC & (X_C - X_A) / AC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Y_D - Y_A) / AD & (X_D - X_A) / AD \\ [(X_B - X_C) \tan \alpha + Y_B - Y_C] / BC & (Y_C - Y_B) / BC & (X_C - X_B) / BC & 0 & 0 \\ [(X_B - X_D) \tan \alpha + Y_B - Y_D] / BC & 0 & 0 & (Y_D - Y_B) / BD & (X_D - X_B) / BD \\ 0 & (Y_C - Y_D) / CD & (X_C - X_D) / CD & (Y_D - Y_C) / CD & (Y_D - Y_C) / CD \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} AB - (AB)_0 \\ AC - (AC)_0 \\ AD - (AD)_0 \\ BC - (BC)_0 \\ BD - (BD)_0 \\ CD - (CD)_0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} dY_B \\ dY_C \\ dX_C \\ dY_D \\ dX_D \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{AB} \\ V_{AC} \\ V_{AD} \\ V_{BC} \\ V_{BD} \\ V_{CD} \end{pmatrix}$$

표 3-2. 觀測 값

(단위 : m)

선 명	거 리	선 명	거 리
JA	55.909	LA	55.904
JB	49.999	LB	50.000
JC	51.004	LC	50.988
JD	53.870	LD	53.860
JE	55.917	LE	55.915
JF	58.320	LF	58.320
JG	64.030	LG	64.036
JH	70.713	LH	70.716
JI	90.141	LI	90.147
KA	90.134	LM	50.008
KB	70.711	MA	90.139
KC	64.033	MB	70.712
KD	58.308	MC	64.039
KE	55.901	MD	58.315
KF	53.852	ME	55.908
KG	50.990	MF	53.864
KH	50.001	MG	51.007
KJ	50.002	MH	50.015
KL	111.802	MI	55.902
		MJ	111.814

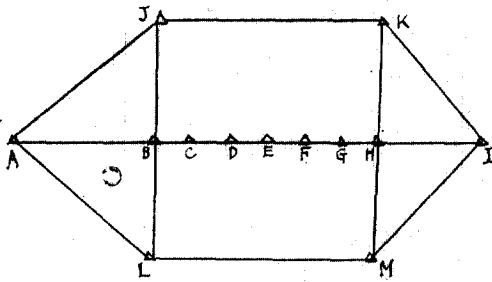


그림 3-1. 實測略圖

표 3-1. 基準點의 座標

(단위 : m)

地 點	X	Y
A	50.004	100.000
B	75.004	100.000
C	85.000	100.000
D	95.002	100.000
E	100.000	100.000
F	104.998	100.000
G	114.995	100.000
H	124.998	100.000
I	149.999	100.000

3. 觀測 및 結果分析

觀測은 最大基線 100m, 最小基線 10m 로 基線長이를 4 邊形中心에서 대칭으로 設定하였으 며 距離測量은 Kern DM 102 光波距離測定機를 利用하여 20 回반복 측정하였다. 角測量은 WILD T₂ 1" 讀 태오도라이트를 사용했다 觀測圖와 基準點座標 및 觀測값이 그림 3-1, 표 3-1, 표 3-2

에 나타나 있다.

3.1 幾何學的 條件變化에 따른 位置誤差

3.1.1 基線이 10m 인 경우

基線을 10m 로하여 기하학적인 조건을 변화시 켤때 기선이 DF 인 경우가 $13.0439 \times 10^{-3}m$ 의 위 치오차를 나타냈으며 중앙에서 편위된 BC 와 CD, FG 는 $37.7704 \times 10^{-3}m$, $26.6281 \times 10^{-3}m$, $25.8375 \times 10^{-3}m$ 를 나타냈다. 따라서 4 邊形이

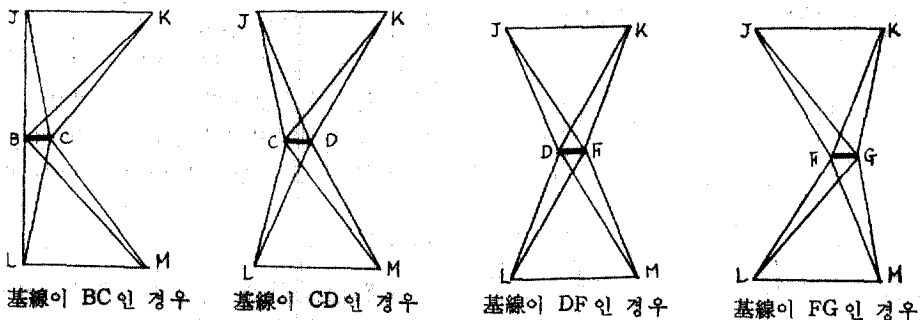


그림 3-2. 基線이 10m 인 경우

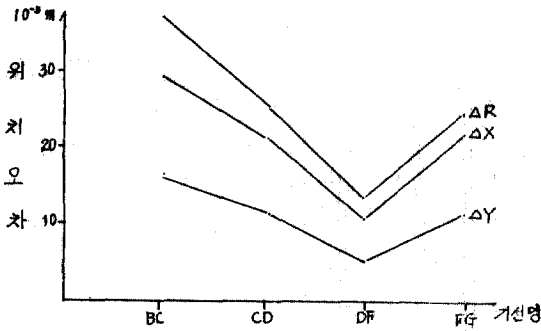


그림 3-3. 基線이 10 m 일 때 位置誤差

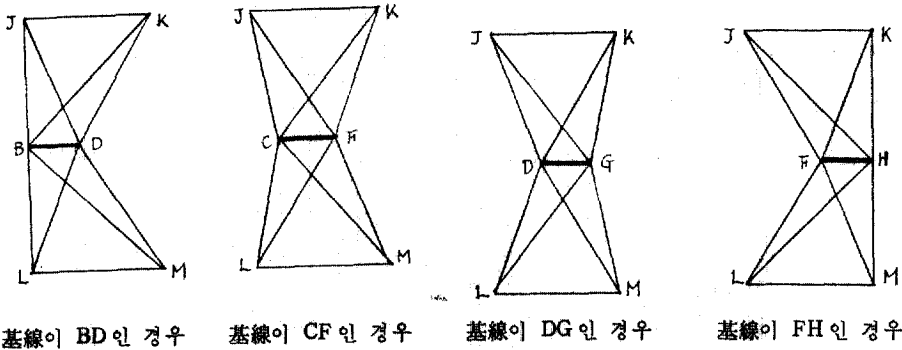
대칭이 되어 등변사다리꼴이 될 때 위치오차가 가장적게 나타나고 있음을 알 수 있다.

3.1.2 基線이 20 m 인 경우

基線이 20m 인 경우 위치오차는 CF 와 DG 가 $7.07728 \times 10^{-3}m$, $10.5566 \times 10^{-3}m$, BD 와 FH 가 $21.1023 \times 10^{-3}m$, $14.7422 \times 10^{-3}m$ 로 나타났다. 기선이 20m 인 경우도 등변사다리꼴 형태에 가까운 CF 가 오차가 적게 나타나고 있다.

3.1.3 基線이 30 m 인 경우

基線이 30m 인 경우 BF 가 $12.4556 \times 10^{-3}m$, CG 가 $6.4957 \times 10^{-3}m$, DH 가 $13.5580 \times 10^{-3}m$ 로



基線이 BD 인 경우 基線이 CF 인 경우 基線이 DG 인 경우 基線이 FH 인 경우

그림 3-4. 基線이 20 m 인 경우

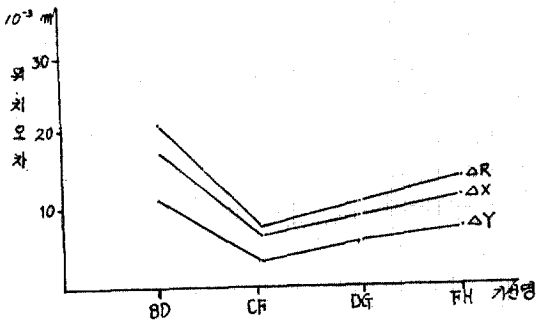


그림 3-5. 基線이 20 m 일 때 位置誤差

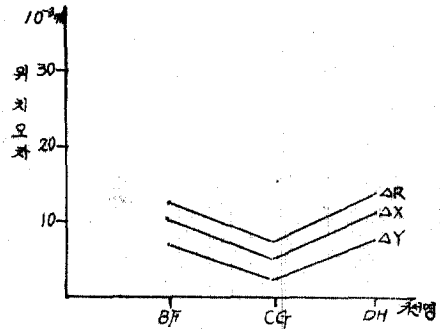


그림 3-7. 基線이 30m 일 때 位置誤差

위치오차가 발생했다. 앞의 위치오차를 圖示한 그림 3-3, 3-5, 3-7에서 보는 바와 같이 x 축방향의 위치오차가 y 축방향 위치오차보다 크게 나타나고 있으며 기선길이가 30m 로 한 경우가 20m 와 10m 로 한 경우보다 위치오차가 적게 발생하였다.

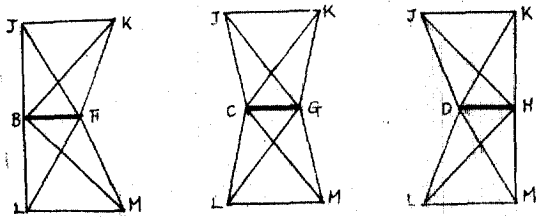


그림 3-6. 基線이 30m 인 경우

4. 結 論

3 邊測量技法을 적용한 水平位置決定에 있어서 4 邊形을 觀測모델로하여 未知點의 位置誤差

를 비교분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

① 基線을 일정하게 하고 幾何學的인 條件만을 변화시켰을 경우 等邊사다리꼴 일때가 가장 位置誤差가 적었다.

② 3邊網을 等邊사다리꼴로 하였을 경우 正4角形에 가까울 때 가장 좋은 精度를 나타내었다.

③ 4邊形에서의 位置誤差는 基線軸方向의 誤差가 基線直角方向의 誤差보다 크게 발생하고 있었다.

參 考 文 獻

1. Naguib F. Danial., "Virtual Work Adjustment of Trilateration Nets.," *Journal of the Surveying & Mapping Division*, 1971, Nov. pp.67~83.
2. Wolf, P.R., and Johnson, S.D., "Trilateration with Short Range EDM Equipment and Comparison with Triangulation", *Proceeding of A.S.C.*

M., Fall Convension, 1973, pp.62~76.

3. 澤田良修, "測量計算マニエアル", 山海堂, 1978, pp.80~89.
4. Murchison, D.E., "Surveying and Photogrammetry", Butterworths, November, 1977, pp.13~18.
5. James, R.B., "Adjusting Radial Surveying", *Journal of the Surveying & Mapping Division*, 1972, pp.157~166.
6. Dereny, E.E., Chrzanowski, I.A., "Pre-Analysis of Trilateration Nets for Engineering", *Surveying & Mapping*, 1968, pp.73~93.
7. 塚本正文, "コンピューター測量計算法", 現代理工学出版社, 1979, pp.92~140.
8. Hirvonen, R.A., "Adjustment by Least Squares in Geodesy and Photogrammetry", Frederick ungar publishing Co., New York, 1979, pp.20~58.

(接受: 1984. 8. 7)