

資源制約下的 工程計劃모델 (Resource Constrained Scheduling Models)

元 震 喜*

ABSTRACT

A resource constrained scheduling problem that involves trade-off between resources and time is considered. Models are presented as zero-one integer program and objectives of models include minimum project completion time and minimum total project cost.

1. 緒 論

과거에는 複合資源의 制約下에서 工程計劃을 수립함에 있어 各活動 또는 作業別로 單一工期와 單一資源 테두리 안에서 兪見의 方法(Heuristic procedure)을 用하여 計劃을 다듬어 나가는 것이 지배적이었다. (참고 [1], [4], [5], [6], [13])

최근에 와서 연속작업속도·資源함수(Continuous performance speed-resource function)에 대한 문제들을 一般적으로 다루는 연구가 進行되었고 [9], [15], 또 불연속시간-자원함수 (discrete time-resource function)에 대한 문제들이 연구되고 있다. [7], [8].

이論文에서는 한作業이 他作業에 依해서 時中斷을 허용하지 않는 (nonpreemptive) 작업조건 하에서

一般的인 工程計劃을 세우는 數式모델을 提示하였다. 時間·資源 相換문제를 두가지 面에서 焦點을 두었는데 하나는 사업공기 最小화를 위한 工程計劃이고 또다른 하나는 총사업비용을 最小화 하는 工程計劃을 時間·資源相換으로 最適計劃을 유도하는 數式모델화 한것이다.

여기서 考慮된 工程計劃은 어떻게 各作業들이 遂行되어야 하며, 즉 어떤 資源·工期(resource-duration)를 선택 (모드선택) 해야 할것이며, 언제 各活動들이 着手되고 또 完了되는가를 計劃하는 것이다. 사업공기 最小화를 첫째 모델로 택한것은 作業의 時中斷을 허용하지 않는 事業計劃의 一般성을 크게 고려했기 때문이다. [1], [4], [6], [10], [11]

2. 用語 (Notation)

數式모델을 구성함에 있어 一般性을 유지하기 위하여 Welgry [14]와 Slowinski [7, 8]의 用語를 引用하며 資源을 세가지로 分類한다.

- A. 再可用資源 (renewable resource) : 매기간마다 制限된 量의 再使用 可能한 資源 (耐久材 라고도 하며 예로서 숙련공, 治工具, 건설장비, 가설재 등)
- B. 非再可用資源 (non-renewable resource) : 事業 수행의 全期間 또는 部分期間中 一定한 制約을 받는 소모자원 (消耗材라고도 하며 原料, 施設資材, 資金 등)
- C. 二重制約資源 (doubly constrained resources) : 단위기간中의 소모량과 총소요량이 共に 制約을 받는 資源 (단위 기간中의 現金유통 - Cash flow 임대장비 비용 등)

x_{jm} : 0 - 1 整数變數

$$= \begin{cases} 1 & \text{mode } m (1 \leq m \leq M_j) \text{로서 工期 } t \text{로} \\ & \text{작업 } j \text{가 배정될 경우} \\ 0 & \text{그렇지 않을 경우} \end{cases}$$

for $j=1, 2, \dots, N$

N : 후속작업이 없는 유일한 마지막 작업 (이런 작업이 없을 경우는 하나의 mode를 갖되 工期 0, 資源 0를 갖는 假想作業 (Dummy operation)을 설정한다.)

E_j : 작업 j 의 빠른 完了시간 (Early finish time)

L_j : 작업 j 의 늦은 完了시간 (Late finish time)

E_j 또는 L_j 는 一般的인 工期計算절차로 하지만 모든 작업에 대하여 最小工期모드의 集合 (Set)으로 한다. 即 前進法과 逆進法 共に 最小工期모드를 各작업에 적용시킨다.

H : 알고 있는 發見的 (heuristic) 사업 完了 工期 (L_j 를 결정할때 $L_j = H$ 로 한다. H를 모를 경우는 L_j 를 모든 작업의 最大作業 工期의 合計로 한다.)

P : 直前の 先行작업들의 集合 (a set of immediate predecessor jobs)

d_{jm} : Mode m 으로 작업하는 活動 j 의 工期

R_{kt} : 시간 t 동안에 利用可能한 資源 k 의 總량

r_{kjm} : 모드 m 에 의한 작업 j 의 再可用 자원 k 의 使用量

W_i : 利用可能한 非再可用 자원 i 의 總량

w_{im} : 모드 m 에 의하여 작업 j 에 소모된 자원 i

의 量

S_t : 모든 t 기간中에 近似시킨 (approximated) 定額數

T : 指定된 完了 工期

V_{ijm} : 모드 m 으로 작업 j 가 시간 t 에 소비한 자원 C 의 現價 (Present value)

d_{jm} : 작업 j 가 모드 m 로 수행되는 工期

3. 事業 工期 最小化 問題의 構成

한 事業을 活動·節 그래프 (activity-on-node) 即 工程網 (Network)으로 表示함에 있어 후속活動의 번호가 前活動의 번호보다 크도록 부여한다. 指定된 工期 (stated duration) 안에 이 事業을 完了하기 위하여 各 작업들은 工程별로 可能한 時間과 소모자원의 組合 (set)을 갖는다. 各작업의 소요 工期와 소모자원의 組合 (combination)을 作業모드 (job operating mode)라고 定義한다. 이 모드의 例로서 作業 x 를 5일 안에 完了하려면 숙련공을 사용해야 하고 (또는 作業能力이 큰 機械를 使用하고) 미숙련공으로 작업시키면 (作業能力이 낮은 機械를 使用하면) 7일이 소모된다. 前者를 모드-1 (mode-1), 後者를 모드-2라고 定義한다.

事業 工期 最小化 問題를 構成함에 있어 每期間마다 再使用할수 있는 再可用資源, 各작업에서 消費되는 非再可用資源, 그리고 每期間마다와 全量이 함께 制約을 받는 소모재 即 二重制約資源의 세가지 資源制約을 함께 考慮해야 한다. 이것은 時間과 資源소비의 最小化 問題가 되기 때문이다.

工期 最小化의 目的式과 制約式은 다음과 같이 構成할 수 있다.

$$\text{Min } \sum_{m=1}^{M_j} \sum_{t=E_j}^{t^n} t x_{jm} + t_{N,M} \quad (1)$$

Subject to

$$\sum_{m=1}^{M_j} \sum_{t=E_j}^{t^n} x_{jm} = 1 \quad \text{for } j=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$$-\sum_{m=1}^{M_j} \sum_{t=E_j}^{t^n} t x_{jm} + \sum_{m=1}^{M_j} \sum_{t=E_j}^{t^n} (t-d_{jm}) x_{jm} \geq 0 \quad (3)$$

for all $(a, b) \in P$,

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M_j} \sum_{t=E_j}^{t+d_{jm}-1} r_{kjm} x_{jm} \leq R_{kt} \quad k=1, 2, \dots, K \quad (4)$$

$t=1, 2, \dots, H$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{M_j} \sum_{t=E_j}^{t^n} w_{im} x_{jm} \leq W_i \quad i=1, 2, \dots, I \quad (5)$$

(1) 은 事業工期 最小化의 目的式이며 x_{jtm} 은 作業 N이 모드 m으로 工期 t에서 이루어지는 0-1 整數變數가 된다.

(2), (3), (4), (5)는 制約式이 된다. (2)는 各活動(作業)이 正確하게 한번 수행됨을 數式化 한 것이고 (3)은 先行 作業과 후속 作業의 順序關係를 지키게 하는 制約이다. 여기서 d_{jtm} 은 作業 j가 모드 m로 수행되는 工期이며 前項은 先行 作業 a의 完了時間이고 後項은 後続 作業 b의 着手時間을 表示한다. $t-d_{jtm}$ 은 主工程에서는 0이 되고 非主工程이면 > 0 이 된다.

(4)는 再可用資源의 制約들을 모델化한 것이다. 資源 k는 單位期間中에 총량 R_{kt} 내에서 利用된다. 作業 j는 모드 m으로 可用資源 K를 r_{jkm} 만큼 消費한다.

(5)는 非再可用資源의 制約들을 表示한다. W_i 는 소모자원 i의 全事業에 配정된 총량이고 w_{jtm} 은 作業 j가 모드 m로 資源 i를 소비한 량 또는 액수이다. (4)와 (5) 共히 二重制約資源을 갖는 경우도 있다. 例컨대 주어진 모드와 지정된 作業에서 k와 i를 같은 資源형태로 볼때, (例로서 장비 임대료 나 시간당 사용료등) $r_{jkm} = w_{jtm}$ 로 할수 있다. 이런 경우 作業 j에 소비된 자원액수 i는 單位기간에 使用된 자원량 k와 同하게 取扱할수 있다.

4. 金錢的 目的함수의 構成 (Formulation of monetary objective function)

위의 Model을 약간 變動시켜서 工期最小化 模型이 아니라 金錢的인 目的함수로 變形시켜서 費用最小化問題의 模型을 構成할수 있다.

$$\text{Min} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{t=E_j}^{L_j} w_{jcm} x_{jtm} + \sum_{m=1}^M \sum_{t=E_j}^{L_j} S_t x_{jtm} \quad (6)$$

Subject to (2), (3), (4), (5) 그리고

$$\sum_{m=1}^M \sum_{t=E_j}^{L_j} x_{jtm} \leq T \quad (7)$$

(7)의 指定工期制約을 없애면 (6)은 時間과 資源을 相換하는 總事總費 最小化의 目的함수가 된다. 여기서 제1항은 直接事業가 되며 제2항은 事業間接費를 表示한다. 제1항 만을 目的式으로 할때는 最小工費工程計劃(least cost scheduling)의 目的함수가 된다. 이경우는 制約式 (5) 대신에 (7)의 制約을 받는다. (7)의 指定工期 T가 주어졌을 경우 이工期 T안에서의 총사업비 最小化의 模型이 된다. (6)에서 資源 C는 換算된 資源의 費用(cost)을 뜻하며 非可用

資源 또는 二重制約資源이 된다.

(6)의 제1항과 제2항을 합하고 (7)의 制約을 變여 버리면 従来の 時間-費用 相換의 CPM 問題가 된다. 여기서 S_t 는 모든 t에 대하여 定數로 놓을수 있으며 一般間接費外에 契約不履行罰課金(performance penalty), 早期完成에 依한 賞金(bonuses), 機公費用(opportunity cost)등을 포함시킨다.

事業수행期間이 長期에 걸칠때, 例컨대 水力 또는 核發電所, 製鐵工場, 築港등, 大型·長期工事は 絶對事業費用(absolute project cost)보다도 資金支出의 現價(present value of cash flow expenditure)가 더 重要視 된다. 이경우 目的式을 (8)로 바꾸면 된다.

$$\text{Min} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{t=E_j}^{L_j} v_{jtm} x_{jtm} \quad (8)$$

(8)은 資源 c의 支出現價를 最小化시키는 模型이며 v_{jtm} 은 作業 j가 모드 m로 工期 t에서 수행될때 支出되는 資源 c(換算된 費用)의 現價가 된다. (6)에서 S_t 도 後期別로 配分되어 支出될때는 c에 포함시킨다. 萬一 事業收入(project revenue)을 考慮할 경우는 (8)을 (9)로 代置하여 收入最大化 模型로 利用할수 있다.

$$\text{Max} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{t=E_j}^{L_j} v_{jtm} x_{jtm} \quad (9)$$

여기서는 v는 各活動에 의한 收入의 淨現價(net present value)가 된다.

위 模型外에도 目的함수와 制約式을 더 包含시켜서 利用할수 있을 것이다. 例를 들면 지연罰課金(Lateness or tardy job penalties), 資本金形成(capital budgeting), 機公費用(早期完成으로 얻는 利益) 등의 制約式을 別도로 追加할수 있다.

事業이 進行됨에 따라 費用支出이 發生되게 마련인데 이것은 陽의 資金흐름(positive cash flow)의 형태이므로 資金의 陽의 흐름의 現價를 最小化(minimize present value of positive cash flow-expenditure)를 模型로 하고 收入이 發生되는 것은 陰의 資金흐름을 最大化(Maximize present value of negative cash flow-revenue)하는 模型로 하여 利用한다. 이것은 (5)와 (8)의 부호를 陽(positive)과 陰(negative)로 利用하면 된다.

5. 結 論

이論文은 近年에 이르러 事業이 大型 및 長期化 되어가며 海外工事進出에서 얻은 功過를 反省하고 보

다 合理的인 事業管理를 위한 工程計劃을 管理科學 (management science)의 方法으로 誘導하기 위하여 計劃모형을 構成한 것이다. 이計劃모형은 作業時間이 資源配當의 函數關係를 갖인 制約下에서 工程計劃을 세우는 計劃指針을 마련한 것이다. 大型事業의 資源制約問題를 工期最小化 또는 事業費最小化를 目的으로 또는 時間-資源의 相換으로 工程計劃을 最適化 (optimization of project scheduling) 하는 目的으로 構成한 위 모형들은 整数計劃으로 計算하여 資源配當計劃을 計算할수 있음을 暗示한다. 다시 말해서 作業의 一時中斷을 許容하지 않는 作業 수행 時間(n-

onpreemptive job performance time)의 前提와 複合資源의 制約 (multiple resource constraints) 下에서 不連續時間-費用 相換 (discrete time-cost trade-off) 問題를 整数計劃 (Integer programming)으로 푸는 모형을 提示한 것이다.

管理科學의 方法導入을 갈망하는 現代 産業社會에서 特히 建設工法에 치우치고 合理的經營에 어두웠던 몇몇 建設會社의 쓰라린 經驗을 反省하고 事業管理의 科學化로 企業의 內實과 健全한 發展을 爲하여 위에 提示한 모형의 應用이 도움이 되기를 믿어 마지않는다.

References

1. Davis, E.W., and Heidorn, G.E., "An algorithm for Optimal Scheduling Under Multiple Resource Constraints", *Management Sci.*, Vol. 17, No. 12 (August 1971), pp. B-803-816.
2. Elmaghraby, S.E., *Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models*, Wiley, New York, 1977.
3. Levy, J. and Wiest, J., *A Management Guide to PERT/CPM*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.
4. Patterson, J.H. and Huber, D., "A Horizon-Varying, Zero-One approach to Project Scheduling", *Management Sci.*, Vol. 20, No. 6 (February 1974), pp. 990-998.
5. Paterson, J.H. and Ruth, G.W., "Scheduling a Project Under Multiple Resource Constraints: A Zero-One Programming Approach", *AIIE Trans.* Vol. 8, No. 4 (December 1976), pp. 449-455.
6. Pritsker, A.B., Watters, L. J. and Wolfe, P.M., "Multiproject Scheduling with Limited Resources A Zero-One Programming Approach", *Management Sci.*, Vol. 16, No. 1 (September 1969), pp. 93-108.
7. Slowinski, R., "Two approaches to Problems of Resource Allocation Among Project Activities-A Cooperative Study", *European J. Operational Res. Soc.*, Vol. 31, No. 8 (August 1980), pp. 711-723.
8. Slowinski, R., "Multiproject Network Scheduling with Efficient Use of Renewable and Non-renewable Resources", *European J. Operational Res.*, Vol. 7, No. 3 (July 1981), pp. 265-273.
9. Slowinski, R. and Weglarz, J., "Solving the Central Project Scheduling Problem with Multiple Constrained Resources by Mathematical Programming", *Proc. 8th IFIP Conf. on Optimization Techniques*, Lecture Notes in Control and Information Science, Vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, 1978, pp. 278-289.
10. Stinson, J., "A Branch and Bound Algorithm for a General Class of Resource Constrained Scheduling Problems", *AIIE Conf. Proc.*, Las Vegas, Nevada, 1975, pp. 337-342.
11. Talbot, F. B. and Patterson, J.H., "An Efficient Integer Programming Algorithm with Network Cuts for Solving Resource-constrained Scheduling Problems", *Management Sci.*, Vol. 24, No. 11 (July 1978), pp. 1163-1174.
12. Talbot, F.B. and Patterson, J.H., "Project Scheduling with Resource Duration Interaction: The Nonpreemptive case", *Working Paper*, The Graduate School of Business Administration, The

University of Michigan, January, 1980.

13. Weglarz, J., Blazewicz, J., Cellary, W. and Slowinski, R., "An Automatic Revised Simplex Method of Constrained Resource Network Scheduling", *ACM Trans. Math. Software*, Vol. 3, No. 3 (September 1977), pp. 295-300.
14. Weglarz, J., Blazewicz, J., Cellary, W. and Slowinski, R., "New Models and Procedures for Resource Allocation Problems", *Proc. 6 INTERNET Congress 2*, VDI-Verlag, Dusseldorf, 1979, pp. 521-530.
15. Weglarz, J., Blazewicz, J., Cellary, W. and Slowinski, R., "Control in Resource Allocation Systems", *Foundations Control Engineering*, Vol. 5, No. 3 (September 1980), pp. 159-180.