基準點測量을 위한 데오돌라이트 觀測點의 最適位置에 관한 硏究

Study on the Optimum Positions of Theodolite Station for Control Surveying

柳 福 模*
Yeu, Bock Mo
李 在 璣**
Lee, Jae Ki
朴 弘 祺***
Park, Hong Gi

Abstract

This paper is a study on improving the accuracy of control points by suggesting angular requirements which make geometric conditions to be optimum.

For this purpose, a equation, by which the accuracy of control point coordinates measured in an arbitrary station can be estimated, is derived.

This equation is integrated and average standard error of the coordinates is computed, so that the optimum location of observatory station is determined.

In the case of triangulation, a regular triangle has been generally considered as the best geometric condition, but because the precision of each side is different, the 52.77° isosceles triangle is founded to be the best one. Also in trigonometric leveling, the geometric condition is founded to be optimum when the base angle of a isosceles triangle is 45°.

In control surveying for close-range photogrammetry the optimum relation between base length(B_0) and object distance(D_0) can be founded to be as follow; $D_0=0.357587-0.357967B_0+0.308555B_0^2$.

要 旨

本 硏究에서는 基準點測量의 幾何學的인 條件을 最適으로 하는 角條件을 제시함으로써 基準點들의 正確度를 향상시키는데 目的이 있다.

이를 위해 임의의 데오돌라이트 觀測點에서 觀測한 基準點座標의 正確度를 평가할 수 있는 式을

* 正會員・延世大學校 工科大學 敎授
** 正會員・忠北大學校 工科大學 助敎授
*** 延世大學校 大學院 博士課程

유도하고, 이를 積分하여 여러 座標들의 平均誤差를 구하였으며, 이로부터 最適의 데오돌라이트 觀測點의 位置를 決定하였다.

三角測量의 경우 一般的으로 正三角形이 最適의 幾何學的 條件인 것으로 알려져 있으나, 各 邊들의 觀測 精密度가 틀리므로 밑각이 52.77°인 이등변삼각형이 最適이었으며, 三角水準測量의 경우 45°일 때 最適이었다. 또한 近距離 寫眞測量을 위한 基準點測量時 最適基線과 對象物까지의 距離關係式은 $D_0=0.357587-0.357967B_0+0.308555B_0^2$ 임을 알 수 있었다.

1. 序 論

一般測量에 있어서 三角網內의 모든 三角點의 精密度는 一般的으로 첫째, 觀測의 精密度, 둘째, 距離角의 크기, 세째, 觀測方向의 數, 그리고 마지막으로는 기하학적인 條件數에 의해 좌우된다. 이때, 觀測의 精密度 즉 觀測角과 測線의 精密度는 使用된 기기, 方法 및 觀測者에 의해 좌우되나, 角의 크기, 觀測方向의 數 및 모든 圖形에서의 기하학적 條件數는 三角網의 形에 의해 決定되는 것이다. 美國 및 유럽에서는 圖形의 精密度를 表示하는 하나의 수단으로서 圖形의 强度(Strength of Figure)를 使用하고 있다. 三角測量에서 원하는 結果를 얻기 위해서는 計算된 한 邊의 길이變化가 허용誤差 범위 이내에 포함되어야 한다. 이런 길이변화는 角과 距離의 觀測에서 發生하는 誤差들의 오차전파에 의한 것이다.

寫眞測量의 標定단계 또는 카메라검정에서는 相互位置關係가 알려진 基準點들이 필요하며 基準點座標의 正確度는 寫眞測量의 正確度에 直接的인 영향을 미치며 結果값의 正確度를 평가하는데 매우 重要하다. 航空寫眞測量에서는 一般測量에서의 三角測量, 水準測量이 利用되고 있으며, 地上寫眞測量 특히 近距離寫眞測量에서는 基準點들의 座標를 決定하기 위해 三角水準測量(trigonometric leveling) 方法이 利用되고 있다.

三角水準測量은 두 개의 데오돌라이트를 使用하여 交會法으로 座標를 계산하는 方法으로 基線(B), 水平垂直角(α, β), 두 데오돌라이트의 기계 높이差(V)의 測定이 要求된다. 이들 觀測값에서의 誤差를 줄이기 위한 데오돌라이트 이미지(image)法이 이미 소개되었으나, 이 方法도 座標값과 그 正確度에만 關係가 있을 뿐 데오돌라이트 觀測點의 最適位置決定에 대해서는 아직 硏究가 미흡한 실정이다.

이에 本 硏究는 임의의 데오돌라이트 測點에서 수행한 基準點測量의 正確度를 평가할 수 있는 公式을 數學的으로 유도하고, 이들 基準點들의 正確度를 最大로 하기 위한 最適의 데오돌라이트 測點의 位置를 決定하는데 目的이 있다.

基準點測量의 期待正確度를 유도함에 있어 基線觀測에서의 誤差要素는 없다고 假定하고 오직 角觀測에서의 誤差만을 고려하였으며 모든 觀測에서 輕重率은 單位輕重率로 같다고 假定하였다.

2. 三角圖形의 誤差

2.1 內角을 모두 觀測한 경우

1) 角과 邊의 誤差關係

觀測角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 의 標定誤差를 $\sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_3}$ 라 하면, 內角의 합이 180° 라는 條件式에 의해 角 A, B, C 가 조정된다.

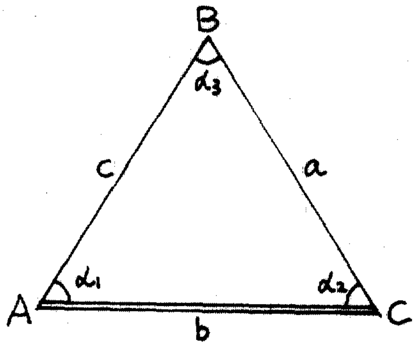

그림 1.

$$A=\alpha_1+\frac{\omega}{P_{\alpha_1}\Sigma\frac{1}{P}}$$

$$B=\alpha_3+\frac{\omega}{P_{\alpha_2}\Sigma\frac{1}{P}}$$

$$C=\alpha_2+\frac{\omega}{P_{\alpha_3}\Sigma\frac{1}{P}} \quad ①$$

여기에서 $\omega=180-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$, P는 輕重率이다.

邊의 길이 c는 다음 式으로부터 계산된다.

$$c=b\cdot\frac{\sin C}{\sin B} \quad ②$$

邊 c의 표준오차를 σ_c, 單位輕重率에 의한 표준오차를 σ_0라고 하면 誤差傳播의 法則으로부터

$$\sigma_c^2=\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha_1}\right)^2\sigma_{\alpha_1}^2+\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha_2}\right)^2\sigma_{\alpha_2}^2+\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha_3}\right)^2\sigma_{\alpha_3}^2 \quad ③$$

$$=\left(\frac{\partial c}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial c}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial\alpha_1}\right)^2\frac{\sigma_0^2}{P_{\alpha_1}}$$

$$+\left(\frac{\partial c}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial c}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial\alpha_2}\right)^2\frac{\sigma_0^2}{P_{\alpha_2}}$$

$$+\left(\frac{\partial c}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial\alpha_3}+\frac{\partial c}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial\alpha_3}\right)^2\frac{\sigma_0^2}{P_{\alpha_3}}$$

$$=\sigma_0^2c^2\frac{1}{\Sigma\frac{1}{P}}\left\{\left(\frac{1}{P_{\alpha_1}P_{\alpha_3}}+\frac{1}{P_{\alpha_2}P_{\alpha_3}}\right)\cot^2B\right.$$

$$+\left(\frac{1}{P_{\alpha_1}P_{\alpha_2}}+\frac{1}{P_{\alpha_2}P_{\alpha_3}}\right)\cot^2C$$

$$\left.+\frac{2}{P_{\alpha_2}P_{\alpha_3}}\cot B\cot C\right\}$$

輕重率 $P_{\alpha_1}=P_{\alpha_2}=P_{\alpha_3}=1$이라면

$$\sigma_c=c\sigma_0\sqrt{\frac{2}{3}(\cot^2B+\cot^2C+\cot B\cot C)} \quad ④$$

이며 邊 c의 相對誤差 U_c는

$$U_c=\frac{\sigma_c}{c}=\sigma_0\sqrt{\frac{2}{3}(\cot^2B+\cot^2C+\cot B\cot C)} \quad ⑤$$

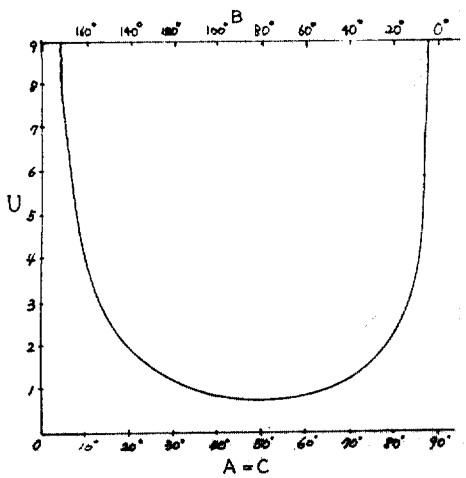

그림 2.

가 된다.

邊 a와 c에 균등하게 誤差가 일어나도록 $A=C$인 이등변삼각형을 고려할 때, 角과 邊의 誤差關係는 表-1과 같으며 이를 그림으로 나타내면 그림-2와 같다. 이때, 邊에 誤差가 가장 작게 發生하는 角條件은 $A=C=52.77°$이다.

表-1. 角과 邊의 誤差關係

角 (Deg)		邊의 相對誤差
$A=C$	B	
5	170	8.0823264 σ_0
10	160	4.0108479 σ_0
15	150	2.6412247 σ_0
20	140	1.94843402 σ_0
25	130	1.52829822 σ_0
30	120	1.24721913 σ_0
35	110	1.04953250 σ_0
40	100	0.90966277 σ_0
45	90	0.81649658 σ_0
50	80	0.76730494 σ_0
55	70	0.764905062 σ_0
60	60	0.81649658 σ_0
65	50	0.93552467 σ_0
70	40	1.15080082 σ_0
75	30	1.53533892 σ_0
80	20	2.31864584 σ_0
85	10	4.66670938 σ_0

2) 角과 높이와의 關係

內角의 조정값은 1)의 경우와 같으며, 높이 h는

$$h=b\cdot\frac{\sin A\cdot\sin C}{\sin B} \quad ⑥$$

로부터 계산된다.

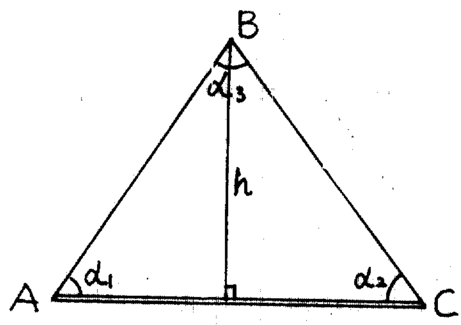

그림 3.

따라서, h의 標準誤差를 ③式과 同一한 方法으로 구하면

$$\sigma_h=\sigma_0\cdot h\sqrt{\frac{1}{3}\{(\cot A-\cot C)^2+(\cot A+\cot B)^2+(\cot B+\cot C)^2}\qquad ⑦$$

이며, h의 相對誤差 U_h는

$$U_h=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{3}\{(\cot A-\cot C)^2+(\cot A+\cot B)^2+(\cot B+\cot C)^2\}}\qquad ⑧$$

이 된다.

$A=C$인 이등변삼각형을 고려하면

$$U_h=\sigma_0\sqrt{\frac{2}{3}(\cot A+\cot B)^2}\qquad ⑨$$

이므로, 이때 角과 높이와의 誤差關係는 表-2, 그림-4와 같으며, 最小값은 이등변의 한 각이 45°일 때이다.

表 2. 角과 높이의 誤差關係

角 (Deg)		높이의 相對誤差
$A=C$	B	
5	170	4.7020164 σ_0
10	160	2.3872763 σ_0
15	150	1.6329932 σ_0
20	140	1.2702432 σ_0
25	130	1.0658606 σ_0
30	120	0.9428090 σ_0
35	110	0.8688975 σ_0
40	100	0.8290924 σ_0
45	90	0.8164966 σ_0
50	80	0.8290924 σ_0
55	70	0.8688975 σ_0
60	60	0.9428090 σ_0
65	50	1.0658606 σ_0
70	40	1.2702432 σ_0
75	30	1.6329932 σ_0
80	20	2.3872763 σ_0
85	10	4.7020164 σ_0

2.2 基線에 연한 두 角 (α_1, α_2)만을 觀測한 경우

그림-1에서 三角形의 밑각 α_1, α_2만을 觀測한 경우, 邊 c의 길이는 다음 식으로부터 계산된다.

$$c=b\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\qquad ⑩$$

邊길이 c의 標準誤差를 σ_c라 하면

$$\sigma_c^2=\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha_1}\right)^2\sigma_{\alpha_1}^2+\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha_2}\right)^2\sigma_{\alpha_2}^2\qquad ⑪$$

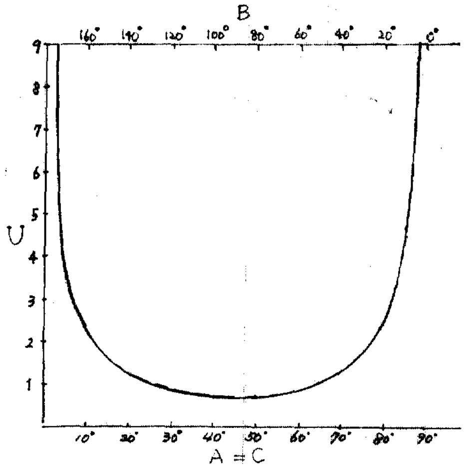

그림 4.

$$=\left\{b\cdot\frac{(-\sin\alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)}\right\}^2\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{P_{\alpha_1}}}\right)^2$$

$$+\left\{b\cdot\frac{\cos\alpha_2\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2)-\sin\alpha_2\quad\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)}\right\}^2\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{P_{\alpha_2}}}\right)$$

$$=\sigma_0^2c^2\left\{\frac{1}{P_2}\cot^2\alpha_2-\frac{2}{P_2}\cot\alpha_2\cdot\cot(\alpha_1+\alpha_2)+\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}\right)\cot^2(\alpha_1+\alpha_2)\right\}$$

마일, $P_1=P_2=1$이라면

$$\sigma_c=\sigma_0\cdot c\sqrt{\cot^2\alpha_2-2\cot\alpha_2\cdot\cot(\alpha_1+\alpha_2)+2\cot^2(\alpha_1+\alpha_2)}\qquad ⑫$$

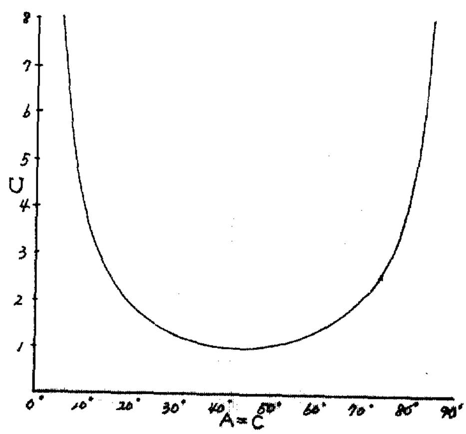

그림 5.

表 3. 角과 邊의 誤差關係

角 (Deg) $A=C$	邊 c의 相對誤差
5	8.0825043 σ_0
10	4.0121396 σ_0
15	2.6457513 σ_0
20	1.9597330 σ_0
25	1.5528300 σ_0
30	1.2909945 σ_0
35	1.1246994 σ_0
40	1.0306223 σ_0
45	1.0000000 σ_0
50	1.0306223 σ_0
55	1.1246994 σ_0
60	1.2909945 σ_0
65	1.5518300 σ_0
70	1.9597330 σ_0
75	2.6457513 σ_0
80	4.0121396 σ_0
85	8.0825043 σ_0

이 되며, 이때 邊 c의 相對誤差 U_c는

$$U_c=\frac{\sigma_c}{c}=\sigma_0\sqrt{\cot^2\alpha_2-2\cot\alpha_0\cdot\cot(\alpha_1+\alpha_2)+2\cot^2(\alpha_1+\alpha_2)} \quad ⑬$$

이 된다.

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$인 이등변삼각형을 고려한다면

$$U_c=\sigma_0\sqrt{\cot^2\alpha-2\cot\alpha\cdot\cot(2\alpha)+2\cot^2(2\alpha)}$$
$$=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{2}(\cot^2\alpha+\tan^2\alpha)} \quad ⑭$$

이므로, 이때 角과 邊의 誤差關係는 表-3, 그림-5와 같으며, 邊길이의 相對誤差가 가장 적은 이등변삼각형의 條件은 角이 45°일 때 임을 알 수 있다.

3. 三角水準測量에서의 座標誤差

3.1 三角水準測量의 公式

座標軸은 X軸을 基線方向, Y軸을 光軸方向(撮影距離), Z軸을 鉛直方向으로 하며 原點은 왼쪽 데오돌라이트 觀測點으로 한다.

基準點 i의 座標 X_i, Y_i, Z_i는 데오돌라이트 角觀測(α_1, α_2, β_1, β_2)과 길이觀測(B, V)로부터 계산된다.

$$\left.\begin{aligned} X_i&=Y_i\cdot\cot\alpha_1 \\ X_i-B&=-Y_i\cdot\cot\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad ⑮$$

이므로

$$X_i=\frac{B\cdot\cot\alpha_1}{\cot\alpha_1+\cot\alpha_2} \quad ⑯$$

$$Y_i=\frac{B}{\cot\alpha_1+\cot\alpha_2} \quad ⑰$$

이 되며,

$$\left.\begin{aligned} Z_i&=Y_i\cdot\mathrm{cosec}\,\alpha_1\cdot\tan\beta_1 \\ Z_i-V&=Y_i\mathrm{cosec}\,\alpha_2\cdot\tan\beta_2 \end{aligned}\right\} \quad ⑱$$

이므로

$$Z_i=0.5\,Y_i(\mathrm{cosec}\,\alpha_1\cdot\tan\beta_1+\mathrm{cosec}\,\alpha_2\cdot\tan\beta_2)+0.5\,V \quad ⑲$$

가 된다.

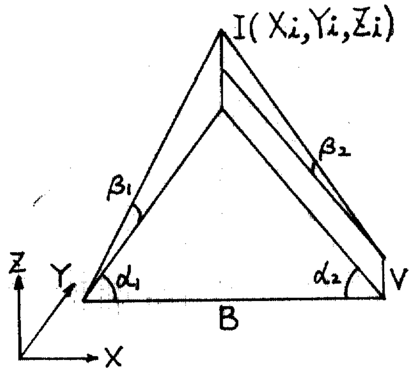

그림 6.

3.2 座標값의 標準誤差

데오돌라이트 觀測에서의 誤差要素 σ_{α_1}, σ_{α_2}, σ_{β_1}, σ_{β_2}로 各 座標들의 標準誤差를 계산하기 위해 誤差傳播法則

$$\sigma^2=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)^2\sigma_{\alpha_1}^{\ 2}+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2\sigma_{\alpha_2}^{\ 2}+\left(\frac{\partial}{\partial\beta_1}\right)^2\sigma_{\beta_1}^{\ 2}+\left(\frac{\partial}{\partial\beta_2}\right)^2\sigma_{\beta_2}^{\ 2} \quad ⑳$$

에 適用시키고, 水平角 및 垂直角 觀測에서의 誤差가 같다면, 즉 $\sigma_{\alpha_1}=\sigma_{\alpha_2}=\sigma_\alpha$, $\sigma_{\beta_1}=\sigma_{\beta_2}=\sigma_\beta$이라면,

$$\sigma^2_{X_i}=\frac{B^2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^4}[\{(-\mathrm{cosec}^2\alpha_1)(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)+\cot\alpha_1\mathrm{cosec}^2\alpha_1\}^2\sigma^2_{\alpha_1}+\{(-\cot\alpha_1)(-\mathrm{cosec}^2\alpha_2)\}^2\sigma^2_{\alpha_2}]$$
$$=\frac{B^2\cdot\sigma_\alpha^2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^4}(\mathrm{cosec}^4\alpha_1\cot^2\alpha_2+\cot^2\alpha_1\mathrm{cosec}^4\alpha_2) \quad ㉑$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2_{Y_i}&=\frac{B^2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^4}\\&\quad(+\mathrm{cosec}^4\alpha_1\sigma^2_{\alpha_1}+\mathrm{cosec}^4\alpha_2\sigma^2_{\alpha_2})\\&=\frac{B^2\sigma_\alpha{}^2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^4}\\&\quad(\mathrm{cosec}^4\alpha_1+\mathrm{cosec}^4\alpha_2)\end{aligned}\right\} \quad ㉒$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{Z_i}&=\frac{(0.5B)^2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^4}[\{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)\tan\beta_1\\&\quad(-\mathrm{cosec}\alpha_1\cdot\cot\alpha_1)-\left(\frac{\tan\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\tan\beta_2}{\sin\alpha_2}\right)\\&\quad(-\mathrm{cosec}^2\alpha_1)\}^2\sigma^2_{\alpha_1}+\{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)\tan\beta_2\\&\quad(-\mathrm{cosec}\alpha_2\cdot\cot\alpha_2)-\left(\frac{\tan\beta_1}{\sin\alpha_1}+\frac{\tan\beta_2}{\sin\alpha_2}\right)\\&\quad(-\mathrm{cosec}^2\alpha_2\}^2\sigma^2_{\alpha_2}]+\frac{(0.5B)^2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^2}\\&\quad\left\{\left(\frac{\sec^2\beta_1}{\sin\alpha_1}\right)^2\sigma^2_{\beta_1}+\left(\frac{\sec^2\beta_2}{\sin\alpha_2}\right)^2\sigma^2_{\beta_2}\right\}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{(0.5B)^2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^2}\{(-\mathrm{cosec}^2\alpha_1\\&\quad\tan^2\beta_1\cot^2\alpha_1-\mathrm{cosec}^2\alpha_2\tan^2\beta_2\\&\quad\cot^2\alpha_2)\sigma_\alpha{}^2+(\mathrm{cosec}^2\alpha_1\sec^4\beta_1\\&\quad+\mathrm{cosec}^2\alpha_2\sec^4\beta_2)\sigma_\beta{}^2\}\end{aligned}\right\} \quad ㉓$$

$$+\frac{(0.5B)^2(\mathrm{cosec}\alpha_1\tan\beta_1+\mathrm{cosec}\alpha_2\tan\beta_2)^2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^4}(\mathrm{cosec}^4\alpha_1+\mathrm{cosec}^4\alpha_2)\sigma_{\alpha_2}{}^2$$

이 된다.

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 인 이등변삼각형을 고려하여 X_i Y_i 의 相對誤差 $U_{X_i}(\sigma_{X_i}/X_i)$, $U_{Y_i}(\sigma_{Y_i}/Y_i)$를 구하면

$$\sigma_{X_i}=\frac{B\cot\alpha_1\cdot\sigma_\alpha}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)}\sqrt{\frac{\tan^2\alpha_1\mathrm{cosec}^4\alpha_1\cot^2\alpha_2+\mathrm{cosec}^4\alpha_2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^2}}$$

$$=X_i\sigma_\alpha\sqrt{\frac{1}{2}\sec^2\alpha\cdot\mathrm{cosec}^2\alpha} \quad ㉔$$

$$U_{X_i}=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{2}\sec^2\alpha\cdot\mathrm{cosec}^2\alpha}$$

$$\sigma_{Y_i}=\frac{B\sigma_\alpha}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)}\sqrt{\frac{\mathrm{cosec}^4\alpha_1+\mathrm{cosec}^4\alpha_2}{(\cot\alpha_1+\cot\alpha_2)^2}}$$

$$=Y_i\sigma_\alpha\sqrt{\frac{1}{2}\sec^2\alpha\cdot\mathrm{cosec}^2\alpha} \quad ㉕$$

$$U_{Y_i}=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{2}\sec^2\alpha\cdot\mathrm{cosec}^2\alpha}$$

그러므로

$$U_{X_i}=U_{Y_i}=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{2}\sec^2\alpha\cdot\mathrm{cosec}^2\alpha} \quad ㉖$$

이 된다. 따라서, 이등변삼각형일 때 平面座標의 相對誤差 分布는 表-4, 그림-7 과 같으며, X_i, Y_i 의 誤差를 最小로 하는 α 角은 45° 이다.

表 4. 角과 平面座標의 誤差關係

角 (Deg) $A=C$	$U_{X_i}=U_{Y_i}$
5	8.14413132 σ_0
10	4.13488384 σ_0
15	2.82842712 σ_0
20	2.20012274 σ_0
25	1.84612469 σ_0
30	1.63299316 σ_0
35	1.50497464 σ_0
40	1.43603009 σ_0
45	1.41421356 σ_0
50	1.43603009 σ_0
55	1.50497464 σ_0
60	1.63299316 σ_0
65	1.84612469 σ_0
70	2.20012274 σ_0
75	2.82842712 σ_0
80	4.13488384 σ_0
85	8.14413132 σ_0

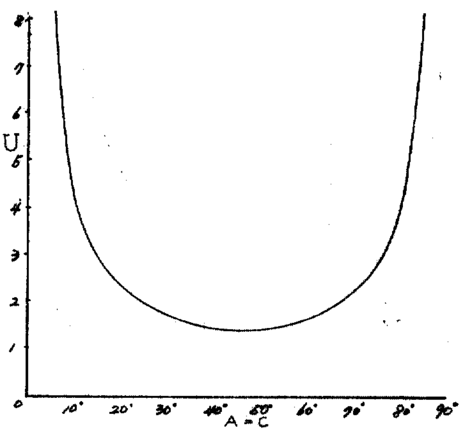

그림 7.

3.3 對象物 空間의 平均誤差

平面上에 位置한 모든 基準點들의 平均誤差는 $\sigma_{X_i}{}^2$, $\sigma_{Y_i}{}^2$, $\sigma_{Z_i}{}^2$ 을 모든 點들로 積分함으로써 얻을 수 있다.

㉑, ㉒, ㉓ 식에 포함된 α_1, α_2, β_1, β_2 項을 直交座標 X_i, Y_i, Z_i 로 치환하여 간단히 나타내면

$$\sigma_{X_i}{}^2=\frac{\sigma_\alpha{}^2}{B^2Y_i{}^2}\{2X_i{}^6-6BX_i+(7B^2+4Y_i{}^2)X_i{}^4$$
$$-(4B^3+8BY_i{}^2)X_i{}^3+(B^4+4B^2Y_i{}^2$$

$$+Y_i^4)X_i^2-2BY_i^4X_i+B^2Y_i^4\} \qquad ㉗$$

$$\sigma_{Y_i}^2=\frac{\sigma_\alpha^2}{B^2}\{2X_i^4-4BX_i^3+(6B^2+4Y_i^2)X_i^2-(4B^3+4BY_i^2)X_i+(B^4+2B^2Y_i^2+2Y_i^4)\} \qquad ㉘$$

$$\sigma_{Z_i}^2=\Big[\Big\{\frac{0.25Z_i^2}{Y_i^2}+\frac{0.25(Z_i-V)^2}{Y_i^2}+\frac{2(Z_i-0.5V)^2}{B^2}\Big\}X_i^2+\Big\{-2B(Z_i-V)^2-\frac{2(Z_i-0.5V)^2}{B}\Big\}X_i+B^2(Z_i-V)^2+\frac{(Z_i-0.5V)^2(2Y_i^2+B^2)}{B^2}\Big]\sigma_\alpha^2$$
$$+\frac{1}{(X_i-B)+Y_i^2}\Big[X_i^4-4BX_i^3+\{6B^2+2(Z_i-V)^2+2Y_i^2\}X_i^2-\{4B^3+4B(Z_i-V)^2+4BY_i^2\}X_i+\{B^2+(Z_i-V)^2+Y^2\}^2\Big]\alpha_\beta^2 \qquad ㉙$$

이 된다.

데오돌라이트의 基線(B)이 對象物의 平面과 平行하고 데오돌라이트 觀測點이 平面에 대칭으로 이루어져 있다면, 基準點들의 Y座標는 撮影距離 D와 같으므로 帶數로 處理할 수 있다. X의 座標는 對象物의 幅을 L이라 할 때 $-0.5L+0.5B$에서 $0.5L+0.5B$의 범위에 있으며, Z座標의 범위는 $-I_h$에서 $H-I_h$까지이다. 단, I_h는 기계고이고 H는 對象物의 높이이다. 따라서 X, Z의 범위에 대해 積分하면 對象物空間 全體에 대한 平均誤差 σ_X^2, σ_Y^2, σ_Z^2이 계산된다.

$$\sigma_X^2=\int_{-0.5L+0.5B}^{0.5L+0.5B}\sigma_{X_i}^2 \qquad \sigma_Y^2=\int_{-0.5L+0.5B}^{0.5L+0.5B}\sigma_{Y_i}^2$$
$$\sigma_Z^2=\int_{-I_h}^{H-I_h}\int_{-0.5L+0.5B}^{0.5L+0.5B}\sigma_{Z_i}^2 \qquad ㉚$$

4. 地上寫眞測量을 위한 觀測點의 最適條件

寫眞測量에서 絶對座標의 誤差는 撮影距離方向으로 가장 크게 나타나므로, 基準點 測量時 撮影距離方向과 基線方向의 誤差가 同時에 最小가 되도록 고려하여야 한다.

σ_X^2과 σ_Y^2이 같으며 最小가 되는 基線 B의 最適값 B_0와 對象物과 基線과의 간격 D의 最適값 D_0를 구하기 위해 ㉚式에서 σ_X^2과 σ_Y^2를 구하면

$$\sigma_X^2=\frac{\sigma_\alpha^2}{B^2D^2}\{0.03125LB^6+(-0.010417L^3+0.25D^2L)B^4+(0.00625L^5-0.166667D^2L^3+0.25D^4L)B^2+(0.004464L^7+0.05D^2L^5+0.083333D^4L^3)\} \qquad ㉛$$

$$\sigma_Y^2=\frac{\sigma_\alpha^2}{B^2}\Big\{0.125L\cdot B^4+(0.25L^3+D^2L)B^2+(0.025L^5+\frac{1}{3}D^2L^3+2D^4L)\Big\} \qquad ㉜$$

이 된다. $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$이면

表 5. 最適 B_0와 D_0의 關係

B_0	D_0
$0.1L$	$0.34L$
$0.2L$	$0.32L$
$0.3L$	$0.29L$
$0.4L$	$0.26L$
$0.5L$	$0.23L$
$0.6L$	$0.22L$
$0.7L$	$0.21L$
$0.8L$	$0.22L$
$0.9L$	$0.25L$
$1.0L$	$0.29L$
$1.1L$	$0.33L$
$1.2L$	$0.38L$
$1.3L$	$0.44L$
$1.4L$	$0.49L$
$1.5L$	$0.55L$
$1.6L$	$0.60L$
$1.7L$	$0.66L$
$1.8L$	$0.71L$
$1.9L$	$0.76L$
$2.0L$	$0.82L$

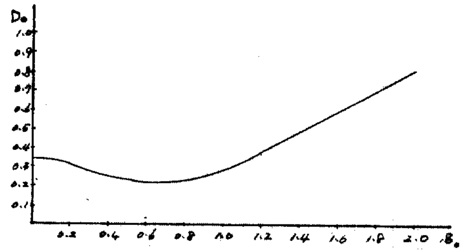

그림 8.

$$0.03125LB^6+(-0.010417L^3+0.125D^2L)B^4$$
$$+(0.00625L^5-0.4166667D^2L^3-0.75D^4L)B^2$$
$$+(0.004464L^7+0.025D^2L^5-0.25D^4L^3$$
$$-2D^6L)=0 \quad ㉝$$

의 條件式이 성립된다.

위 式으로부터 最小값이 되는 B와 D의 關係는 表-5와 같이 계산되며 이를 그림으로 나타내면 그림-8과 같다.

最適位置 B_0와 D_0의 關係式을 最小제곱법으로 계산하면

$$D_0=0.357587-0.357967B_0+0.308555B_0^2 \quad ㉞$$

이며 이 式의 標準偏差는 0.03114이다.

또한 基線 B가 對象物의 幅 L보다 큰 경우는 거의 直線方程式을 이루므로 이 區間을 線形回歸法으로 계산하면

$$D_0=-0.25794+0.540606B_0 \quad ㉟$$

단, $B_0>L$이다.

이며 이 式의 標準偏差는 0.0033이다.

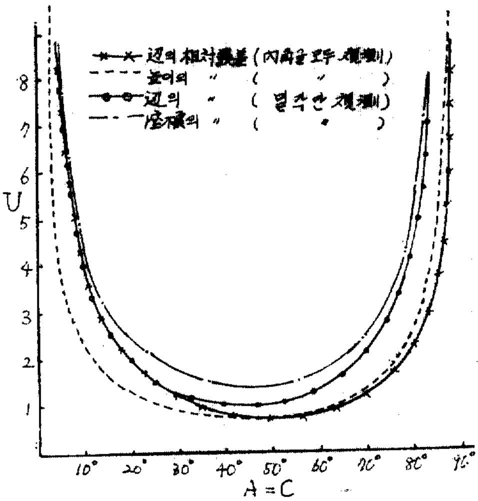

그림 9.

表 6. 相對誤差 $2\sigma_0$ 以下인 角條件

	三 角 測 量		三角水準測量
	밑 각	頂 角	밑 각
邊의 相對誤差	20°～75°	30°～140°	20°～70°
平面座標의 誤差	15°～75°	30°～150°	25°～65°

5. 基準點測量의 最適條件

一般三角測量에서 選點條件은 方向線에 의해 생기는 三角形이 가능한한 正三角形에 가까운 形態가 되도록 하며, 적어도 1角은 25°～130°의 범위에서 얻고, 부득이한 경우에도 15° 以下는 피하도록 되어 있다. 그림-2 및 그림-4에서 살펴보면 이 選點條件은 邊의 相對誤差가 약 $2\sigma_0$ 以下에 해당됨을 알 수 있다.

그림-9는 三角測量과 三角水準測量에서의 邊과 座標의 誤差關係를 比較하기 위해 그림-2, 4, 5, 7을 합친 그림이다.

그림 9에서 誤差가 $2\sigma_0$ 以下인 범위를 表로 나타내면 표-6과 같다.

이 表로부터 單三角形의 한 角이 30°～65° 범위의 幾何學的 條件을 갖는다면 誤差가 $2\sigma_0$ 以下로 모두 滿足됨을 알 수 있다.

또한 그림 9에서 偏觀測이 없는 경우(Ⅰ, Ⅱ)와 偏觀測인 경우(Ⅲ, Ⅳ)를 比較하면 한 測點에서 角을 觀測할 수 없는 偏觀測은 가능한한 三角網에서는 피해야 함을 알 수 있다.

邊의 相對誤差는 三角測量에서는 52.77°, 三角水準測量에서는 45°가 最適條件이며, 座標의 相對誤差는 두 경우 모두 45°일 때 三角形의 最適條件이 됨을 알 수 있었다. 따라서, 三角網을 이루기 위한 幾何學的 條件은 60°에 가까워야 하지만, 基準點 하나만을 觀測하는 경우 座標의 正確度는 45°일 때 가장 높일 수 있다.

近距離 寫眞測量을 위한 基準點測量에서 임의의 데오돌라이트 觀測點에서 觀測한 座標의 正確度는 本 硏究에서 유도된 式 ㉗, ㉘, ㉙로부터 계산되어진다.

全體 對象物空間의 엄밀한 平均標準誤差는 近距離 寫眞測量에서 對象物 空間이 一般的으로 平面이 아니므로, 式㉚을 다시 撮影深度에 해당하는 깊이만큼 撮影距離方向(Y)에 대해 積分하여야 하지만, 이는 매우 數學的으로 복잡하게 되므로, 基準點座標를 對象物 空間 깊이의 1/2에 位置하는 가상평면상에 投影시킴으로써 平均標準誤差를 식㉛, ㉜에서 계산할 수 있다.

式㉞와 式㉟로 나타낸 近距離 寫眞測量을 위한 基準點測量의 最適 데오돌라이트 觀測點位置

B_0와 D_0의 關係式으로부터 地形條件에 따라 B_0와 D_0중 어느 하나가 정해지면 간단히 最適 觀測點位置를 決定할 수 있다.

또한 데오돌라이트 기계고의 最適條件은 幾何學的으로 대칭이 되는 對象物 空間 높이의 1/2인 곳에 位置하여야 한다.

6. 結　論

基準點測量을 위한 最適의 데오돌라이트 觀測點位置를 決定하기 위해 基準點 座標의 正確度를 分析함으로써, 다음과 같은 結論을 얻었다.

첫째, 三角測量에서 內角을 모두 觀測한 경우, 三角形의 最適條件은 밑각이 52.77°인 이등변삼각형이었으며, 밑각만을 觀測한 경우는 45°의 이등변삼각형일 때 邊길이의 誤差가 가장 적다.

둘째, 三角水準測量에서 平面座標(X, Y)는 基線에 연한 두 角이 45°인 이등변삼각형의 條件하에서 觀測할 때 正確度는 最大가 된다.

세째, 近距離 寫眞測量을 위한 基準點測量의 最適位置는 最適基線(B_0)와 對象物과 基線의 最適距離(D_0)의 關係式은 $D_0=0.357589-0.357967B_0+0.308555B_0^2$의 二次式, 또는 $D_0=-0.25794+0.540606B_0$(단, $B_0>L$)로부터 設定할 수 있다.

參 考 文 獻

1. Richardus, P., *Project Surveying*, North-Holland Publishing Company, N.Y., 1977, pp. 204~210.
2. 柳福模, 測量學原論(Ⅰ), 開文社, 1984, pp. 320~323.
3. 柳福模, 李在璣, 楊寅台, 朴弘祺, "角觀測과 寫眞測定理論을 組合한 施設物測量技法에 관한 硏究", 大韓土木學會 論文集, 第3卷 第4號, 1983, pp. 123~131.
4. Abdel-Aziz, Y.I., Photogrammetric Potential of Non-Metric Cameras, *Ph. D. Dissertation*, Univ. of Illinois at Urbana, Champaign, 1974, pp. 57~62.
5. 森忠次, 測量學 1. 基礎編, 丸善株式會社, 1979, pp. 218~221.
6. 北野芳德, 測量の誤差と最小二乘法, 日本測量協會, 1975, pp. 35~36.

(接受：1984. 11. 25)