

# 아치구조의 형상 최적화

## Shape Optimization of Arches

한	상	훈*
Han,	Sang	Hoon
변	근	주**
Byun,	Keun	Joo

---

### Abstract

This paper considers the problem of optimum shaping of steel arches subjected to general loading. The weight of arches is considered as the objective function and the appropriate combinations of section forces, material volume, arc length, and closed section area of arches are considered as the stress constraints. The shape optimization problems are formulated in terms of the design variables of sectional areas of each element.

First the cost sensitivity of the design is investigated. Then the investigation comprises the search for the optimum arch form as well as the optimum area distribution along the arch.

Two spaces of shape optimization algorithm will be treated, the first space corresponding to the section optimization by the Modified Newton-Raphson Method, and the second space to the coordinate optimization by the Powell Method.

The optimization algorithm is evaluated and the optimum span-rise ratios for the given arches are evaluated.

---

### 요 지

본 연구는 실제 하중을 받는 강재 아치구조의 최적형상을 다루었다. 목적함수로는 아치의 중량을 취했으며, 제약조건으로는 단면력, 체적, 아치리브의 길이, 아치부재 단면적의 조합으로 구성된 응력제약조건을 고려하였다. 형상최적화문제는 아치부재의 단면적이 설계변수의 함수로 형성되었으며, 첫단계로 구조해석의 정밀도가 최적설계의 목적함수값에 미치는 영향을 분석하였다. 형상최적화 알고리즘은 Two-space System으로 형성되었고, Space 1에서는 Modified Newton-Raphson Method에 의한 단면최적화, Space 2에서는 Powell Method에 의한 형상최적화를 시도하여 형상최적화 알고리즘을 도출하였다. 본 연구에서 도출된 최적화 알고리즘을 이용하여 아치의 단면최적화와 최적 아치형상에 관한 연구가 수행되었다. 이 알고리즘에 의해 실제 조건하에서 아치의 최적 Span-Rise 비를 구할 수 있다.

---

\* 正會員·충북대학교 공과대학 조교수

\*\* 正會員·연세대학교 공과대학 교수

# 1. 서 론

종래의 구조물의 최적설계는 주로 기하학적 형상을 고정시키고 구조물을 구성하는 단면들의 최적화를 주로 시도하여 왔다. 기하형상이 고정된 최적화보다 더 많은 가능성을 제공하는 기하학적 형상최적화를 수치적인 해석방법으로 다룬 연구결과는 찾아보기 힘든 형편이다. 그나마 그 연구의 대부분은 평면트러스 구조물의 형상최적화였고, 본 연구에서 다루고자 하는 아치구조물의 수치적인 해석방법에 의한 형상최적화에 관한 문헌은 거의 찾아 볼 수 없었다.

1966년 E. Lightfoot와 T.A.E. Gorley<sup>(1)</sup>, 1968년 C.H. Wu<sup>(2)</sup>, 1976년 Mehdi Farshad<sup>(3)</sup> 등은 해석적인 방법으로 아치구조의 최적화를 시도하였고, 1977년 조효남<sup>(4)</sup>은 Geometric Programming을 이용하여, 1980년 Samuel L. Lipson과 Muhammad I. Haque<sup>(5)</sup>는 Two-space System을 도입하고 Complex Method를 이용하여 수치적인 해석방법으로 아치의 형상최적화를 연구하였다. 본 연구에서도 Two-space System<sup>(6)</sup>을 도입하여, Space 1에서 Modified Newton-Raphson Method에 의한 단면최적화를, Space 2에서는 Powell Method를 이용하여 평면 아치구조의 형상최적화 알고리즘을 도출하고, 실제 구속조건 하에서 최소중량을 갖는 최적아치형상을 구하는 자동화 최적설계 알고리즘을 제시하고자 한다. 본 연구를 위하여 도입된 기본가정은 다음과 같다. 1) 부재에 발생하는 단면력중 축력과 휨모우먼트에 의한 조합응력만 고려한다. 2) 좌굴은 고려하지 않는다. 3) 구조해석은 평면 뼈대구조물 해석에 의한 선형탄성해석(Linear Elastic Analysis)으로 한다.

## 2. Two-space 형상최적화 문제형식

일단 위상조건을 아는 것으로 가정하면 최적형상을 얻기 위한 비선형 최적화문제의 일반형식은 다음과 같은 형태로 표현되어질 수 있다.

### 2.1 일반적인 문제형식

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } W = W(\vec{A}, \vec{Q}) \\ & \text{subject to } G(\vec{A}, \vec{Q}) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서  $\vec{A}$ =부재 단면적 벡터( $A_1, A_2, \dots, A_m$ )  
 $\vec{Q}$ =절점좌표 벡터( $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ )

### 2.2 Two-spaces System에 의한 문제형식

#### 2.2.1. Space 1; Sizing Space

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } W = W(\vec{A}, \vec{Q}_0) \\ & \text{subject to } G(\vec{A}, \vec{Q}_0) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

여기서  $\vec{Q}_0$ =고정된 절점좌표 벡터

#### 2.2.2. Space 2; Coordinates Space

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } W = W(\vec{A}_0, \vec{Q}) \\ & \text{subject to } G(\vec{A}_0, \vec{Q}) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서  $\vec{A}_0$ =Space 1에서 결정된 최적단면적 벡터

## 3. 최적화 알고리즘

본 연구에서는 Space 1에서 구조 최적화문제에 보편적으로 적용되어 온 SUMT법을 사용하였고, Space 2에서는 도함수를 구하지 않고도 다변수를 갖는 비선형함수의 최소치를 효율적으로 구할 수 있는 Powell Method를 이용하여 형상최적화 알고리즘을 도출하였다.

### 3.1 SUMT 기법<sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } W(\vec{X}) \\ & \text{subject to } G_k(\vec{X}) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$K=1, 2, \dots, M$$

$$H_k(\vec{X})=0$$

$$K=M+1, M+2, \dots, M+P$$

식(3.1)과 같이 형성된 비선형 최적화문제를 식(3.2)와 같은 무제약 최적화문제로 형성하고, Modified Newton-Raphson Method를 적용하여 최적해를 구할 수 있다.

$$\text{Minimize } P = W - r \sum_{k=1}^M \ln G_k + \sum_{k=M+1}^{M+P} H_k^2 / r \quad (3.2)$$

### 3.2 Powell Method<sup>(7,8)</sup>

Space 1에서 구해진 최적해, 즉 부재의 단면

적을 고정시키고 격점(Nodes)의  $y$  방향 좌표를 변수로 택하여 형상최적화문제를 형성한 후 Powell Method에 의하여 최적형상을 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

1) 초기점  $\vec{X}_0^{(0)}$ , 초기 탐사방향  $\vec{M}_i^{(0)} (i=1, \dots, N)$  및 Step Size  $\alpha_i^{(0)}$ 를 선정.

2) 탐사는 Quadratic Approximation에 의하여, 식(3.3)과 같은 형태로 수행된다.

$$\vec{X}_i^{(1)} = \vec{X}_i^{(0)} + \alpha_i^{(0)} \vec{M}_i^{(0)} \quad (3.3)$$

3)  $K$  번째 설계점에서 목적함수값의 점사가 식(3.4)의 형태로 실시된다.

$$\begin{aligned} & [F_0^{(K)} - 2F_N^{(K)} + F_i^{(K)}][F_0^{(K)} - F_N^{(K)} - \Delta]^2 \\ & \geq \frac{\Delta(F_0^{(K)} - F_i^{(K)})^2}{2} \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\Delta = |F_M^{(K)} - F_{M-1}^{(K)}|$$

4) 연속된 탐사에서 변수들의 차가 식(3.5)와 같이 허용한계치보다 작을 경우 최적해를 구한 것이 된다.

$$|\vec{X}_i^{(K)} - \vec{X}_i^{(K+1)}| < \epsilon, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

### 3.3 아치구조의 형상최적화 알고리즘

위와 같은 알고리즘들을 이용한 본 연구의 형상최적화 알고리즘의 흐름도(Flow chart)는 그림 1과 같다.

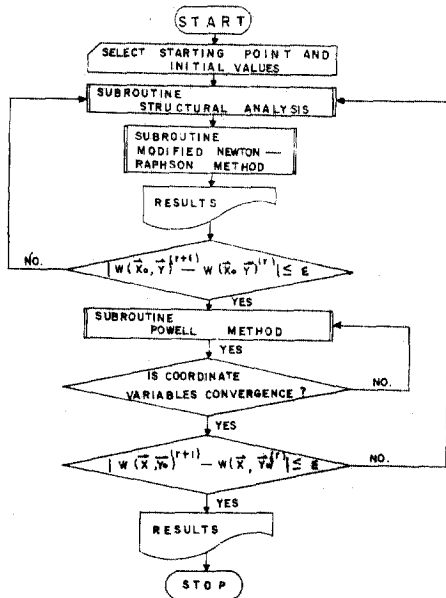


그림 1. 형상최적화 알고리즘의 흐름도

## 4. 아치구조의 최적화문제 형성

### 4.1 목적함수(Objective Function)

그림 2와 같이  $M$  개의 요소로 이루어진 아치 구조물의 중량을 최소화 하기 위한 목적함수를 매트릭스 형태로 표현하면 식(4.1)과 같다.

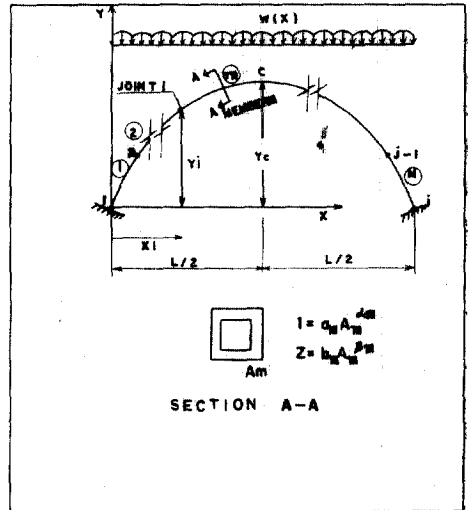


그림 2. 문제형성을 위한 아치구조

$$W(A) = [\rho] \{A\}^T \{L\} \quad (4.1)$$

부재  $i$ 의 길이  $L_i$ 는 기준좌표계에 따라 절점 좌표의 함수로 다음과 같이 정의된다.

$$L_i = \left[ \sum_{r=1}^{NDS} (X_r - X_i)^2 \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

각 부재의 재료성질이 모두 동일하면 목적함수는 식(4.3)과 같이 표현된다.

$$W(A) = \{A\}^T \{L\} \quad (4.3)$$

### 4.2 제약조건

#### 4.2.1. 해석 제약조건식

#### 1) 평형방정식(Equilibrium Equations)

$$[G]^T \{F\} = \{P\} \quad (4.4)$$

여기서  $\{F\} = (m \times 1)$ 의 부재력 벡터

$[G] = (m \times n)$ 의 위상 연결형계 매트릭스

$\{P\} = (n \times 1)$ 의 절점하중 벡터

#### 2) 적합방정식(Compatibility Equations)

$$\{e\} = [G]\{u\} \quad (4.5)$$

여기서  $\{e\} = (m \times 1)$ 의 부재변형 벡터

$\{u\} = (n \times 1)$ 의 절점변위 벡터

### 3) 구성방정식 (Constitutive Equations)

$$\{F\} = [\bar{K}]\{e\} \quad (4.6)$$

여기서  $[\bar{K}] = (m \times n)$ 의 부재 강성매트릭스

본 연구에서는 부재 강성매트릭스를 구성하는 단면적, 단면이차모우먼트, 단면계수 등의 변수들을 연속변수로 가정하여 단면적의 함수로 식 (4.7)과 같은 형태로 표현하였다<sup>(9,10,11)</sup>.

$$I_i = a_i A_i^{s_i}, \quad Z_i = b_i A_i^{t_i} \quad (4.7)$$

여기서  $I_i$  = 부재  $i$ 의 단면이차모우먼트

$Z_i$  = 부재  $i$ 의 단면계수

#### 4.2.2 응력제약조건식

$i$ 번째 부재의 응력제약조건식은 조합응력에 대한 시방서 규정으로부터 인용하면 식(4.8)과 같다.

$$\frac{F_{ai}}{A_i \sigma_{aa}} + \frac{F_{bi}}{Z_i \sigma_{ba}} \leq 1 \quad (4.8)$$

여기서  $F_{ai}, F_{bi}$ : 축력과 휨모우먼트

$\sigma_{aa}$ : 축하중에 대한 허용압축응력

$\sigma_{ba}$ : 허용 휨 압축응력

#### 4.2.3 설계변수 한계 제약조건식

$$\begin{aligned} \{\bar{X}_u\} - \{\bar{X}\} &\geq 0 \\ \{\bar{X}\} - \{\bar{X}_L\} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

여기서  $\{\bar{X}_u\}$  = 설계변수 상한치 벡터

$\{\bar{X}_L\}$  = 설계변수 하한치 벡터

### 4.3 형상최적화 문제형식

$$\text{Minimize } M(\bar{X}) = \{A\}^T \{L\}$$

subject to

$$\{F\} - [\bar{K}][G]([G]^T[\bar{K}][G])^{-1}\{P\} = \{0\}$$

$$1 - \frac{F_{ai}}{A_i \sigma_{aa}} - \frac{F_{bi}}{Z_i \sigma_{ba}} \geq 0 \quad (4.10)$$

$$\{\bar{X}_u\} - \{\bar{X}\} \geq \{0\}$$

$$\{\bar{X}\} - \{\bar{X}_L\} \geq \{0\}$$

## 5. 아치의 형상최적화

### 5.1 신뢰도 검증

#### 1) 해석적인 방법에 의한 형상최적화

등분포 하중이 재하된 균일단면 2활절 포물선

아치는 해석적인 방법으로 간단히 최적형상을 구할 수 있다. 즉 축력만이 존재하고, 최대축력은 지점에서 발생하기 때문에 최대축력에 의한 아치 리브의 단면적과 체적을 구할 수 있다. 그 결과를 도시하면 그림 3과 같다. 여기서  $V/WL^2/\sigma$ 는 체적계수(Volume Factor)이며 Span-Rise 비에 대해 표현되어 있다. 그림에서 알 수 있듯이 최소중량을 갖는 최적 포물선아치형상은  $H/L=0.342$ 에서 일어난다. 중요한 점은  $H/L=0.3, 0.4$ 에서의 아치중량은 최적  $H/L$  때의 아치중량보다 0.74%, 1.07% 정도 무겁다는 점이다.

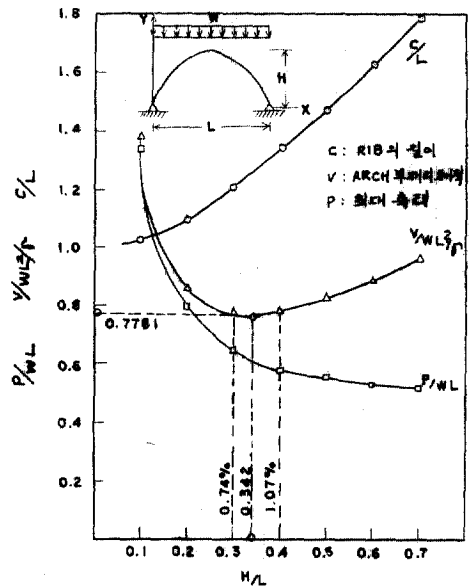


그림 3. 해석적인 방법에 의한 형상최적화

#### 2) 본 알고리즘에 의한 형상최적화

본 연구에서 도출된 알고리즘에 의한 자동화 설계방법을 사용하여 지간조건과 허용응력조건, 하중조건이 서로 다른 9가지 경우에 대한 형상최적화를 시도하였고 관련된 한 예만 도시하면 그림 4와 같다. 수치연구 결과 9가지 경우에 대한 최적  $H/L$ 는 0.341~0.3421 사이의 값들이었으며, 이것은 해석적인 방법에 의한 값과 거의 일치함을 알 수 있다. 또, 이러한 수치연구 결과는 Complex Method를 이용한 Samuel L. Lipson과 Muhammad I. Haque<sup>(6)</sup>의 결과와도 잘 일치하고 있다.

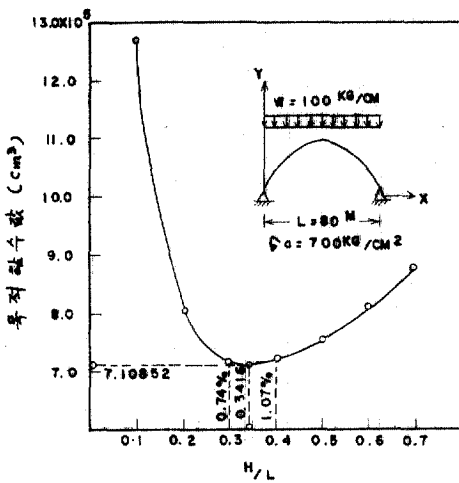


그림 4. 본 알고리즘에 의한 형상최적화

3) 단일집중하중을 받는 변단면 포물선아치의 형상최적화

형상최적화 알고리즘의 신뢰도를 검증하기 위해 단일집중하중을 받는 변단면 아치구조의 형상최적화를 시도하였다. 본 연구의 알고리즘을

적용하여 초기형상을 포물선으로 택하여 형상을 최적화한 결과는 그림 5 및 그림 6과 같다.

재하조건이 단일하중이기 때문에 최적형상은 3각형에 가깝게 된 것이다. 이 결과는 당연히 예상할 수 있는 형상이므로 본 연구의 알고리즘은 신뢰도가 있다고 사료된다.

위의 3종류의 해석적 및 수치적 검증 결과로부터 모두 본 연구의 형상최적화 알고리즘에 의한 최적해는 실제의 엄밀해와 거의 일치하므로 본 연구의 알고리즘은 아치의 형상최적화에 신뢰성있게 적용할 수 있다고 할 수 있다.

5.2. 구조해석의 오차에 따른 최적해

아치구조를 변위법으로 해석하기 위하여 본 연구에서는 여러 개의 직선요소로 분할하였다. 요소의 수를 증가시킬수록 엄밀해에 가까운 해를 얻을 수 있지만, 요소의 수가 증가하게 되면 설계변수가 증가하여 계산도 복잡하게 되고, 전자계산기의 계산시간도 많이 소요된다. 따라서, 본 연구에서는 미리 요소의 수가 최적해에 미치는 영향을 분석하여 그 결과로부터 적당한 요소의

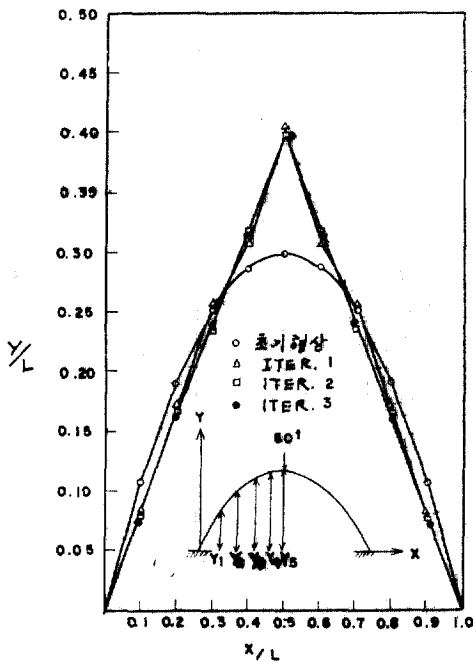


그림 5. 단일집중하중을 받는 고정포물선 아치의 형상최적화

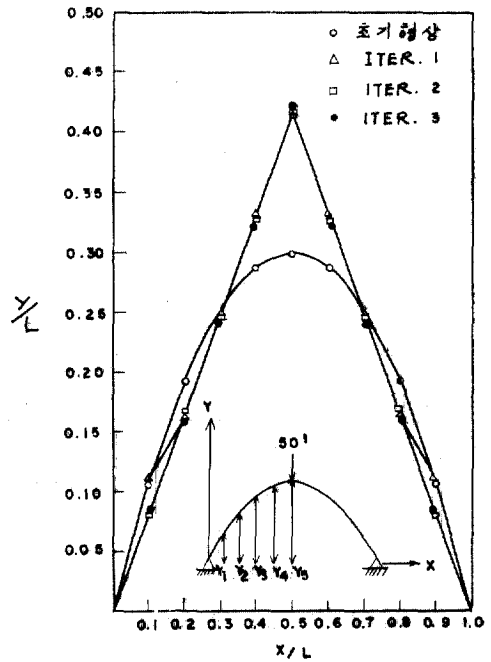


그림 6. 단일집중하중을 받는 2활절포물선 아치의 형상최적화

### 5.3. 수치예

#### 5.3.1. Partial Loading 을 받는 변단면 양 단고정 아치와 2 활절 아치의 형상 최적화

형상최적화 알고리즘이 적용될 Partial Loading 을 받는 양단고정 아치와 2 활절 아치의 최적화 단계와 제약조건은 표 1 과 같으며, Space 1 에서  $H/L$  비에 따른 단면최적화, Space 2 에서는 표 1 과 같이 2 단계에서 형상최적화를 시도한다.

형상최적화 결과를 도시하면, 그림 8,9,10,11 과 같다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 최적 형상은  $H/L=0.15\sim 0.17$  일 때 발생하고, 아치의 Crown 은 하중이 재하된 쪽으로 이동하고 하중이 없는 쪽은 거의 직선에 가까운 형상이 됨 을 보여준다.

#### 5.3.2. Full Loading 을 받는 변단면 양단 고정 아치와 2 활절 아치의 형상최적화

최적화단계와 제약조건은 표 2 와 같고, 형상 최적화 결과를 도시하면 그림 12,13,14,15 와 같다.

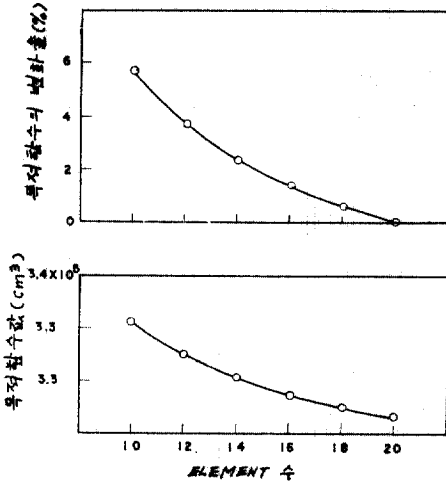


그림 7. 분활된 ELEMENT 수가 최적해에 미치는 영향

수(즉, 설계변수의 수)를 선정하고자 한다.

그림 7은 Full Loading 을 받는  $H/L=0.3$  의 양단고정 포물선아치에 대하여 요소수의 변화에 따른 목적함수의 변화를 보여준다. 요소의 수가 20 개일 때의 단면최적해를 기준으로 하여 요소가 10 개일 경우의 목적함수값의 오차는 5.7% 정도이며, 또한 형상최적화에 의한 최적  $H/L$  에서 단면최적해의 목적함수에 비하여는 오차가 3~4%의 범위였다. 따라서, 본 연구에서는 요소의 수를 10 개로 취하여 아치의 형상을 최적화 하였다.

표 1. 최적화단계와 제약조건

최적화 단계	Space 1	Space 2	
	단면최적화	1 단계 형상최적화	2 단계 형상최적화
	$y(5)/L = 0.1\sim 0.4$	span-rise 비 $y(5)/L$ 만의 절점좌표변수	$y(1), y(2), y(3), y(4), y(5), y(6), y(7), y(8), y(9)$ 의 9개의 절점좌표변수
제약 조건	응력제약 조건	$\sigma_{aa}=1519 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{ab}=1670 \text{ kg/cm}^2$	
	탄성계수	$2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$	
	단면이차모우먼트	$I=0.2782A^{2.2624} \text{ cm}^4$	
	단면계수	$Z=0.40793A^{1.6607} \text{ cm}^4$	

표 2. 최적화단계와 제약조건

최적화 단계	Space 1	Space 2	
	단면최적화	1 단계 형상최적화	2 단계 형상최적화
	$y(5)/L = 0.2\sim 0.6$	span-rise 비 $y(5)/L$ 만의 절점좌표변수	$y(1), y(2), y(3), y(4), y(5)$ 의 5개의 절점좌표변수
제약 조건	응력제약 조건	$\sigma_{aa}=1519 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{ab}=1670 \text{ kg/cm}^2$	
	탄성계수	$2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$	
	단면이차모우먼트	$I=0.2782A^{2.2624} \text{ cm}^4$	
	단면계수	$Z=0.40793A^{1.6607} \text{ cm}^4$	

Full Loading 을 받는 아치의 최적형상은  $H/L$  가 0.44 부근에서 존재하고, 최적형상은 아치리브의 중심선이 포물선을 이룰 때로 나타났다.

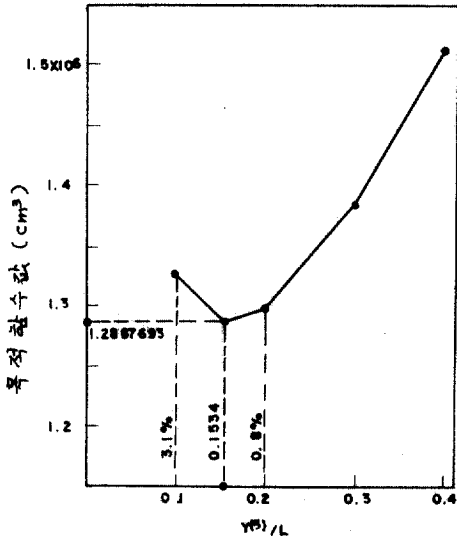


그림 8. PARTIAL LOADING 을 받는 양단 고정아치의 형상최적화 경향

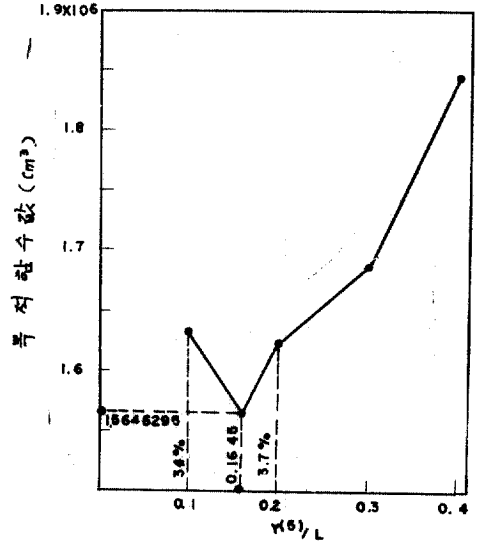


그림 10. PARTIAL LOADING 을 받는 2 활절 아치의 형상최적화 경향

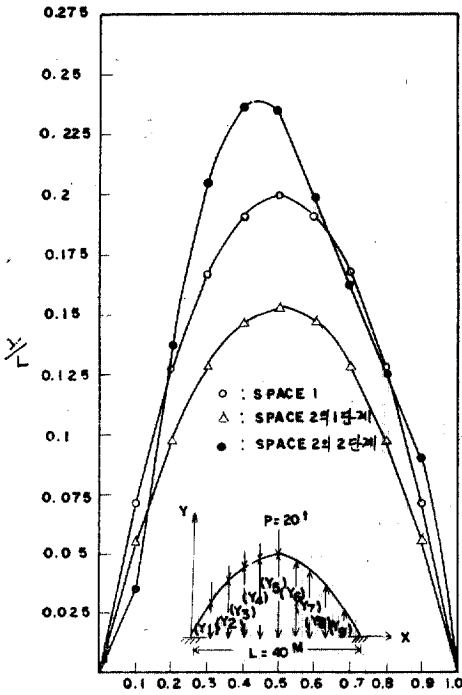


그림 9. PARTIAL LOADING 을 받는 양단 고정아치의 최적형상

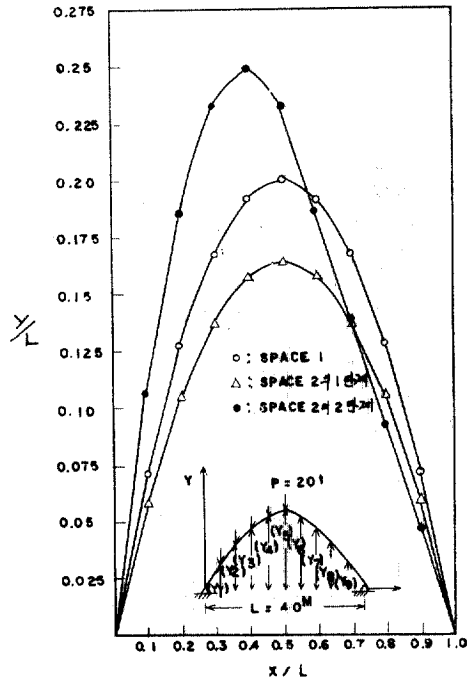


그림 11. PARTIAL LOADING 을 받는 2 활절 아치의 최적형상

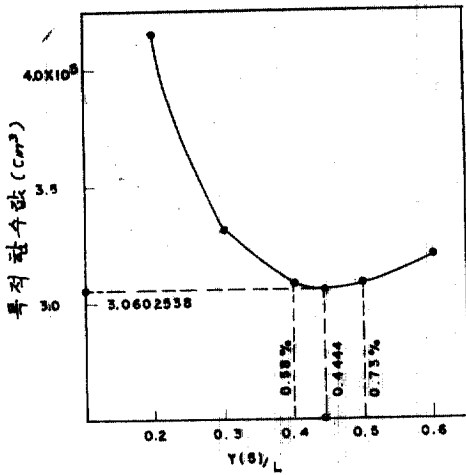


그림 12. FULL LOADING 을 받는 양단고정 아치의 형상최적화 경향

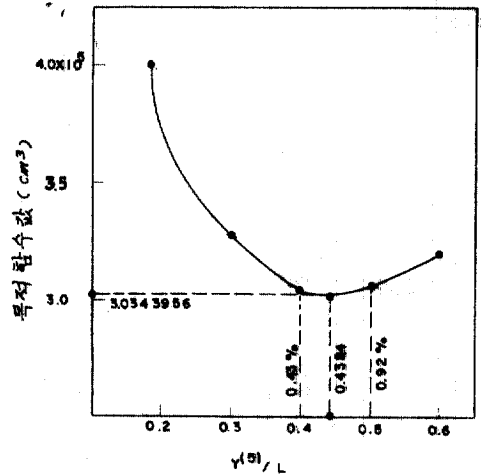


그림 14. FULL LOADING 을 받는 2 활절 아치의 형상최적화 경향

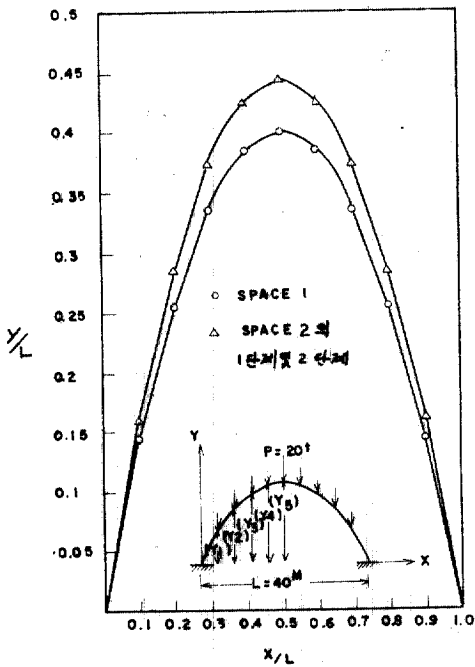


그림 13. FULL LOADING 을 받는 양단고정 아치의 최적형상

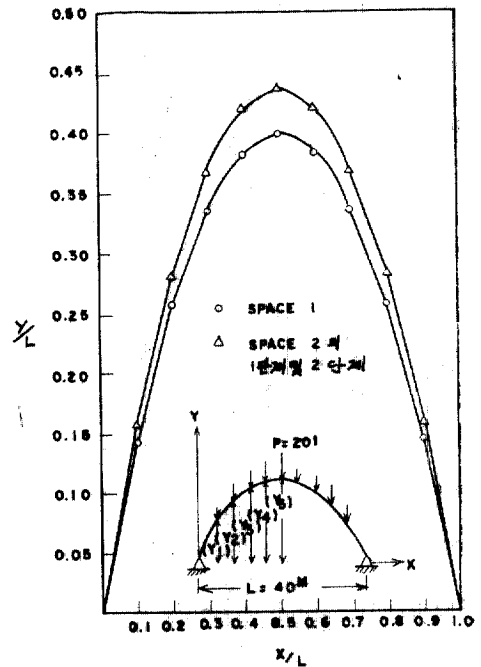


그림 15. FULL LOADING 을 받는 2 활절 포물선 아치의 최적형상



## 6. 결론 및 고찰

본 연구에서 도출한 아치의 형상최적화 알고리즘을 분석하고, 이 알고리즘을 아치의 형상최적화에 적용한 수치계산을 통하여 얻어진 연구 결과는 다음과 같다.

1) 모든 재하조건과 단부 지지조건만 주어지면 본 알고리즘을 이용하여 변단면 아치의 최적형상을 구할 수 있음을 확인하였다.

2) 등분포하중을 받는 등단면 2 활절 포물선 아치의 최적형상은 지간에 관계없이 Span-Rise 비가 0.342일 때이다.

3) Partial Loading 을 받는 경우의 최적형상에서는 아치의 Crown 이 하중이 재하된 쪽으로 이동하고, Full Loading 을 받는 아치의 최적형상은 포물선형으로 규명되었다.

## 참 고 문 헌

1. E. Lightfoot and T.A.E. Gorley, "Optimum Shape for A Single Arch with Solid Fill Above," *Journal of Civil Engineering and Public Works Review*, August, 1966, pp.963~964.
2. C.H. Wu, "The Strongest Circular Arch-A Perturbation Solution," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, No. 3, (Trans. ASME, Vol. 90, Series E.,) September, 1968, pp.476~480.

3. Mehdi Farshad, "On Optimal Form of Arches," *Journal of the Frenklin Institute*, Vol. 302, No. 2, August, 1976, pp.187~194.
4. 조효남, "구조시스템의 최적배치에 관한 연구" 대한토목학회지, 제25권, 제3호, 1977.9, pp.91~99.
5. Samuel L. Lipson and Muhammad I. Haque, "Optimal Design of Arches Using the Complex Method," *Journal of the Structural Division*. ASCE, ST 12, December, 1980, pp.2509~2525.
6. Ovadia E. Lev, *Structural Optimization (Recent Developments and Applications)*, Special Publication of the ASCE, 1981, pp.1~214.
7. James L. Kuester and Joe H. Mize, *Optimization Techniques with Fortran*, McGraw-Hill Book Company, 1973, pp.331~412.
8. S.L.S. Jacoby, J.S. Kowalik, and J.T. Pizzo, *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*, Prentice-Hall, Inc., 1972, pp.123~128.
9. M.P. Saka, "Optimum Design of Rigidly Jointed Frames," *An International Journal, Computers and Structures*, Vol. 11, No. 5, pp.421~427.
10. Jashir Singh Arora, "Optimal Design of Elastic Structures under Multiple Constraint Conditions," Ph. D. Dissertation, The Univ. of Iowa, August, 1971, pp.1~96.
11. AISC, *Manual of Steel Construction*, 8th edition, AISC, 1980, pp.3-37~3-56.

(接受: 1984. 11. 16)