

|||||||
論 文
|||||||

外部로 환이 있는 垂直二重管内의 混合對流 流動에 關한 數值的 研究

孫尚錫,*李采汶,**任將淳***

Numerical Analysis on Combined Convection for a
Vertical Cocentric Cylinder with External Fins.

Sang Suk Sohn,* Chae Moon Lee**and Jang Soon Yim***

ABSTRACT

The motion of a fluid in the closed annular cavity formed by two concentric vertical cylinders with externally finned tube has been analysed by a numerical solutions of the equation of momentum and energy. For the calculation procedure, the fluid is assumed to have constant thermo-dynamic and transporties except for the density, which is temperature-dependent in the buoyancy term of the vertical momentum equation (Boussinesq approximation). The governing equations for velocity and temperature are solved by a finite difference technique which incoorporates a scheme for treating the coupled variables. Results are presented for a range of the Rayleigh number and for various values of the fin height and the number of fins.

* 인하대학교, 대학원

** 정회원, 유한공업전문대학

*** 정회원, 인하대학교

NOMENCLATURE

- D : outer tube radius
- d : inner tube radius
- De : equivalent hydraulic diameter of channel
- f : friction factor
- h : fin height
- hc : heat transfer coefficient
- H : dimensionless fin height
- N : number of fins
- r : radial coordinate
- R : dimensionless radial coordinate
- T_b : bulk temperature of the fluid
- T_w : tube wall and fin temperature
- W : axial velocity of the fluid
- β : coefficient volumetric expansion of the fluid
- Γ : general diffusion coefficient
- γ : distance of direction wall of fin
- θ : angular coordinate
- θ_o : half the angular spacing between the fins
- Θ : dimensionless temperature
- φ : general dependant variable
- η : the variable (πΩθ)
- Ω : dimensionless axial velocity
- $\bar{\Omega}$: average dimensionless velocity

subscripts

- R : R-direction
- θ : θ-direction
- f : value at fin
- O : value at zero Rayleigh number

Dimensionless Groups

- fRe : Pressure drop parameter

- Nu : Nusselt number
- Re : Reynolds number
- Ra : Rayleigh number

1. 서 론

내부에 환이있는 관은 열 교환기에서 전열면적을 넓힘으로써 열전달율을 향상시키기 위하여 폭넓게 사용되고 있으며, Thermosyphon흐름에서도 열 전달율을 향상시키기 위하여 이용할 수 있다. 열 교환기의 관로가 수직 원형관일 경우 흐름에 미치는 부력의 영향은 유량이 적어 질수록, 벽과 유동 유체의 온도차가 클수록 무시할 수 없게 된다. 즉 Thermosyphon흐름처럼 유체의 흐름 속도가 비교적 늦어서 부력을 무시할 수 없을 때는 혼합대류 문제로서 유동 및 열전달을 해석 해야만 한다.

이러한 혼합대류에 관한 최근 까지의 연구는 1959년 Morton, B.R.(1)은 환이 없는 수직 원형관에서 강제 대류에 미치는 자연 대류의 영향을 수치적 방법으로 연구
 1962년 Kemeny, G.A.(2)등은 수직 원형관에서의 혼합 대류에 관한 실험적 연구를 행하였다.
 1969년 Thomas, R.W.(3)는 환이 없는 수직 이중관 내의 대류 유동 특성을 해석적으로 연구
 1978년 Patankar, S.V.(4)와 1971년 Achaya, S.(5)는 Shrouded fin array에서의 흐름 및 유동 특성을 층류 흐름에 대해 연구
 1980년 Soliman, H.M.(6)과 Prakash, C.(7)는 내부로 환이 있는 수직 원형관에서의 혼합대류 문제에 관한 수치적 연구를 하였다.
 본 연구에서는 외부로 환이 있는 내부관은 열 유속이 주어지고 외부 관은 단열된 수직 이중관 내의 충분히 발달된 층류 유동의 흐름 및 열전달 특징을 해석하여, 외부로 환이 있을때와 내부로 환이 있을때 그리고 환의 높이와 환의 수에 따른 변화를 비교 분석 하려고 한다.

2. 이론적 연구

2-1 Modeling

본 연구에서 이용한 수직 이중관의 단면을 Fig.1에 나타냈다. 수직 이중관내 유체 유동

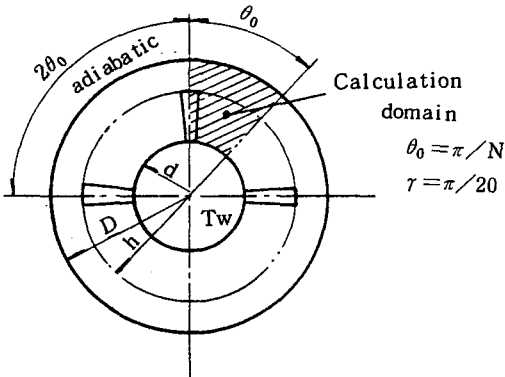


Fig.1 Concentric cylinders with externally finned tube and calculation domain

현상을 물리적 의미에서의 변화를 적게 하며 수식화하기 위해 다음을 가정했다.

- 흐름은 충분히 발달된 층류 흐름이다.
- 내부관의 온도는 모두 일정하다. 즉 열전도 계수가 매우크다.
- 유체의 성질은 부력항에서 밀도의 변화를 제외하고는 일정하다. (Bossinesq의 가정)
- 유체는 비압축성 유체이다.
- Z-방향으로의 온도 기울기는 선형적으로 변화된다. (열유속이 일정)

2-2 지배방정식

수직 이중관내의 유동 및 열전달 특징을 해석하기 위해 정상상태, 비압축성, 층류유동 일때의 운동량 방정식과 에너지 방정식을 r-θ 좌표계에 대해쓰면

Z-방향 운동량 방정식

$$\frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) =$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Z} \right) + \rho_w \{ 1 + \beta(T_w - T) \} g_z \dots\dots\dots (1)$$

경계조건

$$\left. \begin{aligned} \text{at } \theta = 0 \text{ or } \theta = \theta_0 \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} &= 0 \\ \text{r} = d \text{ or } \text{r} = D \quad W &= 0 \\ \theta = \gamma \text{ and } r \leq h \quad W &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)'$$

에너지 방정식은

$$\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = W \frac{\partial T}{\partial z} \dots\dots (2)$$

경계조건

$$\left. \begin{aligned} \text{at } r = d \quad T &= T_w \\ \text{at } \theta = 0 \text{ or } \theta = \theta_0 \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \\ \text{at } r = D \quad \frac{\partial T}{\partial R} &= 0 \\ \text{as } \theta = \gamma \text{ and } r \leq h \quad T &= T_f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)'$$

2-3 무차원화 및 무차원식

식(1), (2)를 무차원화 하기 위해 다음을 변수로 사용하였다.

$$\theta = (T - T_w) / (\theta_t / k) \dots\dots\dots (4)$$

$$\Omega = (W \cdot \mu) / \{ S_e^2 \left(-\frac{dp}{dz} - \rho_w g \right) \} \dots\dots (5)$$

$$R = r / S_e \dots\dots\dots (6)$$

$$H = (h - d) / (D - d) \dots\dots\dots (7)$$

$$S_e = \sqrt{D^2 - d^2} \dots\dots\dots (8)$$

위의 무차원 변수를 사용하여 식(1), (2)를 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + i + \pi \Omega R_e \theta = 0 \dots\dots\dots (9)$$

경계조건

at $R=2$ or $R=1$ $\Omega = 0$
 at $\theta = \theta_0$ or $\theta=0$ $\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0 \dots\dots(9)'$
 at $\theta = \gamma$ and $R \leq H$ $\Omega = 0$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta^2} - \frac{\Omega}{\pi \bar{\Omega}} = 0 \dots\dots\dots(10)$$

경계조건

at $R=1$ $\theta = \theta_w$
 at $R=2$ $\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \dots\dots\dots(10)'$
 at $\theta = \theta_0$ or $\theta=0$ $\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 0$
 at $\theta = \gamma$ and $R \leq H$ $\theta = \theta_f(R)$

여기서 R_0 는 Rayleigh 수로

$$R_0 = \frac{g \cdot \beta \cdot \rho_w \cdot S_0^4}{\alpha \mu} \cdot \frac{dT}{dz} \dots\dots\dots(11)$$

$\bar{\Omega}$ 는 무차원 평균속도로

$$\bar{\Omega} = \iint \Omega R dR d\theta / \iint R dR d\theta \dots\dots\dots(12)$$

식(9), (10)에서 $\eta = \pi \bar{\Omega} \theta$ 라 하면

$$\nabla^2 \Omega + R_0 \cdot \eta + 1 = 0 \dots\dots\dots(13)$$

$$\nabla^2 \eta - \Omega = 0 \dots\dots\dots(14)$$

2-4 압력강하와 열전달

관 벽과 유동 유체 사이의 마찰로 인한 압력 강하는 fR_0 로써 나타낼 수 있을 것이다. 이때 마찰인자 f 는

$$f = D_e \left(-\frac{dp}{dz} - \rho_w g \right) / \left(\frac{1}{2} \rho_w \cdot \bar{W}^2 \right) \dots\dots(15)$$

Raynolds 수는

$$Re = \rho_w \cdot \bar{W} \cdot D_e / \mu \dots\dots\dots(16)$$

식(15), (16)를 곱해줌으로써

$$fR_0 = 2 \cdot D_e^2 / (\bar{\Omega} \cdot S_0^2) \dots\dots\dots(17)$$

이 되고 압력강하는 $\bar{\Omega}$ 에 반비례 하게 되므로 유동장 Ω 를 구함으로써 fR_0 값을 알 수 있다.

열전달은 벽의 온도와 부피 온도의 차에 의해 이루어지며 이 온도차는

$$T_w - T_b = -\bar{\theta} \cdot Q_t / k \dots\dots\dots(18)$$

여기서 $\bar{\theta} = \iint \Omega \theta R d\theta dR / \iint \Omega R d\theta dR$

열전달 계수 h_t 는

$$h_t = Q_t / \{ 2\pi d (T_w - T_b) \} \dots\dots\dots(19)$$

Nusselt 수는

$$Nu = \frac{h_t \cdot (2d)}{k} = -1 / \pi \bar{\theta} \dots\dots\dots(20)$$

따라서 온도장 $\bar{\theta}$ 를 풀므로써 Nusselt 수를 알 수 있다.

3. 수치해석

3-1 유한차분 방정식

식(12)와 (13)을 Control Volume 에 대해 적분 하면

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w + a_N \phi_N + a_s \phi_s + b \dots\dots\dots(21)$$

식(21)에 대해

$$b = (R_0 \cdot \eta_p) \Delta V \dots\dots\dots(22-a)$$

그리고 식(13)에 대해

$$b = -(\Omega_p) \cdot \Delta V \dots\dots\dots(22-b)$$

식(21)에서 계수값 a_p, a_E, a_w, a_s, a_N 에 대하여는 Patankar(13)에 의해 주어지며, $P=F/D$ 로써 정의되는 Peclet 수가 $u=v=0$ 이므로 0(영) 이 되고 Peclet 함수 $A(|P|)=1$ 이므로 각 계수 값들은 확산항 만의 함수가 된다. 이는 식(20)이 source 항을 통해 연결된 Poisson 방정식의 $r-\theta$ 좌표계에 대한 결과와 잘 일치되고 있음을 알 수 있다. 계산영역 내에서 $\Gamma = \text{const}$ 라 할 때 각 계수값들은 기하학적 특성에만 종속되며 유동장과 온도장 ϕ 는 그 이웃값들과 Source

에서 연립되는 ϕ, ψ 값으로써 구할 수 있게 된다.

3-2 계산 과정

유한차분 방정식(2)은 Patankar의 Simple Method (13)가 적용된 Program의 TDMA에 의해 수행되었으며 수렴을 빨리하기 위해 Settari (14)의 Correction method를 사용하였다.

4. 결과 및 고찰

Fig.2는 Rayleigh수가 축 방향 속도에 미치는 영향을 나타낸 것이다. W/\bar{W} 를 y 축으로 무차원 직경 R 을 x 축으로하여 흰과 흰 사이의 중앙($\theta = \theta_0$)에서 각 Rayleigh수에 따라 표시했다. 이때 흰의 높이 $H=0.6$ 흰의 수 $N=12$ 이다. Fig.2에서 Rayleigh수가 0일때 관벽과 흰에 의한 마찰력 때문에 관벽과 흰 근처의 흐름은 느려지게 된다. 그러므로 흰의 높이에 따라 적은 변화가 예상되기는 하지만 흰과 흰 사이 양벽 사이의 중앙부분에 흐름이 집중되게 된다.

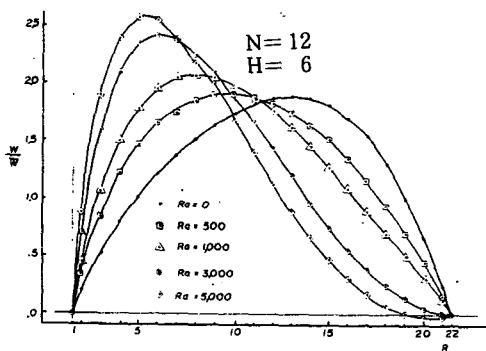


Fig.2 Effect of natural convection on velocity profile on a radial line midway between two adjacent fins

Fig.2에서 흐름이 단열 벽면 쪽으로 약간 치중되게 되는 것은 흰의 마찰력 때문인 것으로 생각된다. Rayleigh수가 증가됨에 따라 자연대류에 의한 부력의 영향으로 가열되는 (냉각되는) 벽과 흰 가까이의 흐름은 점차 가속되고 단열벽

가까이의 흐름은 감소되게 된다. Rayleigh수가 5000 정도 이상이 되면 W/\bar{W} 값이 단열벽 가까이에서 역류되는 것을 볼 수 있다. 이처럼 역류가 발생하는 Rayleigh수를 한계 Rayleigh수라 하며, 내부로 흰이 있는 수직관에 대해 연구한 Prakash(7)의 연구결과에서 한계 Rayleigh수가 7000 정도 인것과 비교하면 내부로 흰이 있는 관보다는 외부로 흰이 있는 이중관이 부력의 영향으로 인한 역류를 더 발생시키기 쉽다는 것을 알 수 있는데 이는 외부 관벽의 마찰로 인해서 흐름이 약해지기 때문인 것으로 생각된다.

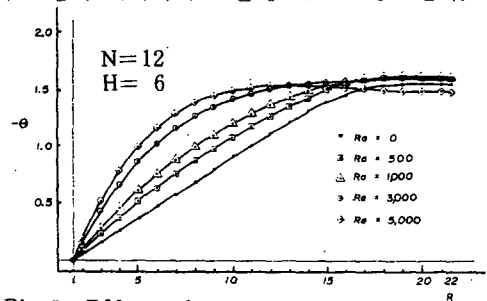


Fig.3 Effect of natural convection on temperature distribution on a radial line midway between two adjacent fins

4-2 온도 분포

Fig.3은 Fig.2와 같은 위치 같은 조건에서 무차원 온도를 나타낸 것이다. Rayleigh수가 0일때 무차원 온도 분포는 가열벽면으로 부터 단열벽면으로 온도가 선형적으로 변화되어 단열벽면에서 그 기울기가 0이 된다. Fig.3에서는 온도 기울기에 미치는 흐름의 영향을 Rayleigh수가 증가됨에 따라 살펴 볼 수 있다. 벽면 가까이의 흐름이 빨라 질수록 즉 R_0 수가 증가됨에 따라 기울기는 점차 급격해져가며 양 벽면 중앙 부분에서는 Rayleigh수가 증가됨에 따라 흐름은 점차 감소되며 온도 기울기도 점차 완만해져 간다.

특히 Rayleigh수가 5000 보다 클때는 온도 기울기가 음수가 되는 것을 알 수 있는데 이는 부력의 영향으로 인한 역류 때문인 것으로 생각된다.

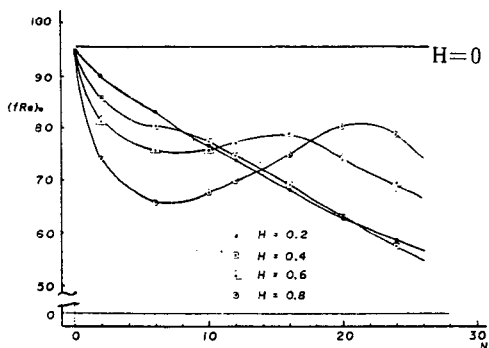


Fig. 4 fRe as a function of fin height and number of fins for zero Rayleigh number, i.e., no natural convection

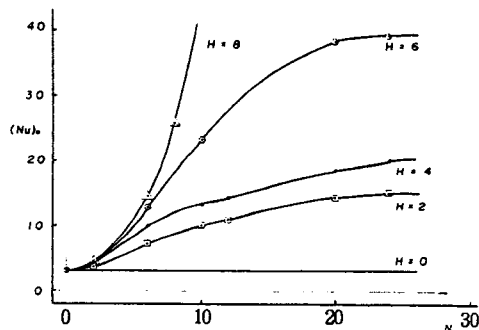


Fig. 5 Nusselt number as a function of fin height and number of fins Rayleigh number, i.e., no natural convection

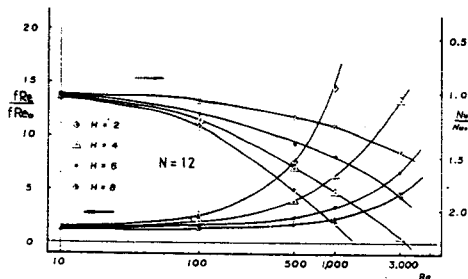


Fig. 6 Effect of natural convection on fRe and Nusselt number for tubes with twenty fins of varying fin heights

4-3 마찰과 열전달

Fig. 4, 5는 fRe 와 Nusselt 수를 Rayleigh 수가 0 일때의 값 즉 자연대류의 영향이 무시될 때 N 의 수와 H 의 높이에 대해 나타낸 것이다. Fig. 6, 7은 강제 대류에 미치는 자연 대류의 영향을 관찰하기 위해 Rayleigh 수가 0 일때를 참고값으로 하여 표현한 것이다.

5. 결 과

유한 차분 방정식 (11), (12)의 연립해를 구한 결과 H 의 높이, N 의 수 그리고 Rayleigh 수는 Nusselt 수와 fRe 값에 중요하게 작용하는 것을 알수있다. 자연대류의 영향은 특히 N 의 수가 적을때 크게 나타났다. 역시 H 이 없는 이중관의 마찰은 부력에 의해 더 크게 나타나고 있기 때문에 H 이 있는 관은 자연 대류의 영향을 무시 할 수 없는 조건에서 훨씬 효과적인 장치로 나타났다. 외부로 H 이 있는 관의 결과는 내부로 H 이 있는 관의 경우보다 같은 Rayleigh 수에 대해 N 의 수와 H 의 높이에 따른 영향을 보다 적게 받는 것으로 나타났다.

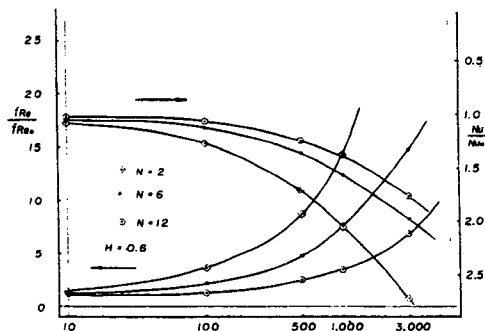


Fig. 7 Effect of natural convection on fRe and Nusselt number for tubes with fins of dimensionless fin height $H=0.6$ and different number of fins

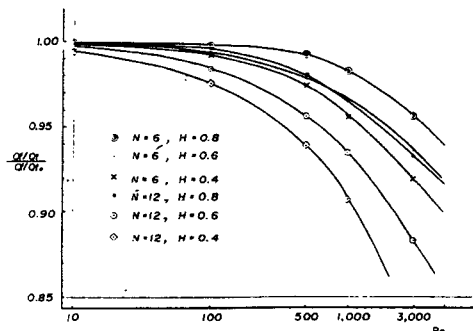


Fig. 8 Effect of natural convection on fin effectiveness

참 고 문 헌

1. Monton, B.R. "Laminar Convection in Uniformly Heated Pipes.," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 12, 1959, pp. 227-240.
2. Kemeny, G.A, and Somers, E.V., "Combined Free and Forced Convection on Flow in Vertical Circular Tubes-Experiments with water and oil.," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol.84, 1962, pp.339-346.
3. Thoms, R.W., and G. de Vahl Davis. "Natural Convection between Concentric Vertical Cylinders.," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.23, 1965, pp. 198-207.
4. Patankar, S.V., and Ramadhyani, P.R., and Sparrow, E.M. "Effect of Circumferentially Non-Uniform Heating on Laminar Combined Convection in a Horizontal Tube.," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 100, 1978, pp. 63-69.
5. Acharya, S., and Patankar, S.V. "Laminar Mixed Convection in a Shrouded Fin Array.," Vol.103, 1981, pp.559-565.
6. Sparrow, E.M., Baliga, B.R., and Patankar, S.V. "Forced convection Heat Transfer from a Shrouded fin Array with and without Tip Clearance", *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 100, 1978, pp.572-579.
7. Prakash, C., and Patankar, S.V. "Combined Free and Forced Convection in Vertical Tubes with Radial Internal Fins.," *ASME Journal of Heat Transfer* Vol. 103, 1981, pp.566-572.
8. Soliman, H.M., Trupp, A.C., and Chau, T. S. "Analysis of Laminar Heat Transfer in Internally Finned Tubes with Uniform Outside wall Temperature.," *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol.102, 1980, pp. 598-604.
9. Peaceman, D.W., and Rachford, H.H. "The numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations.," *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, Vol.3, 1955, p.28.
10. Stone, H.L. "Iterative Solution of Implicit Approximations of multi-Dimensional Partial Differential Equations.," *SIAM Journal Numerical Analysis*, Vol.5, 1968, p. 530.
11. Patankar, S.V., and Spalding, D.B. "A calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer." Vol.15, 1972, pp.1787
12. Patanker, S.V. "Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations.," *Numerical Heat Transfer* Vol.2, 1979.
13. Patankar, S.V. "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow."1980, McGraw-Hill Book Company.
14. Settari, A., and Aziz, K., *SIAM Journal Analysis*, Vol.10, 1973.