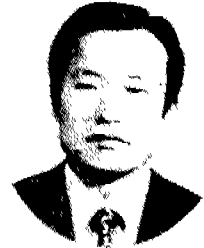


# 重電機의 設計에 따른 電界, 磁界 分布 特性解析을 위한 基本理論의 適用方法

(上)

任 達 鎬

漢陽大學校 工科學 教授



本研究는 電氣機器의 設計時에 必要한 資料가 되는 電界, 磁界 分布特性을 解析하기 위하여 數值解析法의 한 方法인 有限要素法을 適用한 것으로서, 電氣機器를 變壓器, 直流機, 同期機 및 誘導機로 大別하여 各各의 解析 模型을 選定하고 또한 이에 대한 對稱性 및 週期性을 考慮하여 2次元의 解析領域을 決定하였으며 電磁界의 基本方程式으로부터 이 解析模型을 解析하기 위한 模型方程式을 誘導하였다.

## 1. 序 論

電氣機器의 電界, 磁界 分布特性을 解析하는 데는 有限要素法, 有限差分法, 積分方程式法, 境界要素法 등과 같은 여러 種類의 方法이 있으나 本研究는 그 中에서도 特히 有限要素法을 利用하여 그 特性을 解析한 것이다.

有限要素法은 元來 1950年代에 航空機의 機體強度를 計算하기 위하여 構造工學 分野에서 부터 發展한 것으로서 大容量 電子計算機의 出現에 의하여 막대한 計算量을 갖는 복잡한 境界值問題들도 비교적 쉽게 處理할 수 있게 되어 점점 그 應用範圍가 擴大되어 왔다.

이처럼 有限要素法에 의한 解析方法이 構造工學 分野에서 상당한 進展을 가져옴에 따라 이와 類似한 偏微分方程式이 成立하는 他 科學技

術 分野에서도 이 方法을 適用하게 되었는데, 이러한 偏微分方程式들은 주로 連續媒質 中の 物理的인 諸 現象을 나타내는 界方程式(Field Equation)이 되며 電氣工學 分野에서는 特히 Poisson, Laplace 및 Helmholtz 方程式의 形態로 많이 나타나고 있다.<sup>1)~4)</sup>

從來에는 이러한 方程式들로부터 電氣機器의 電界, 磁界 分布特性을 解析하기 위해서 等角寫象法, 導電紙法, Graph法, Analog法 등<sup>1)~2), 5)~6)</sup>의 解析的인 方法이 많이 使用되어 왔으나 電子計算機의 出現 以後에는 有限差分法,<sup>7)</sup> 積分方程式法<sup>8)</sup> 등과 같은 數值解析法을 많이 使用하게 되었다. 그러나 高에너지密度의 電氣機器에 대한 精度높은 解析에 있어서는 이와 같은 解析方法으로는 不充分한 點이 많아 이에 대한 代案의 하나로 1972年 McGill 大學의 P. Silvester 教授가 電氣機器의 磁束分布 特性解析에 有限要素法의 適用<sup>11)</sup>을 提示하였으며 그것을 始初로 하여 電氣工學 分野에서 有限要素法의 適用이 상당한 發展을 가져 오게 되었다.

有限要素法은 위의 方程式들을 解析하기 위하여 連續媒質중에 微小要素를 設定하여 要素내에서의 物理量을 우선 量的인 近似式으로 나타내고 要素를 無限히 작게 한 極限에 있어서 近似式이 正確한 關係에 收斂한다고 하는 理論에서부터 出發하였으며, 그 基礎가 되는 微小要素는 無限小要素(Infinitesimal Element)이었

다. 電子計算機의 出現 以後에는 連續媒質을 微小要素로 分割하는 過程에서 이것을 無限小要素까지 極限化하지 않고 有限要素로 分割한 다음, 要素내의 狀態를 記述하기 위하여 微分을 差分에 依하여 近似化하여 微分方程式을 解析하였는데 이것이 有限差分法이며 이 方法에서의 有限要素는 크기가 一定한 長方型으로 되는 것이 보통이었다. 그러나 長方型의 有限要素를 使用하면 媒質의 境界가 長方型이 아닌 경우에는 適用이 困難하고 境界에 있어서의 近似가 좋지 않게 되는 缺點이 생기게 된다. 有限要素法에서는 有限要素가 3角型(3次元의 경우에는 4面體) 혹은 4角型이 되므로 3角要素를 使用하면 折線近似에 의해 境界에 잘 附合시킬 수 있어 近似式을 正確한 關係式에 보다 가깝게 接近시킬 수 있다.

有限要素法에 있어서 3角要素를 使用하는 경우에는 要素내에서의 解析函數를 3個의 頂點에 있어서의 函數值의 線型 1次組合에 의해 近似化하고 各 頂點에 있어서의 函數值를 未知數로 하는 多元聯立方程式 形態의 界方程式을 구하며 이때 多元聯立方程式의 係數를 決定하기 위해서는 變分理論을 利用한다.

一般的으로 電氣工學의 問題에 나타나는 偏微分方程式의 解는 變分理論에 있어서 汎函數(媒質중의 Energy를 부여하는 函數)에 極小值를 부여하는 Euler方程式의 解와 一致하므로 이 關係를 利用하여 多元聯立方程式을 誘導한다.

또한 變分理論이 반드시 成立하지 않는 物理나 工學의 分野에서는 加重殘差法(Weighted Residual Method)을 使用하여도 多元聯立方程式을 誘導할 수 있는데 加重殘差法 중에서도 특히 Galerkin理論을 使用하면 變分理論에서 구한 것과 같은 形態의 多元聯立方程式을 誘導할 수 있다.

本研究에서는 變壓器, 直流機, 同期機, 誘導機를 각각 解析 모델로 하여 變分理論 혹은 加重殘差法에 의해 多元聯立方程式을 誘導하고 數值解析法에 의해 이의 結果를 구하였으며 비교적 計算量이 많지 않은 變壓器의 경우를 선택하여 非線型 磁束分布特性을 解析하여 보았고 直流機, 同期機, 誘導機의 경우에는 幾何學的 및

電氣的인 對稱性을 考慮하여 週期條件을 適用하였다.

또한 電氣機器에 있어서의 電界分布 및 磁界分布는 各各 다른 形態의 基本方程式을 根據로 하여 解析하게 되지만 結局 주어지는 方程式의 形態는 비슷한 모양이 되므로, 本 研究에서는 電界 및 磁界의 경우에 대해 각각 基本方程式에서부터 出發하여 解析모델을 解析하기 위한 모델方程式을 誘導하였고, 그 後에 有限要素法의 適用過程에서는 電氣機器의 解析目的上 또는 設計上에 重要한 資料가 될 수 있는 磁界分布特性, 즉 磁束分布特性에 대해서 集中的으로 理論을 展開해 나가고 있다.

그러므로 電界分布解析이 꼭 必要한 경우에는 磁束分布理論 展開過程에서 導入된 變數들만 電界에서의 變數로 바꾸어 놓고 해석하면 電界分布特性의 解析도 磁束分布特性解析의 경우와 같은 方法으로 處理해 나갈 수 있다.

## 2. 解析모델

### 2-1 解析모델의 設定

一般的인 構造의 電氣機器는 珪素鋼板을 成層하여 鐵心을 構成시켰기 때문에 鐵心端部에서의 端部效果를 無視한다면 어느 斷面을 취하더라도 電界, 磁界의 分布特性은 거의 같게 되며, 軸方向의 分布特性은 거의 無視되므로 2次元의 解析이 可能하게 된다.

그러므로 幾何學的 및 電氣的 對稱性을 考慮하여 各 機器에 해당하는 解析모델을 2次元의 으로 나타내면 다음과 같이 된다. 여기에서 座標系는 右手直角座標系를 使用한다.

#### (1) 變壓器

變壓器의 解析 모델은 그림 2·1과 같은 單相外鐵型을 選擇하였다.

또한 解析領域은 幾何學的 및 電氣的인 對稱性을 考慮하여  $x-y$ 平面上의 第1象限에 해당하는 領域으로 하였다.

#### (2) 直流機

直流機의 解析 모델은 그림 2·2와 같이 補償

捲線과 補極을 가진 4極 回轉電機子型 直流電  
動機를 選擇하였으며 解析領域은 對稱性을 考慮  
하여 1極分인 1/4에 해당하는 領域을 取하였다.

(3) 同期機

同期機의 解析모델은 그림 2·3과 같은 2極

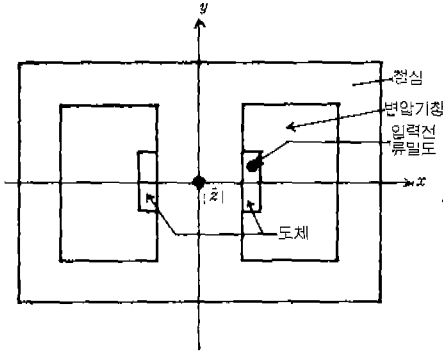


그림 2·1 변압기해석모델

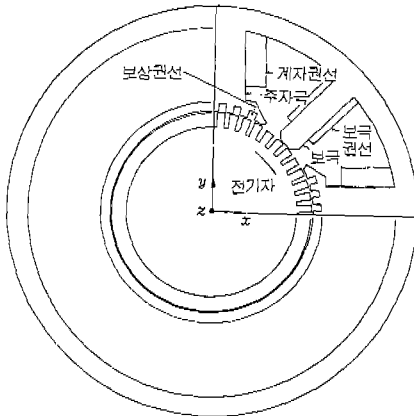


그림 2·2 직류기의 해석모델

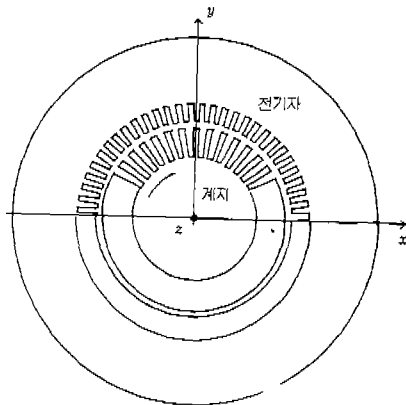


그림 2·3 동기기의 해석모델

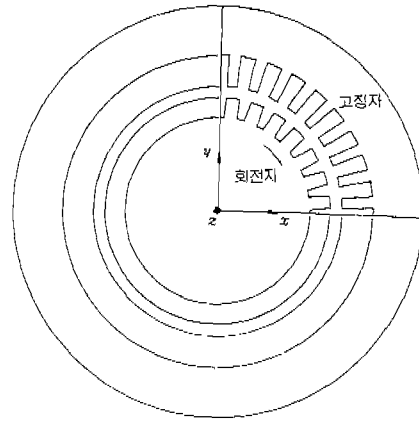


그림 2·4 유도기의 해석모델

回轉界子型 非凸極 同期發電機를 選擇하였고,  
또한 解析領域은 對稱性을 考慮하여 1極分에 해  
당하는 1/2의 領域을 取하였다.

(4) 誘導機

誘導機의 解析 모델은 그림 2·4와 같이 3극,  
4極 捲線型 誘導電動機를 選擇하였으며 解析領  
域을  $x-y$ 平面의 第1象限에 해당하는 1/4의 領  
域으로 하였다.

2-2 解析상의 假定 (1)~(7), (1)~(7), (1)

2-1節에서 設定한 解析 모델을 有限要素法  
으로 解析하기 위해 각 解析 모델에 대해 다음  
과 같은 假定을 둔다.

(1) 變壓器

i) 入力電流密度는  $z$ 軸方向의 成分만을 갖  
는다.

ii) 導體는 連續된 斷面積을 가지며 電流密度  
는 一定하다.

iii) 鐵心에서의 Hysteresis損失은 무시하며  
磁化特性은 面積을 가지지 않는 曲線의 形態이  
다.

iv) 透磁率은 等方性이다.

v) 磁界는 準定常狀態로서 變位電流는 없는  
것으로 한다.

(2) 直流機, 同期機 및 誘導機

i) 固定子 및 回轉子は  $z$ 軸方向으로 無限히

延長되어 있다.

ii) 各捲線의 電流密度는  $z$ 軸方向으로만 存在한다.

iii) 鐵心에서의 磁氣的인 飽和를 無視하며 透磁率은 單一值를 갖는다.

iv) 回轉子의 回轉方向은 時計方向으로 한다.

v) 電流導體는 渦流 및 表皮效果를 無視한다.

vi) 機械의 外部 周圍磁界는 無視한다.

vii) 모든 界變數들은 時間에 대해 正弦的으로 變化하며, 入力電流密度는 空間的으로도 正弦的이다.

### 3. 基本方程式<sup>10)</sup>

#### 3-1 電界計算의 基本方程式

空間電荷密度  $\rho$ 가 주어졌을 때 任意의 點에서 發散하는 電束密度  $D$ 는 電界에 대한 Gauss 法則의 微分形에서

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (3.1)$$

로 주어진다.

또한 電界強度  $E$ 와 電束密度  $D$ 와는

$$D = \epsilon E \quad (3.2)$$

인 관계가 있으며  $\epsilon$ 은 媒質에서의 誘電率이다.

電界에 대한 스칼라퍼텐셜을  $V$ 라 定義하면

$$E = -\nabla V \quad (3.3)$$

의 관계가 成立하므로 위의 式들로부터 式(3-1)은

$$\nabla \cdot D = \nabla \cdot \epsilon E = \nabla \cdot \epsilon (-\nabla V) = \rho$$

에서

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho \quad (3.4)$$

로 되어 電界에서의 非線型 Poisson 方程式이 誘導된다.

이 式(3.4)가 電氣機器에 있어서의 電界를 解析하기 위한 基本方程式이 된다.

式(3.4)를 電氣機器의 電界解析을 위해 2次的으로 展開하면

$$\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon \frac{\partial V}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon \frac{\partial V}{\partial y}) = -\rho \quad (3.5)$$

가 되는데, 이 式이 解析 모델을 解析하기 위한 모델方程式이 된다.

#### 3-2 磁界計算의 基本方程式

變位電流가 無視되는 準定常狀態 (Quasi-Steady State)에서 電流密度  $J$ 에 의해 發生되는 磁界強度  $H$ 는 Ampere의 法則으로부터

$$\nabla \times H = J \quad (3.6)$$

로 된다. 여기에서 磁界強度  $H$ 와 磁束密度  $B$ 와는

$$H = \frac{1}{\mu} B \quad (3.7)$$

인 관계가 있으며  $\mu$ 는 媒質에서의 透磁率이다.

또한 Gauss 法則에서

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3.8)$$

이며 이것은 磁束의 連續性을 意味한다.

여기에 벡터의 定理를 利用하면 다음과 같은 關係가 成立한다.

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

즉, 任意의 벡터  $F$ 의 回轉(rotation 또는 curl)에 發散(divergence)을 취하면 항상 零이 된다.

이 關係를 式(3.8)에 適用하면

$$B = \nabla \times A \quad (3.9)$$

되는 벡터  $A$ 를 定義할 수 있는데 이것을 벡터 퍼텐셜(Vector Potential)이라 한다.

微小電流素로부터 距離  $R$ 만큼 떨어진 點의 벡터퍼텐셜  $A$ 를 Biot-Savart 法則으로부터 구하면 다음과 같다.

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_0} \frac{J}{R} dv \quad (3.10)$$

여기서  $dv$  및  $J$ 는 각각 微小電流素의 體積 및 電流密度이다. 이 式으로부터 벡터퍼텐셜  $A$ 의 方向은 電流密度  $J$ 의 方向과 같다는 것을 알 수 있다.

이상과 같은 關係로부터 式(3.6)은 다음과 같이 된다.

$$\nabla \times H = \nabla \times \frac{1}{\mu} B = \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J \quad (3.11)$$

여기에서 벡터의 定理를 利用하면

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) &= \nabla \left( \frac{1}{\mu} \nabla \cdot A \right) - \left( \nabla \cdot \frac{1}{\mu} \nabla \right) A \\ &= J \end{aligned} \quad (3.12)$$

가 되는데 定常狀態의 경우에는  $\nabla \cdot A = 0$  이므로 式(3.12)는

$$\left( \nabla \cdot \frac{1}{\mu} \nabla \right) A = -J \quad (3.13)$$

의 非線型 Poisson 方程式으로 된다.

이 식(3-13)이 電氣機器에 있어서의 磁界를 解析하기 위한 基本方程式이 된다.

### 3-3 磁界解析을 위한 모델方程式

#### (1) 變壓器, 直流機, 同期機

2-2節의 假定에 의하면 入力電流密度  $J$ 는  $z$ 軸方向 成分만 存在하므로 식(3-10)에 의하여 벡터퍼텐셜  $A$ 도  $z$ 軸方向의 成分만을 갖게 된다.

따라서 入力電流密度  $J$  및 벡터퍼텐셜  $A$ 의  $z$ 軸方向 成分을 각각  $J$ ,  $A$ 라 하면

$$J = Jk$$

$$A = Ak$$

로 되고 식(3-13)은 다음과 같이 된다.

$$(\nabla \cdot \frac{1}{\mu} \nabla) Ak = -Jk \quad (3-14)$$

여기에서  $k$ 는  $z$ 軸方向의 單位벡터이다. 또한 2次元的으로 解析하는 경우에는  $x$ 軸 및  $y$ 軸方向의 單位벡터를 각각  $i$  및  $j$ 라 하면

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j$$

로 表示되므로 식(3-14)는 다음과 같이 整理된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nu \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial A}{\partial y}) = -J \quad (3-15)$$

여기에서  $\nu = 1/\mu$ 로서 透磁率의 逆數, 즉 磁氣抵抗率(Magnetic Reluctivity)를 나타낸다.

이 식이 變壓器, 直流機 및 同期機를 解析하기 위한 모델方程式이 된다.

식(3-15)을 電界解析을 위한 모델方程式(3-5)와 比較해 보면 스칼라퍼텐셜  $V$ 가 벡터퍼텐셜  $A$ 에, 공간전하밀도  $\rho$ 가 入力電流密度  $J$ 에, 또 誘電率  $\epsilon$ 이 磁氣抵抗率  $\nu$ 에 각각 對應되고 있어 식(3-15)를 이용하여 磁界分布를 解析하는 過程을 식(3-5)를 이용하여 電界分布를 解析하는 경우로 擴張시켜 一括的으로 處理할 수 있게 된다.

#### (2) 誘導機

誘導機의 경우에는 回轉子의 捲線에

$$J_1 = \sigma(E + v \times B) \quad (3-16)$$

로 表現되는 誘導電流  $J_1$ 가 發生하게 된다. 여기에서  $\sigma$ 는 回轉子 捲線의 導電率이며  $v$ 는 回轉子의 移動速度를 나타내고 또한 電界強度  $E$ 는

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3-17)$$

의 關係가 있다.

式(3-17)과 (3-9)에서

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times A) = \nabla \times \left(-\frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

이므로

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t}$$

로 되고

이것을 식(3-16)에 代入하면

$$J_1 = \sigma \left(-\frac{\partial A}{\partial t} + v \times B\right)$$

$$= \sigma \left\{-\frac{\partial A}{\partial t} + v \times (\nabla \times A)\right\} \quad (3-18)$$

가 된다.

식(3-18)에서  $v$ 는 回轉子의 移動速度를 나타내므로 이 때의 Slip을  $s$ , 同期速度를  $v_s$ 로 나타내면 식(3-18)은

$$J_1 = \sigma \left\{-\frac{\partial A}{\partial t} + (1-s) v_s \times (\nabla \times A)\right\}$$

$$= \sigma \left\{-\frac{\partial A}{\partial t} + v_s \times (\nabla \times A) - s v_s \times (\nabla \times A)\right\} \quad (3-19)$$

로 된다.

식(3-19)의 右邊 第1項  $\sigma \frac{\partial A}{\partial t}$ 는 回轉子 停止時에, 磁束密度  $B$ 의 時間的 變化에 의해 發生되는 變壓器 起電力에 의한 誘導電流이며, 第2項  $v_s \times (\nabla \times A)$ 는 磁束密度  $B$ 가 同期速度  $v_s$ 로 移動할 때 回轉子의 捲線에 發生되는 速度起電力에 의한 誘導電流이므로 결국 이 두 電流는 같은 量이 되어

$$\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \sigma v_s \times (\nabla \times A) \quad (3-20)$$

가 된다.

그러므로 식(3-21)을 식(3-19)에 代入하면

$$J_1 = -\sigma s v_s \times (\nabla \times A)$$

$$= -\sigma s \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3-21)$$

로 第3項만이 남게 된다.

또한 假定에 의해 모든 電流密度와 벡터퍼텐셜은  $z$ 軸方向 成分만을 가지므로 誘導電流密度

$J_k$ 의  $z$ 軸方向 成分을  $J_i$ 라 하면

$$J_i k = -\sigma s \frac{\partial A}{\partial t} k$$

에서

$$J_i = -\sigma s \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.22)$$

가 된다.

誘導機를 有限要素法으로 解析하는 경우에, 固定子側에서는 式(3.15)를 適用하여야 하고 回轉子側에서는 式(3.22)를 이용한

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J_i$$

즉,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = +\sigma s \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.23)$$

를 適用하여야 하므로 解析모델을 解析하기 위해서는 數值解析의 一括하여 處理하기 爲한 式(3.15)와 (3.23)을 組合하는 것이 必要하다. 이렇게 두 方程式을 組合하여 하나의 方程式으로 再構成하면

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -(J + J_i)$$

즉,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -(J - \sigma s \frac{\partial A}{\partial t}) \quad (3.24)$$

으로 되며 이 式(3.24)가 誘導機를 解析하기 위한 모델方程式이 된다.

#### 4. 有限要素法の 適用

##### 3-1 要素分割<sup>3)-4), 8), 11)</sup>

式(3.24)와 같은 벡터퍼텐셜  $A$ 에 대한 偏微分方程式을 有限要素法으로 풀기 위해서는 우선 全解析領域을 要素分割해야 한다.

一般的으로 有限要素法에 使用되는 2次元의 有限要素는 주로 1次3角要素가 많이 使用되고 있으나 解析領域의 境界에 따라서는 4角要素를 쓸 수도 있으며, 또한 精度 높은 解析을 위해서는 高次要素, 또 曲線境界를 가지는 解析領域에는 曲線型要素(Curve Linear Element)를 使

用할 수도 있다.

各種의 2次元 要素에 대해서 說明하면 다음과 같다.

##### (1) 1次3角要素

한 要素내의 任意的 點  $P(x, y)$ 에 대한 벡터퍼텐셜  $A$ 를 그 點에서의 座標  $x, y$ 에 대한 1次完全多項式으로 近似化하면

$$A = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (4.1)$$

와 같이 되는데 여기서  $a_i (i=1, 2, 3)$ 는 각 節點의 座標와 그 點의 벡터퍼텐셜  $A$ 에 의해 決定되는 係數이다.

이 係數를 決定하기 위해서는 그림 4.1과 같은 各辺이 直線이고 各頂點에서 節點을 가지는 3角型要素를 使用할 必要가 있는데 이것을 1次3角要素라 한다.

##### (2) 高次多項要素

한 要素내의 任意的 點  $P(x, y)$ 에 대한 벡터퍼텐셜  $A$ 를 그 點에서의 座標에 대하여 2次完全多項式으로 近似化하면

$$A = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy \quad (4.2)$$

와 같이 된다.

式(4.2)의 係數  $a_i (i=1 \sim 6)$ 를 구하기 爲해 各 邊이 直線이고 節點을 6個 가지는 要素를 그려 보면 그림 4.2와 같은 各頂點 및 各 邊의 中點에 節點을 갖는 3角要素가 되는데 이것을 2次3角要素라 한다.

또한 式(4.2)에서 幾何學的 等方性(Geometric

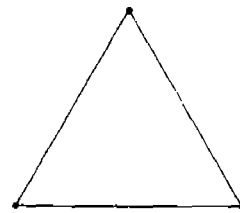


그림 4.1 1차3각요소  
Fig 4-1 Linear triangular element

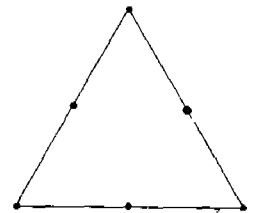


그림 4.2 2차3각요소  
Fig 4-2 Quadratic triangular element

Isotropy)<sup>11)</sup>을 考慮하여

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (4 \cdot 3)$$

혹은

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 \quad (4 \cdot 4)$$

인 多項式으로 벡터퍼텐셜 A를 近似하면, 式(4·3)의 係數를 決定하기 위해서는 各 邊이 直線이고 各 頂點에 節點을 가지는 그림 4·3과 같은 4角要素를 使用해야 하는데 이것을 1次4角要素라 한다.

또 式(4·4)의 係數를 決定하기 위해서는 各 邊이 直線이고 各 頂點 및 内部 中心에 節點을 가지는 그림 4·4와 같은 4角要素를 使用해야 하는데 이것을 2次4角要素라 한다.

### (3) 曲線型要素

解析領域의 境界가 曲線의 形態로 주어진 경우에는 그림 4·5와 같이 各 邊이 曲線의 形態가 되는 高次要素, 즉 曲線型要素를 使用하면 적은

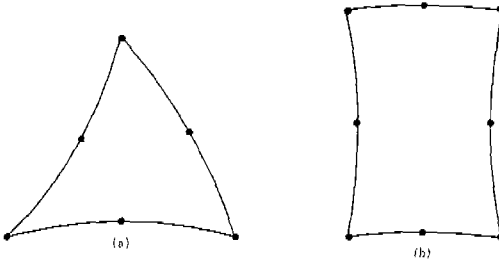


그림 4·5 곡선형 요소  
Fig 4·5 Curved element

을 해야 하는 問題가 發生한다.

以上에서 說明한 要素外에도 벡터퍼텐셜 A의 1階微分値, 즉 磁束密度값까지도 구할 수 있는 Hermite要素 등 多數의 有限要素가 있으나 本 研究에서는 보편적으로 많이 使用하고 있는 1次3角要素(以下 三角要素라 한다)를 使用하여 有限要素法을 處理하기로 한다.

#### 4-2 解析函數의 近似化<sup>3), 8), 11)</sup>

그림 4·6과 같이 分割된 各 三角要素(e)의 内部에서는 벡터퍼텐셜 A가 線型的으로 變한다고 假定하고 試行函數(Trial Function)를 1次로 하면 한 要素내의 任意의 點에 대한 벡터퍼텐셜值

要素數로써 境界의 形狀을 더 잘 表現할 수 있다.

이 要素는 境界의 形狀을 表現하기 위해 使用하는 近似式과 要素내의 벡터퍼텐셜 A를 座標 값으로 近似化하기 위해 使用되는 式(4·4)가 반드시 一致하지는 않아도 좋으나 一般的으로는 兩者가 一致하는 要素를 使用할 때가 많다.

그러나 이 曲線型要素를 使用하게되면 多元 聯立方程式의 係數를 구하는 過程에서 數值積分



그림 4·3 1次4角요소  
Fig 4·3 Linear rectangular element

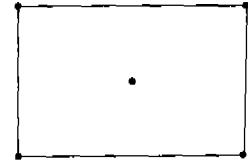


그림 4·4 2次4角요소  
Fig 4·4 Quadratic rectangular element

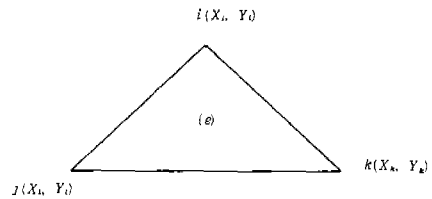


그림 4·6 삼각요소(e)  
Fig 4·6 Triangular element (e)

$A^e(x, y, t)$ 는 다음과 같이 近似化된다.

$$A^e(x, y, t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)x + \alpha_3(t)y \quad (4 \cdot 5)$$

이것을 行列의 形態로 表示하면

$$A^e(x, y, t) = [P(x, y)] \{ \alpha(t) \} \quad (4 \cdot 6)$$

이며 여기에서

$$[P(x, y)] = [1 \ x \ y]$$

$$\{ \alpha(t) \} = \begin{Bmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{Bmatrix}$$

이다. 이 近似化된 벡터퍼텐셜值  $A^e(x, y, t)$ 를 三角要素에서의 節點의 벡터퍼텐셜值  $A_p(t)$  ( $p = i, j, k$ )로 나타내기 위해 式(4·5)에 各 節點

의 座標값을 代入하면

$$\begin{aligned} A_i(t) &= \alpha_1(t) + \alpha_2(t)X_i + \alpha_3(t)Y_i \\ A_j(t) &= \alpha_1(t) + \alpha_2(t)X_j + \alpha_3(t)Y_j \\ A_k(t) &= \alpha_1(t) + \alpha_2(t)X_k + \alpha_3(t)Y_k \end{aligned} \quad (4 \cdot 7)$$

이고 이것을 行列로 表現하면

$$\{A_p(t)\} = [G] \{\alpha(t)\} \quad (4 \cdot 8)$$

이며 여기에서

$$\{A_p(t)\} = \begin{Bmatrix} A_i(t) \\ A_j(t) \\ A_k(t) \end{Bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}$$

이다. 식(4·8)을 식(4·6)에 代入하여 整理하면

$$A^e(x, y, t) = [P(x, y)] [G]^{-1} \{A_p(t)\} \quad (4 \cdot 9)$$

를 얻게 되는데  $[P(x, y)] [G]^{-1} = [N_p(x, y)]$  라 놓으면 식(4·9)는

$$A^e(x, y, t) = [N_p(x, y)] \{A_p(t)\} \quad (4 \cdot 10)$$

가 된다. 여기에서

$$[N_p(x, y)] = [P(x, y)] [G]^{-1} = [1 \times y] \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} (X_j Y_k - X_k Y_j) + (Y_j - Y_k)x \\ + (X_k - X_i)y, (X_k Y_i - X_i Y_k) \\ + (Y_k - Y_i)x + (X_i - X_k)y, \\ (X_i Y_j - X_j Y_i) + (Y_i - Y_j)x \\ + (X_j - X_i)y \end{bmatrix} \quad (4 \cdot 11)$$

이며  $\Delta$ 는

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}$$

로서 三角要素(e)의 面積을 나타낸다. 또

$$[N_p(x, y)] = [N_i(x, y), N_j(x, y), N_k(x, y)]$$

라 놓으면 식(4·10)은

$$A^e(x, y, t) = \sum_{p=i}^k N_p(x, y) A_p(t) = N_i(x, y) A_i(t) \\ + N_j(x, y) A_j(t) + N_k(x, y) A_k(t) \quad (4 \cdot 12)$$

가 된다.

이 식(4·12)가 三角要素의 各節點 벡터퍼텐셜 值  $A_p(t)$  ( $p=i, j, k$ )로 表示한 要素에서의 近

似化된 벡터퍼텐셜值  $A^e(x, y, t)$ 의 表現式이다. 여기서  $N_p(x, y)$ 를 補間函數(Interpolation Function) 또는 形狀函數(Shape Function)라 하며 식(4·11)로부터

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$N_j(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \quad (4 \cdot 13)$$

$$N_k(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y)$$

이고 여기에서

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad b_i = Y_j - Y_k, \quad c_i = X_k - X_j$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad c_j = X_i - X_k$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad c_k = X_j - X_i$$

이다.

이와 같이 三角要素(e)에 의해 벡터퍼텐셜值를 線型으로 近似化하면, 即 試行函數를 1次로 하면 各要素의 境界上에는  $C^0$  連續性<sup>3), 4)</sup>이 滿足하므로 連續系를 區間連續化하여 全 領域을 解析할 수 있다.

그러나 區間連續에서는 線型補間을 하였으므로 比較的 變化가 심한 領域에서는 要素數를 增加하여야만 誤差를 減少시킬 수 있으나 要素數가 增加하면 그 만큼 計算機의 記憶容量 및 計算時間이 늘어나기 때문에 誤差 許容範圍내에서 適切한 要素數를 擇하는 것이 바람직하다.

(다음호에 계속)

