

|||||||
論 文
|||||||

비대칭 급확대 관로 유동장 내의 열전달 해석에 수정된 경계층 방정식의 적용 가능성 추정

류 명 석*, 맹 주 성**

Prediction of Heat Transfer in Asymmetric Sudden Expansion Flows
by using the Modified Boundary Layer Equations

Myoung Seok Lyu* and Joo Sung Maeng**

ABSTRACT

This paper describes an economical prediction procedure for heat transfer phenomenon through a channel containing an abrupt asymmetric expansion in flow cross-sectional area.

Numerical solutions for the flow field are obtained by the finite difference numerical method applied to the modified boundary layer equations.

Modified boundary energy equation is used to analyze heat transfer as modified boundary momentum equation.

Predictions of the method compare very favorable with experimental data.

Results of this study by modified boundary layer equation are as follows:

1. The computation time required for the scheme is at least an order of magnitude less than for the numerical solution of the full Navier-stokes and Energy equations.
2. In laminar flow, the maximum heat transfer occurs downstream of the reattachment point.

* 류명석 : 한양대학교 대학원 기계공학과

** 맹주성 : 한양대학교 공과대학 기계공학과

NOMENCLATURE

H_i : Channel inlet height [m]
 H_o : Channel height downstream of step [m]
 s : Step height
 k : Thermal conductivity [w/m°C]
 Pr : Prandtl number
 P : Pressure [N/m²]
 Re_s : Reynolds number based on the step height
 T : Temperature [°C]
 T_∞ : Fluid temperature [°C]
 T_w : Wall temperature [°C]
 U : Nondimensional X component of velocity
 u : X component of velocity [m/sec]
 u_∞ : free stream velocity [m/sec]
 δ_t : Thermal thickness
 V : Y component of velocity [m/sec]
 \bar{X} : Nondimensional X coordinate
 ΔY : $(Y_{j+1} - Y_j), (Y_j - Y_{j-1})$
 y : Coordinate normal to the surface
 μ : Molecular viscosity [kg/m.sec]
 ν : Kinematic viscosity [m²/sec]
 ρ : Density [kg/m³]
 θ : Nondimensional temperature
 Ψ : Stream function [m²/sec]
 C_p : specific heat [kJ/kg°C]
 n : Iteration level

1. 서 론

최근 박리 현상 및 재부착 유동을 수반하는 열전달 현상에 관한 연구 실태는 1984년 J. Eaton과 John Voge에 의한 Stanford Research Project Bulletin에 보고한 바와 같이 재부착 흐름에 관한 체계적이면서 정확한 실험 데이터의 부족으로 재부착 현상에 대한 뚜렷한 결론이 내리지

지 않고 있으며 재부착 흐름 및 재부착 지점에서의 열전달 현상에 관한 이론적 해석도 빈약하다.

본 연구에서는 유로가 비대칭적으로 급확대되는 층류 흐름 유동장에 대하여 경계층 방정식을 사용, 초기 및 경계 조건 변화에 대한 열전달 현상을 고찰하여 기존 실험값과 비교 하였다.

난류 유동의 경우는 W. Aung & Goldstein^{1), 2)}이 박리 현상을 수반하는 비대칭, 급확대 관 내에서의 열전달 현상을 실험적으로 연구하였으며 단면이 갑자기 확장된 원관에 대해서는 Zamanick & Dougrall³⁾ 등의 논문이 있다. 최근에 수치적 기법에 난류 모델을 도입하여 박리 유동을 예측하는 이론적 연구가 수행되고 있으나 이 경우에도 최대 열전달이 일어나고 있는 재부착점에 관한 수치적 해석은 없다.

층류 유동인 경우는 열전달 특성 연구가 거의 수행되지 않았으며 1983년에 W. Aung⁴⁾이 비대칭 급확대 채널에서의 열전달 현상을 실험적으로 연구한 논문이 발표되었다.

한편 Kwon⁵⁾은 급확대 채널에서의 유동 현상에 관하여 경계층 운동량 방정식에 Flare⁶⁾ 가정을 도입하여 레이놀드수 $(\frac{U_s \cdot s}{\nu})$ 가 25~175 범위 내에서의 재부착 길이를 Full-Navier Stokes 방정식을 사용하여 얻은 결과와 비교하여 좋은 일치율을 나타내었다. (Fig. 3)

본 연구에서는 이 Flare 가정을 경계층 에너지 방정식에서도 적용하여 레이놀드수 (Re_s) 204까지 열전달 현상을 해석한 결과 W. Aung⁴⁾의 실험값과 잘 일치하고 있다. 그 결과는 재부착점에서 최대 열전달이 일어날 것이라는 이론과는 달리 층류 유동에서는 재부착점 이후에서 최대 열전달이 일어난다는 것이 확인되었다.

2. 이론 해석

2-1. 해석 모델 및 조건

W. Aung⁴⁾의 실험 연구에 근거를 둔 본 연구

의 이론 해석에 사용된 데이터 및 모델은 <Table 1>, <Fig 1>이며 해석 조건은 다음과 같다.

- (1) 유체 유동은 층류 흐름이고 2 차원 정상 유동이다.
- (2) 채널 입구에서의 속도, 온도는 균일(uniform)하다.
- (3) 모든 유체의 물성치는 일정하다.
- (4) 부력은 점성력과 압력에 비하여 무시할 만큼 작다.
- (5) ($x = -\ell_2$)로부터 양쪽 벽면에서는 일정 온도가 가열된다.

Table 1. [(Δx) = Streamwise step size]

S	H_i/S	U_s	$R_{e,s}$	P_r	ℓ	ℓ_1	Δx
0.0127	17	0.31	233	0.72	0.455	0.15	0.0042
0.0064	34	0.54	204	0.72			0.0021
0.0064	34	0.47	178	0.72			
0.0038	50	0.59	132	0.72			
0.0038	50	0.9	202	0.72			0.00124

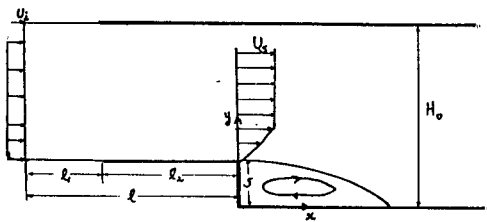


Fig 1. Sudden expansion geometry

2-2. 지배 방정식 및 경계 조건

(1) 연속방정식 ; $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (1)

(2) 운동량 방정식

$$Cu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots (2)$$

(3) 에너지 방정식

$$Cu \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{d^2 T}{dy^2} \dots\dots\dots (3)$$

(단 $u > 0 ; C = 1$
 $u < 0 ; C = 0$)

식 (1), (2), (3)을 무차원화하고 유량 함수 ψ 를 사용하고 다음과 같은 무차원수

$$\bar{u} = \frac{u}{u_i}, \bar{v} = \frac{v}{u_i}, \bar{p} = \frac{p}{\rho u_i^2}, \bar{x} = \frac{\rho u_i x}{\mu},$$

$$\bar{y} = \frac{\rho u_i y}{\mu}, \bar{H} = \frac{\rho u_i H}{\mu}, \bar{\psi} = \frac{\rho \psi}{\mu},$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_{w1} - T_\infty}$$

들을 사용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \dots\dots\dots (4)$$

$$c\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \dots\dots (5)$$

$$c\bar{u} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \dots\dots (6)$$

(4) 경계 조건

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = 0$$

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{H}) = 0$$

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{H}) = \bar{\psi}_T$$

$$\theta(\bar{x}, \bar{H}) = \theta(\bar{x}, 0) = \alpha \quad (\alpha = \text{상수})$$

3. 수치 해석 방법

위 수식을 implicit finite difference 를 사용하여 변형시키고 Newton 선형법을 적용하면 다음과 같다.

$$a_j \bar{U}_{i+1,j-1} + b_j \bar{U}_{i+1,j} - \bar{\psi}_{i+1,j} + \bar{\psi}_{i+1,j-1} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$A_j \bar{U}_{i+1,j-1} + B_j \bar{U}_{i+1,j} + C_j \bar{U}_{i+1,j+1} + D_j \bar{\psi}_{i+1,j} = E_j \left(\frac{d\bar{p}}{dx}\right)_{i+1} + Z_j \dots (8)$$

$$BT_j \bar{U}_{i+1,j} + DT_j \bar{\psi}_{i+1,j} + FT_j \theta_{i+1} + GT_j \theta_{i+1,j} + HT_j \theta_{i+1,j+1} = ZT_j \dots\dots\dots (9)$$

식 (7), (8), (9)를 해석하기 위하여 Box Elimination Method 를 도입하였으며 U, ϕ 값을 지배 방정식 중에 연속방정식, 운동량 방정식으로 부터 계산하고 여기서 구한 값을 사용하여 Energy 방정식을 계산하였다.

(1) 연속 방정식과 운동량 방정식

Box Elimination Method 를 도입하면 식 (7),

(8)에서

$$\bar{U}_{i+1,j} = C'_j \bar{U}_{i+1,j+1} + E'_j \left(\frac{dp}{dx}\right)_{i+1} + Z'_j \dots\dots\dots (10)$$

$$\bar{\phi}_{i+1,j} = A'_j \bar{U}_{i+1,j+1} + B'_j \left(\frac{dp}{dx}\right)_{i+1} + D'_j \dots\dots\dots (11)$$

(2) 에너지 방정식

$$FT_j \theta_{i+1,j-1} + GT_j \theta_{i+1,j} + HT_j \theta_{i+1,j+1} = YT_j \dots\dots\dots (12)$$

앞에서 구한 \bar{u} 와 $\bar{\phi}$ 값을 사용하면 FT_j, GT_j, HT_j 가 결정되며 식 (12)는 Gauss 소거법을 사용하여 쉽게 풀이할 수 있다.

4. 해석 결과 및 고찰

<Fig 4>, <Fig 5>, <Fig 6>은 step 하류에서 온도 분포를 실험 데이터와 본 연구의 해석 방법으로 구한 예측치를 도시한 것인데 거의 전 영역에 걸쳐 정확히 일치하고 있다.

<Fig 7>, <Fig 8>은 재부착점을 지나서 열경계층의 감소로 인하여 국소 열전달을 증가시킨 것이 나타나 있다. 이 그림들에서는

(1) 실험 데이터에서 접선은 step 높이가 영으로 갈 때의 열전달을 나타내는데 Eckert 식에 의해서 $P_r = 0.72$ 인 경우에 다음 식으로 부터 계산된다.

$$h_{f,x} = 0.298 \cdot (Re_x)^{1/2} \cdot (k/x) [1 - (x_0/x)^{3/4}]^{-1/3} (x_0 = 0.15 \text{ m})$$

(2) Step이 있는 경우 하류에서의 열전달은 평판흐름보다 작다는 것을 나타낸다.

일반적으로 난류 흐름인 경우는 열전달이 평

판일때보다 크며 재부착점 이전에 천이 경계층이 생성되는 경우에 대하여는 재부착점에서의 열전달이 평판흐름일때의 6~7배가 되는 것으로 알려져 있다. 그러나 W. Aung 의 실험치와 본 연구의 예측으로 부터 알 수 있는 바와 같이 층류 유동인 경우에는 Step 이후에서의 최대 열전달이 재부착점 다음에서 일어난다는 것을 알 수 있다.

<Fig 4>~<Fig 8>을 예측하는데 요구되는 C.P.U time 은 (Table 2)와 같다.

(Table 2) (VAX; VMS)

s (step height)	Re,	C.P.U. time
0.00127	233	20(sec)
0.0064	204	45(sec)
0.0064	178	45(sec)
0.0038	132	140(sec)
0.0038	202	140(sec)

<Table 2>에서 보는 바와 같이 C.P.U. time 이 최고 140(sec)로 매우 경제적이다.

본 연구에서 사용한 Program의 유동도는 <Fig 2>에 나타나 있다.

5. 결론

(1) 본 연구의 수정된 경계층 방정식을 적용한 결과를 보면 온도장은 박리영역 및 거의 전 영역에 걸쳐서 비교적 잘 일치하고 있으며 종래의 Navier-Stokes 방정식과 에너지 방정식을 해석하는 것에 비하여 C.P.U. time 이 1/10정도로 감소되어 경제적이다.

(2) 본 모델과 같은 층류 흐름 유동에서는 난류와는 달리 step 이후에서의 최대 열전달이 재부착점 이후에서 생긴다.

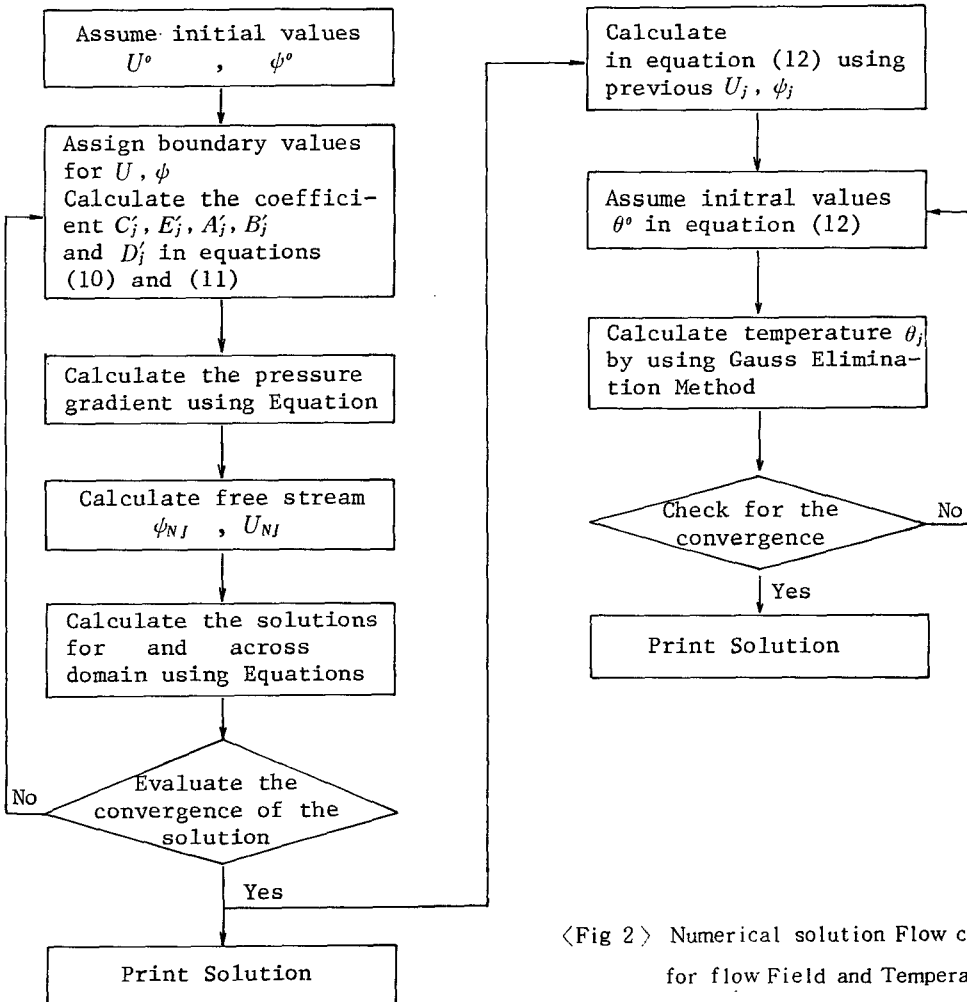
(3) 수정된 경계층 방정식을 적용함에 있어서 레이놀드수 한계가 있으며 Doctor. Kwon 의 유동

장 해석에서보다 본 연구에서는 레이놀드 ($\frac{U_s \cdot s}{\nu}$) 수 204 까지 확장하였다.

(4) 본 연구에서 사용한 수정 경계층 방정식들이 더욱 큰 레이놀드수에서 확장해서 적용될 수 있을 것으로 예상되고 그 한계를 추정하기 위해서는 체계적이고 정밀한 실험연구가 요구된다.

< 후 기 >

본 연구는 1985년도 문교부 연구비 지원으로 수행되었음을 밝히며 후원에 감사드립니다. 그리고 본 대학원 박사과정 원승호씨와 KAIST 전산학과 한재정군에게 사의를 표합니다.



< Fig 2 > Numerical solution Flow chart for flow Field and Temperature field .

REFERENCE

(1) Aung, W. and Goldstein, R.J., "Temperature Distribution and Heat Transfer in a Transitional Separated Shear Layer", Heat Transfer, Proceedings of Fourth International Heat Transfer Conference, Paper No. FC1.5, Versailles, France (1970).
 (2) Aung, W. and Goldstein, R.J., "Heat Transfer in Turbulent Separated Flow Downstream of a Rearward-Facing Step", Israel Journal of Technology, Vol. 10, No. 1-2, (1972) pp. 35-41.
 (3) Zemarick, P.P. and Pougall, R.S., "Local Heat Transfer Downstream of Abrupt Circular Channel Expansion", J. Heat Transfer (1970); 53-60.
 (4) W. Aung, "An Experimental Study of Laminar Heat Transfer Downstream of Backsteps", Transaction of ASME

(1983); 823-829.
 (5) O.K. Kwon, and R.H. Pletcher, "Prediction of Sudden Expansion Flows Using the Boundary-Layer Equations" Journal of Fluids Engineering (1984)
 (6) Reyhner, T.A. and Fluggo-Lotz, I., "The Interaction of a shock Wave with a Laminar Boundary Layer", Int. J. Nonlinear Mechanics, Vol. 3, (1968).
 (7) Aung, W., "An Interferometric Investigation of Separated Forced Convection in Laminar Flow Post Cavities", ASME. Journal of Heat Transfer, Vol. 105, No. 3, pp. 505-512 (1983).
 (8) Acrivos, A. and Schrader, M.L., "Steady Flow in a Sudden Expansion at High Reynold Numbers", Physics of Fluids, Vol. 25, No. 6 (1982), pp. 923-930.

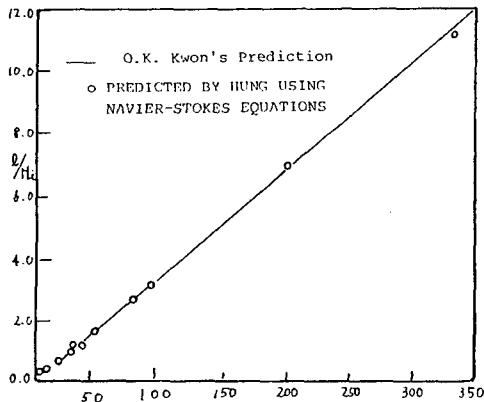


Fig.3 Prediction of the reattachment length for laminal flow in channel ($h/H_i = 0.5$)

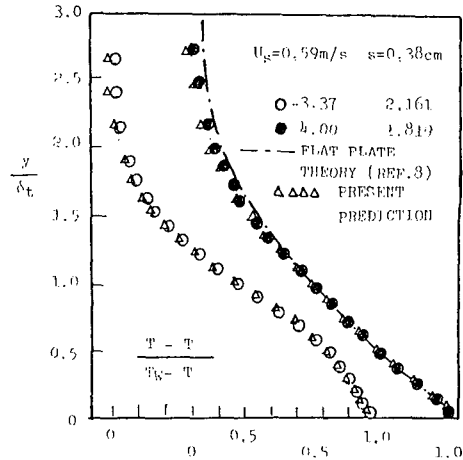


Fig.5 Temperature distribution

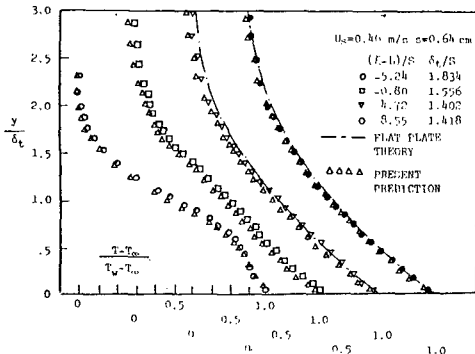


Fig.4 Temperature distribution

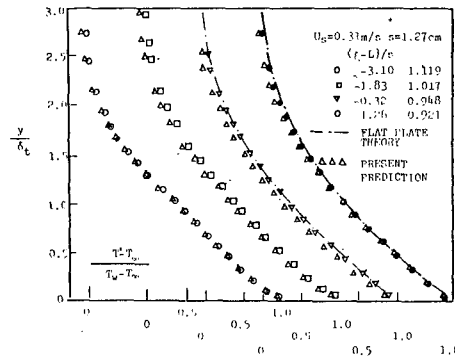


Fig.6 Temperature distribution

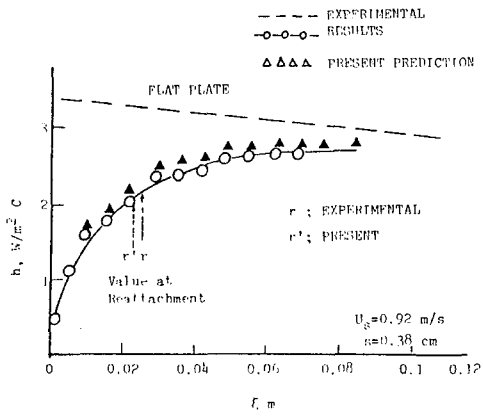


Fig.7 Typical axial local heat transfer

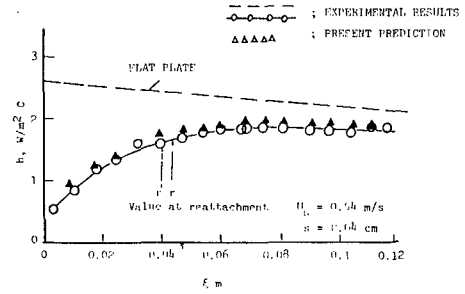


Fig.8 Typical axial local heat transfer