

一定變斷面 長柱의 臨界挫屈荷重의 決定

The Determination of Critical Buckling Load Applied to Tapered Columns

劉	哲	秀*
Yu,	Chul	Soo
孫	晟	源**
Sohn,	Sung	Won

Abstract

New formulas to determine the critical elastic buckling load of long tapered columns are given. This study is restricted to solid round or rectangular columns with fixed-free ends as often used in highway design.

The exact solution of the differential equation of the deflection curve is expressed in terms of Bessel Function and the solution is numerically evaluated using Bisection method by computer.

In the F.E.M analysis of columns under their own weight, the stability problem can be resulted in a eigen value problem of conservative system.

Approximate solution by the F.E.M is evaluated numerically using Jacobi method and compared with exact solution of the prismatic column to increase the precision.

In addition, critical buckling load of the tapered column for every shape factor and ratio of cross-sectional change (Diameter of bottom end/Diameter of upper end) was converted into a comparable expression to critical buckling load of the prismatic column.

要 旨

本論文에서는 一定變斷面長柱의 彈性臨界挫屈荷重을 구하는 略算式을 提示하였다.

특히, 高架道路設計時 자주 나타나는 一端固定 他端自由인 中實圓形 및 矩形斷面에 限하였다.

처짐곡선 微分方程式의 精密解는 Bessel 函數로 나타나는데, Bisection method 를 이용하여 Computer 로 數值解析하였다.

또 自重고려시 F.E.M에 의한 解析은 固有值 問題가 되므로 Jacobi method 를 이용하여 數值解析하였고, 均一斷面長柱의 精密解와 比較하여 F.E.M에 의한 近似解의 信賴度를 높였다.

그 結果 一定變斷面長柱의 臨界挫屈荷重은 形狀係數와 斷面變化率에 대해 均一斷面長柱의 比例式으로 나타낼수 있었다.

*正會員·高麗大學校 工科大学 土木工學科 教授

**韓國電力技術株式會社

1. 序 論

長柱의 彈性 挫屈問題는 일찍이 Euler 에 의해 均一斷面기둥에 대한 式이 유도된 이래 많은 학자들이 오랜 세월동안 研究를 거듭해 왔다.

均一斷面기둥에 대해서는 軸荷重뿐만 아니라 自重을 고려한 여러 論文이 發表되었으나 一定變斷面기둥의 경우는 그렇게 많은 研究가 없었다.

M.M. Abbassi 는 一定變斷面기둥과 같이 Variable Bending Rigidity 를 갖는 기둥의 臨界挫屈荷重을, 自重을 무시한 채 삼각함수를 이용한 近似式으로 구했다⁽¹⁾.

S.P. Timoshenko 는 1963 年度版 그의 著書에 A.N. Dinnik 의 論文을 參照하여 一定變斷面기둥의 臨界荷重값을 表로 소개하였다⁽²⁾. 그는 一定變斷面기둥의 처짐곡선의 미분방정식을 이용하여, 軸荷重에 대해서뿐만 아니라 끝이 鉋촉한 梁기둥의 自重에 대해서도 無限級數인 Bessel 函數로 微分方程式의 精密解인 臨界挫屈荷重값을 구했지만 一般의이지 못했다.

J.M. Gere 역시 A.N. Dinnik 의 方法을 擴張 發展시켜 軸荷重에 의한 一定變斷面長柱의 臨界挫屈荷重을 구했지만 自重은 고려하지 못했다.⁽³⁾

처짐곡선 微分方程式의 解法에 의해 精密解를 구하는, 이같은 方法은 매우 복잡하고 어려운 많은 시간과 노력이 소요된다.

1960年代末부터 動力學의 발달과 電算機의 발달에 힘입어, 自重下의 長柱의 挫屈問題는 現代의 意味로 分布軸荷重을 받는 기둥의 conservative system 의 固有值問題로 해석되어 수년동안 많은 학자들에 의해 연구되어 왔다.

그 결과 均一斷面기둥의 自重을 고려한 挫屈問題는 여러 論文^(4,5)으로 발표되었지만 一定變斷面기둥의 自重을 고려한 解析은 없었다.

따라서 本 論文에서는 Dinnik 이나 Gere 가 발표한 Bessel 函數에 의한 精密解法을 이용하여, 一端固定 他端自由인 一定變斷面長柱의 自重을 무시한 中實斷面에 대한 臨界挫屈荷重을 數值解析하였다.

또 自重에 의한 臨界挫屈荷重은 動力學的 解

析을 바탕으로 하여 有限要素法⁽⁶⁾으로 數值解析하였다. 이러한 有限要素法에 의한 近似值의 precision(精度)을 높이기 위해 Bessel 函數에 의한 數值解析結果와 비교하였다. 그러한 數值解析結果值을 토대로 각 形狀係數와 斷面變化率(上端과 下端의 직경비)에 따라 實務에서 쉽게 一般的으로 적용할 수 있는 略算式을 얻을 수 있다면 앞으로 기둥設計時 많은 도움이 될 것이다.

2. 微分方程式의 精密解

2.1. 形狀係數

기둥의 挫屈은 彎剛度 EI 가 最小인 平面內에 생기므로 斷面의 形狀에 따라 挫屈이 일어나는 方向은 달라진다.

中實斷面의 形狀係數는 斷面이 一面(그림 1-a) 또는 兩面(그림 1-b)으로 일정하게 變할 경우 다음과 같은 式으로 결정된다^(7,14).

$$m = (b) + 3(h) \tag{1}$$

(b)는 斷面의 가로길이의 變化에 관한 항이며 (h)는 斷面의 세로길이의 變化에 관한 항이다. 그림 1-b와 같이 斷面이 一定하게 兩面으로 變하는 경우 I_{min} 을 갖는 主軸은 일정하지만, 그

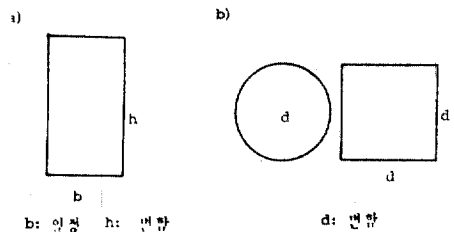


그림 1. 단면이 변하는 면

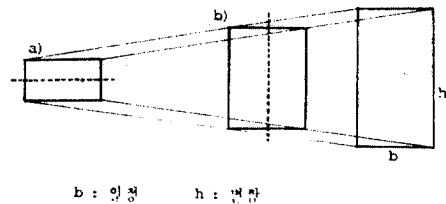


그림 2. 최소 단면 2차 모멘트축의 변화

림 1-a와 같이 一面으로 변하는 경우 그림 2처럼 挫屈이 일어나는 軸이 달라진다.

따라서 中實斷面기둥의 形狀係數는 식(1)에 의해 다음과 같이 3가지로 분류하여 決定할 수 있다.

i) 그림 1-b의 경우

$$m = (b) + 3(h) = 4$$

ii) 그림 2-a의 경우

$$m = 3(h) = 3$$

iii) 그림 2-b의 경우

$$m = (b) = 1$$

2.2. 軸荷重에 對한 Bessel Equation

기둥의 보다 작은 端인 上端을 A, 보다 큰 下端을 B, 각각의 斷面直徑과 단면 2차모멘트를 D_A, D_B, I_A, I_B , 기둥길이를 L 로 표시한다.

彈性 처짐곡선 方程式은 다음과 같다.

$$EI_A \left(\frac{x}{a} \right)^n \frac{d^2 y}{dx^2} + P y = 0 \quad (2)$$

여기서 $k^2 = \frac{Pa^n}{EI_A}$ 라 하면 (2)식은

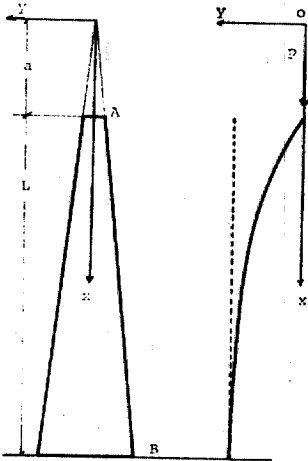


그림 3. 좌표계

$$x^n \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (3)$$

(3)식을 치환하여 변수분리하면 그 解가 Bessel 函數로 나타나는 Bessel Equation 化할 수 있다⁽⁶⁾.

따라서 처짐의 一般式은 다음과 같이 Bessel 函數로 표시된다.

$$y = \sqrt{x} [AJ_n(t) + BY_n(t)] \quad (4)$$

$$\text{여기서, } n = \frac{1}{n-2} \quad (5)$$

$$t = 2nkx^{-\frac{1}{2n}} \quad (6)$$

2.3. 自重에 對한 Bessel Equation

自重은 分布荷重으로써 均一斷面기둥의 自重은 斷面積 무게 q 가 一定하며 기둥길이에 따라 均一하게 分布하는데 반해, 一定變斷面기둥의 自重은 斷面이 一面 또는 兩面으로 변하는 경우에 따라 斷面積 무게 q 는 다음과 같이 변화한다.

$$q_x = q_B \left(\frac{x}{l} \right)^v = \rho g A_B \left(\frac{x}{l} \right)^v \quad (7)$$

여기서 q_B : 下端에서의 단위길이당 分布荷重

ρ : 재료의 密度, g : 重力加速度

A_B : 下端의 斷面積, $l = a + L$

(7)식에서의 v 는 形狀係數 m 의 값에 따라 결정되는 것으로서 $m=4$ (兩面變化)일 경우 $v=2$ 이고 $m=1, 3$ (一面變化)일 경우는 $v=1$ 이다. 그림 4의 (b), (c)는 각각의 단위길이당 分布荷重의 크기를 나타낸 것이다.

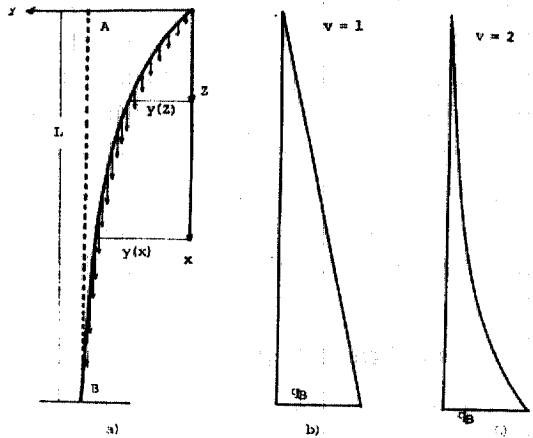


그림 4. 自重分布 및 分布荷重 크기의 변화

끝이 뾰족한 뿔모양의 기둥의 단면 2차모멘트는 (2)식과 마찬가지로 다음과 같이 표시된다.

$$I_x = I_B \left(\frac{x}{l} \right)^m \quad (8)$$

따라서 뿔기둥의 自重에 의한 처짐곡선 방정식은 (7), (8)식에 의해

$$EI_B \left(\frac{x}{l} \right)^m \frac{d^2 y}{dx^2} + \int_0^x q_B \left(\frac{x}{l} \right)^v \{y(x)\}$$

$$-y(x)\} dx=0$$

여기서 $m-v=r$, $\frac{q_0 r}{EI_B} = k^2$ 라 하면 처짐곡선 방정식은

$$x^r \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \int_0^x \{y(x) - y(x)\} dx = 0 \quad (9)$$

윗식을 x 에 대해 微分하면

$$x^r \frac{d^3 y}{dx^3} + r x^{r-1} \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 x \frac{dy}{dx} = 0 \quad (10)$$

(10)식을 치환하여 변수분리시키면 다음과 같은 Bessel 函數로 解를 구할 수 있다.

$$y = \{C_1 J_{2r+1}(t) + C_2 Y_{2r+1}(t)\} dt \quad (11)$$

$$\text{여기서 } s = \frac{1}{r-3}, \quad t = 2skx - \frac{1}{2t}$$

以上은 뿔기둥의 自重에 대한 처짐곡선 방정식이고 그림 3과 같이 끝이 잘려진 一定變斷面 기둥에 대한 처짐곡선 방정식은 다음과 같다.

$$x^r \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \int_a^x \{y(x) - y(x)\} dx = 0 \quad (10)$$

(10)식과 마찬가지로 x 에 대해 微分하면

$$x^r \frac{d^3 y}{dx^3} + r x^{r-1} \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 (x-a) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (12)$$

(12)식을, Bessel 函數을 그 解로 갖는 Bessel Equation 형태로 나타낸다는 것은 불가능하였다. 즉 微分方程式에 의한 연속체(continuous system) 解析은 실제와 가장 잘 부합되는 精密解를 주지만 그 과정이 어렵고 복잡할 뿐만 아니라 많은 경우 구하기가 불가능하므로 finite-degree of freedom system으로 바꿔 微分方程式이 아닌 代數式으로 나타내 그 近似解를 구하는 법이 要望된다.

2.4. Bessel 函數의 數值解析

本 論文에서는 自重을 무시한 軸荷重에 대한 Bessel 函數의 數值解析에 限했다. 軸荷重에 대한 처짐의 一般式인 (4)식에서 一端固定 他端自由인 경우 경계조건은 다음과 같다.

i) $x=a$ 일 때 $y=0$

ii) $x=a+L$ 일 때 $\frac{dy}{dx}=0$

식을 간략히 하기 위해

$$h^2 = \frac{Pa^2}{EI_A}, \quad \alpha = \frac{D_A}{D_B} = \frac{a}{a+L} \text{ 라 하면}$$

i)의 경우

$$\sqrt{a} \{AJ_n(2nh) + BY_n(2nh)\} = 0 \quad (13)$$

ii)의 경우

$$\sqrt{a+L} \{AJ_{n+1}(2nh\alpha^{\frac{1}{2n}}) + BY_{n+1}(2nh\alpha^{\frac{1}{2n}})\} = 0 \quad (14)$$

경계조건을 만족하는, 즉 (13), (14)식을 동시에 만족하는 non-trivial solution 이 存在하려면

$$\begin{vmatrix} J_n(2nh) & Y_n(2nh) \\ J_{n+1}(2nh\alpha^{\frac{1}{2n}}) & Y_{n+1}(2nh\alpha^{\frac{1}{2n}}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore J_n(2nh) Y_{n+1}(2nh\alpha^{\frac{1}{2n}}) - J_{n+1}(2nh\alpha^{\frac{1}{2n}}) Y_n(2nh) = 0 \quad (15)$$

따라서 形狀係數에 따라 n 을 결정하고

$$P_{cr} = \beta^2 \frac{EI_A}{L^2} \text{의 형태로 만들기 위해}$$

$$\beta^2 = \frac{PL^2}{EI_A}, \quad \omega = \frac{1}{\alpha} = \frac{D_B}{D_A} \text{ 라 하면}$$

(15)식은 Bessel 函數의 特性에 의해 ω, β 의 函數로 간략히 나타낼 수 있다.

i) $m=4$ 인 경우

$$\tan \frac{\beta}{\omega} + \frac{\beta}{\omega(\omega-1)} = 0 \quad (16)$$

ii) $m=1$ 인 경우

$$J_1\left(\frac{2\beta}{\omega-1}\right) Y_0\left(\frac{2\beta\sqrt{\omega}}{\omega-1}\right) - J_0\left(\frac{2\beta\sqrt{\omega}}{\omega-1}\right) Y_1\left(\frac{2\beta}{\omega-1}\right) = 0 \quad (17)$$

iii) $m=3$ 인 경우

$$\begin{aligned} & J_1\left(\frac{2\beta}{\omega-1}\right) Y_1\left(\frac{2\beta}{\sqrt{\omega}(\omega-1)}\right) - J_1\left(\frac{2\beta}{\sqrt{\omega}(\omega-1)}\right) \\ & Y_1\left(\frac{2\beta}{\omega-1}\right) - \frac{\beta}{\sqrt{\omega}(\omega-1)} \left\{ J_1\left(\frac{2\beta}{\omega-1}\right) Y_0 \right. \\ & \left. \left(\frac{2\beta}{\sqrt{\omega}(\omega-1)} \right) - Y_1\left(\frac{2\beta}{\omega-1}\right) J_0\left(\frac{2\beta}{\sqrt{\omega}(\omega-1)}\right) \right\} \\ & = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

一般的으로 Bessel 函數는 수표책⁽⁹⁾을 통해 시행착오법으로 찾을 수 있지만 (16), (17), (18)식들은 식자체가 단순치 않고 Bessel 函數자체가 無限級數이므로 數值解析法이 必要하다.

本 論文에서는 Bessel 函數에 대한 電算用 Subroutine Program 을 이용하여, 數值解析法의 한 方法인 Bisection Method 로 그 解를 구했다. Bisection Method 는 일종의 反復法으로써 區間을 2等分하면서 根을 구해 나간다⁽¹⁰⁾.

3. 有限要素法에 의한 近似解

3.1. Eigen Value Problem

有限要素法은 실제 연속체(Continuous System)인 구조물을 절점에서 서로 連結되는 Discrete element의 合成體로 理想化시켜 matrix에 의한 代數式으로 푸는 近似解法이다.

荷重-變位 관계식인 $\{W\}=[K]\{D\}$ 에서 좌굴은 變位 $\{D\}$ 이 무한히 커짐을 뜻하므로 Cramer 法則에 의해 全體剛度行列 $[K]$ 의 Determinant $|K|=0$ 이어야 한다.

全體剛度行列 $[K]$ 는 다음과 같은 식으로 표시된다.

$$[K]=\frac{EI}{l^3}[K_s]-\frac{P}{l}[K_a] \quad (19)$$

여기서 $[K_s]$ 는 荷重要素의 剛度行列을 合成한 全體剛度行列이고, $[K_a]$ 는 軸荷重이 要素의 휨에 주는 영향에 대한 全體剛度行列이다.

따라서 좌굴은 (19)식에 의해

$$|[K_s]-\lambda[K_a]|=0 \quad (20)$$

$$\lambda=\frac{Pl^2}{EI} \quad (21)$$

즉, (20)식은 다음과 같은 형태의 Eigen value problem 이 된다^(11,12).

$$AX=\lambda BX \quad (22)$$

여기서 X ; eigen vector

λ ; eigen value

3.2. 解析 모델 및 自重分布

그림 3과 같이 斷面이 一定하게 變하는 기둥의 총길이 L 과 下端의 斷面직경 D_B 를 일정하게 고정시켜 놓고, 斷面變化率 ω 를 1에서 5까지 변화시켜 가면서 그에 따른 臨界挫屈荷重을 구한다. 一定變斷面기둥은 단면 2차모멘트가 변하기 때문에 (19)식을 사용할 수 없다. 따라서 그림 5의 점선같이 동일길이의 區間別로 均一斷面을 갖도록 n 개의 要素로 나눈다.

그러면 위에서 i 번째 要素의 斷面直徑은

$$D_i=D_B\left[\alpha+\frac{(2i-1)(1-\alpha)}{2n}\right]$$

여기서

$$\alpha=\frac{1}{\omega}=\frac{D_A}{D_B}, \quad dD=\frac{D_B-D_A}{n}=\left(\frac{1-\alpha}{n}\right)D_B$$

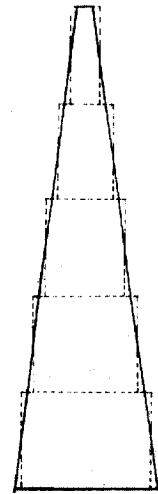


그림 5. 區間別 均一斷面化

또 i 번째 要素의 단면 2차모멘트를 I_i 라 하면,

$$\frac{I_i}{I_B}=\left(\frac{D_i}{D_B}\right)^m=\left[\alpha+\frac{(2i-1)(1-\alpha)}{2n}\right]^m \quad (23)$$

m : 形狀係數

그림 5와 같이 각 區間別로 均一斷面을 갖는 기둥의 自重은 각 구간별 要素의 무게 $\rho g l A_i$ 의 합이므로 각 要素의 斷面積 A_i 의 크기만큼 그림 6의 실선처럼 구간별 직선변화한다. 이러한 自重分布를 각 區間別로 均一한 荷重크기를 갖도록 그림 6의 점선처럼 나눈다.

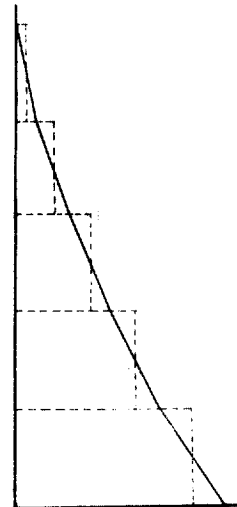


그림 6. 自重分布의 區間別 均一化

그러면 각 要素의 무게를 上下節點에 半씩 나눠 갖는 것과 같다⁽¹³⁾. 따라서 위에서 i 번째 要素에 작용하는 荷重은 (7)식에 의해

$$W_i = \rho g l \left[\sum_{k=1}^i A_k - \frac{1}{2} A_i \right] = q_b l \left[\sum_{k=1}^i \left(\frac{D_k}{D_B} \right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{D_i}{D_B} \right)^n \right] \quad (21)$$

여기서 l : 要素길이

$$q_b: \text{下端에서의 단위길이당 分布荷重} \\ = \rho g A_B$$

以上과 같은 전체 下에, (19)식의 全體剛度行列 $[K]$ 를 구성하는 要素剛度行列 $[k]$ 에서의 I, P 는 각각 I_i, W_i 로 대치된다.

全體剛度行列 $[K]$ 를 구하기 위해선 먼저 一定한 固定值 I_B, W_T 를 설정하여 normalizing 할 必要가 있다.

$$W_T = \sum_{i=1}^n W_i = q_b l \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^i \left(\frac{D_k}{D_B} \right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{D_i}{D_B} \right)^n \right\} \right] \quad (25)$$

즉, I_i, W_i 를 아래의 式과 같이 I_B, W_T 로 바꾼 다음, 각 式의 $\left(\frac{I_i}{I_B} \right), \left(\frac{W_i}{W_T} \right)$ 항들은 無次元이므로 行列內로 들어가 곱해진다.

$$\frac{EI_i}{I_B^3} = \frac{EI_B}{I_B^3} \times \frac{I_i}{I_B}, \quad \frac{W_i}{l} = \frac{W_T}{l} \times \frac{W_i}{W_T}$$

이러한 각 要素剛度行列을 합성하면 (19)식은

$$[K] = \frac{EI_B}{I_B^3} [K_b]' - \frac{W_T}{l} [K_w]' \quad (26)$$

결국 式은 (22)식과 같은 형태의 固有值問題가 되어

$$A = [K_b]', \quad B = [K_w]'$$

여기서 구한 最小 固有值 λ 는 (25)식에 의해

$$\lambda = \frac{W_T l^2}{EI_B} \\ = \frac{q_b l^3}{EI_B} \left[\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^i \left(\frac{D_k}{D_B} \right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{D_i}{D_B} \right)^n \right\} \right] \quad (27)$$

기둥의 自重 W 는

$$W = \rho g l [A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n] \\ = \rho g l A_B \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{A_B} \right) \right] = q_b l \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{D_i}{D_B} \right)^n \right] \quad (28)$$

따라서 自重에 대한 臨界挫屈荷重 W_{cr} 은 (27), (28)식에 의해

$$W_{cr} = n^2 \lambda \left(\frac{R_A}{R_T} \right) \frac{EI_B}{L^2} \quad (29)$$

여기서

$$R_A = \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_i}{D_B} \right)^n$$

$$R_T = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^i \left(\frac{D_k}{D_B} \right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{D_i}{D_B} \right)^n \right]$$

$$n = L/l$$

自重을 무시한 臨界挫屈荷重 P_{cr} 도 마찬가지로 방법으로 구하면

$$P_{cr} = \frac{n^2 \lambda EI_B}{L^2} \quad (30)$$

(30)식의 λ 는 最小 固有值로써, (22)식의 형태에서 $A = [K_b]', B = [K_w]'$ 로 구한 것이다. $[K_b]'$ 는 (26)식의 $[K_b]'$ 와 같은 것이고 $[K_w]'$ 는 (19)식의 $[K_w]$ 와 같은 것이다.

2章에서 구한 精密解와 비교하기 위해 (29), (30)식의 W_{cr}, P_{cr} 을 上端의 斷面을 기준으로 한 式으로 고치면 다음과 같다.

$$W_{cr} = n^2 \omega^m \lambda \left(\frac{R_A}{R_T} \right) \frac{EI_A}{L^2} \quad (31)$$

$$P_{cr} = n^2 \omega^m \lambda \frac{EI_A}{L^2} \quad (32)$$

3.4. 結果解析

一定變斷面 長柱의 形狀係數 $m=4, 3, 1$ 인 각각의 경우에 대해, 微分方程式에 의한 精密解와 matrix 解法(有限要素法)에 의한 近似解를 구하여 비교해 보았다. 斷面變化率 ω 는 1에서 5까지 변화시켰다.

表 1은 기둥을 5等分한 有限要素法의 解析結果의 信賴性을 檢討하기 위해, 自重을 무시한 臨界挫屈荷重의 挫屈常數 β 를 구하여 Bessel 函數의 精密解의 結果値와 비교한 것이다.

$$P_{cr} = \beta^2 \frac{EI_A}{L^2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{P_{cr} L^2}{EI_A}} \quad (33)$$

表 2는 形狀係數 $m=4$ 인 경우, 기둥을 10等分한 有限要素法의 解析結果이다.

自重에 의한 臨界挫屈荷重의 有限要素法 解析은 그 信賴性을 높이기 위해, 表 3에서와 같이 等分數를 變化시켜 가며 斷面變化率 $\omega=1$ 인 均一斷面기둥의 $W_{cr} = (qL)_{cr}$ 의 精密解와 비교하였다.

斷面直徑 D_A 의 均一斷面 長柱의 自重에 의한 臨界挫屈荷重의 精密解値와는 다음과 같다⁽¹³⁾.

表 1.5 등분수 ω 에 따른 精密解와 近似解의 비교

β	ω	1	2	3	4	5
4	Bessel	$\frac{\pi}{2}$	4.057515	6.866776	9.822578	12.852158
	Matri-x	1.570940	4.016474	6.687303	9.359467	11.991817
3	Bessel	$\frac{\pi}{2}$	3.269726	5.027161	6.820189	8.637337
	Matri-x	1.570940	3.247571	4.954684	6.654460	8.332819
1	Bessel	$\frac{\pi}{2}$	2.030769	2.387723	2.690967	2.959834
	Matri-x	1.570940	2.026632	2.379972	2.679932	2.945439

表 2.10 등분수 ω 에 따른 近似值

ω	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
β	1.5723	2.0252	5.0123	0.018	3.5163	4.0471	4.5894
ω	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6
β	5.1372	5.6959	6.2588	6.8249	7.3971	7.9707	8.5470
ω	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0
β	9.1221	9.6992	10.275	10.857	11.431	12.009	12.585

表 3. 自重고려시 등분수(요소갯수)에 따른 비교

要素의 갯수	5	6	7	8	9	10
$n^2 \lambda \left(\frac{R_A}{R_T} \right)$	7.7087	7.7496	7.7763	7.80632	7.81722	7.8361

$$W_{cr} = (qL)_{cr} = 7.837 \frac{EI_A}{L^2} \quad (34)$$

表 1, 2, 3 으로부터 有限要素法 解析時 기둥을 5 等分하는 것보다 10 等分하는 것이 (34) 식의 微分方程式에 의한 精密解와 거의 일치(2% 이내)함을 알 수 있다.

따라서 本 論文에서는 기둥을 10 等分하여 自重에 의한 臨界值를 有限要素法으로 구하였고, 自重을 무시한 臨界屈曲荷重은 Bessel 函數를 이용한 精密解로 구하였다.

Bessel 函數를 이용한 精密解의 수치해석결과 自重을 무시한 一定變斷面 長柱의 臨界屈曲荷重 P_{cr} 은 斷面直徑 D_A 인 均 斷面 기둥의 臨界屈曲荷重 P_A 의 비례식으로 나타낼 수 있었다.

(33) 식에서

$$P_{cr} = \beta^2 \frac{EI_A}{L^2}, \quad P_A = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI_A}{L^2}$$

$$P_{cr} = P^* P_A, \quad P^* = \frac{4\beta^2}{\pi^2} \quad (35)$$

그림 7 은 P^* 의 計算結果를 圖表化한 것이다. 그 결과 P^* 와 ω 의 관계는 $m=1$ 일 때 직선변화하지만 $m=4, 3$ 일 경우에는 e 차 곡선변화함을 알 수 있었다.

$$e = \frac{\log P^*}{\log \omega}, \quad P^* = \omega^e \quad (36)$$

自重에 의한 臨界屈曲荷重은 一定變斷面 長柱를 10 等分하여 有限要素法으로 구한 近似值로써 均 斷面 기둥의 臨界屈曲荷重 W_A 의 비례식으로 나타낼 수 있었다.

(31), (34) 식에 의해

$$W_{cr} = n^2 \omega^m \lambda \left(\frac{R_A}{R_T} \right) \frac{EI_A}{L^2} = W^* \left(7.837 \frac{EI_A}{L^2} \right)$$

$$= W^* W_A$$

$$W^* = n^2 \omega^m \lambda R_A / 7.837 R_T \quad (37)$$

그림 8 은 形狀係數 및 斷面變化率에 따른 W^* 의 변화를 圖表化한 것이다.

그 결과 W^* 와 ω 의 관계는 \bar{e} 차 곡선변화함을 알 수 있었다.

$$\bar{e} = \frac{\log W^*}{\log \omega}, \quad W^* = \omega^{\bar{e}} \quad (38)$$

以上과 같은 結果를 토대로 비례상수 P^*, W^* 를 각각의 形狀係數에 대해 다음과 같은 略算式으로 표시할 수 있었다.

$$P^* = \omega^e$$

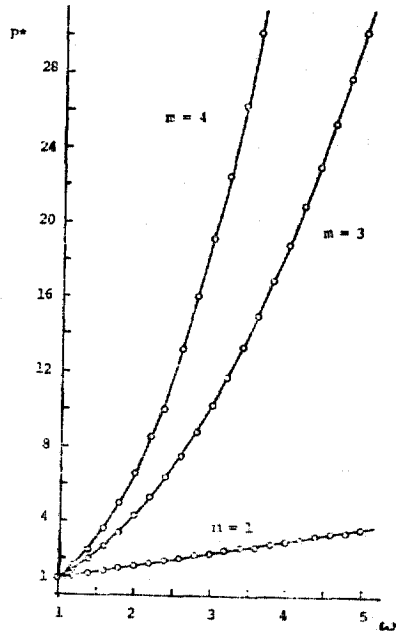


그림 7. $P^* - \omega$ 의 관계곡선

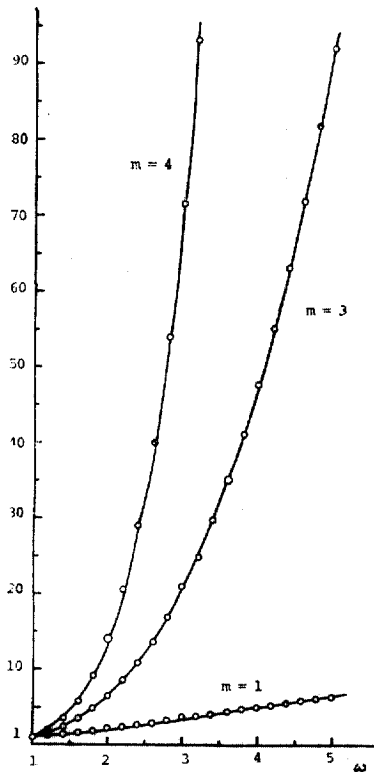


그림 8. $W^*-\omega$ 의 관계곡선

$m=4$ 일 때 $e=2.83-0.046\omega$

$m=3$ 일 때 $e=2.11$

$m=1$ 일 때 $P^*=0.35+0.65\omega$

$W^*=\omega^e$

$m=4$ 일 때 $\bar{e}=3.56+0.18\sqrt{\omega}$

$m=3$ 일 때 $\bar{e}=2.5+0.14\sqrt{\omega}$

$m=1$ 일 때 $\bar{e}=0.99+0.07\sqrt{\omega}$

4. 結 論

本論文에서는 微分方程式의 精密解와 有限要素法에 의한 近似解를 각각 數値解析하여 一定變斷面 기둥의 臨界值의 비례식으로 구했다. 有限要素法の 信賴性을 檢討하기 위해 精密解와 비교한 결과 기둥을 10等分할 경우 精密解와 보다 근사한 값을 나타내었다. 비례상수 P^* , W^* 는 形狀係數와 斷面變化率로 결정되는 略算式으로 바꿀 수 있었다. 略算式에 의한 오차범위는

2%이내에 들었다. 이것은 P^* 의 실제계산값이 Bessel 函數의 精密解 結果이고 W^* 역시 10等分한 有限要素法の 計算結果가 精密解의 2%內인 계산값이므로 略算式의 오차는 실제 設計 및 工學問題에 있어서 그리 중요치 않다고 볼 수 있다.

本論文에서는 一端固定 他端自由인 경우만 고려하였지만 그외의 境界條件에 대해서도 마찬가지로 方法으로 구할 수 있을 뿐만 아니라 本論文을 토대로 荷重과 自重을 동시에 고려한 解析이 가능하므로 앞으로 이에 대한 깊은 研究가 要望된다.

參 考 文 獻

1. Mohammed M. Abbassi, "Buckling of Struts of Variable Bending Rigidity", *Journal of Applied Mechanics*, Dec. 1958.
2. S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Book Co., 1963, pp. 125~131, 100~103.
3. J.M. Gere and W.O. Carter, "Critical Buckling Loads for Tapered Columns", *J. of Structural Division, ASCE*, Feb. 1962.
4. T.S. Dalal, "Columns with Distributed Axial Loads", *J. of the Structural Engineer, Vol. 48, No. 11*, Nov. 1970.
5. Y. Sugiyama and K. Ashida and H. Kawagoe, "Buckling of long columns under their own weight", *Bulletin of the JSME, Vol. 21, No. 158*, Aug. 1978.
6. Alexander Chajes, *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall Inc., 1974, pp. 122~142.
7. J.M. Gere, *Moment Distribution*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1963, pp. 123~129.
8. E. Kreyzig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons Inc., 1972, pp. 102~142.
9. E. Janke and F. Emde, *Tables of Functions with Formulae and Curves*, Dover Publication, 1945.
10. S.D. Conte, *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1972, pp. 22~49.
11. C.A. Brebbia and A.J. Ferrante, *Computational Methods for the solution of Engineering problems*, Prentech Press Ltd., 1978, pp. 26~89.

12. R.W. Hornbeck, *Numerical Method*, Quantum publishers Inc., 1975, pp. 64~73, 227~265.
13. 山川宏, “振動を考慮した 構造物の 最適設計について”, 日本機械學會論文集, Vol. 43, No. 372, Aug. 1977.
14. B.E. Gatewood, “Buckling loads for Columns of Variable Cross Section”, J. of the Aeronautical Sciences, Apr. 1954, pp. 287~288.
(接受: 1984. 1. 19)