연속체역학의 기초적 개요(I)

朴 鎭 武
<고려대학교 기계공학과 교수>

1. 머리 말

연속체역학은 고전역학을 종합하여 더 합리적인 체계로 정리 발전시키려는 금세기 후반에 집중된 노력의 결정으로 볼 수 있다[1,2]. 이같은 노력은 물체의 비선형거동, 역학적 및 열적거동의 연계, 비균질체 등 복잡한 문제를 해석하는 과정에서 필연적으로 요구되고 있다. 예를 들면 보강 플라스틱이나 액정 (liquid crystal)의 일반거동연구는 탄성체나 점성유체의 선형거동 및 열정역학(thermostatics) 이론체계의 연장만으로는 미흡하며, 그 기초부터 세밀한 재정립이 필요하다. 교육적 측면에서도 고체역학, 유체역학, 열역학 등 여러 분야의 공통 기초로서 연속체 이론은 매우 효율적이어서 학부과정을 마무리 짓는 단계에서 또는 대학원초기에 한 분야를 전문적으로 연구하기 위한 준비단계에서 적합한 과목으로 널리 인식되고 있다.

우리 대학들에서도 연속체역학은 잘 알려져 있으나 아직 교과과정에 충분히 반영되지 못하고 있다. 넓은 범위에 적용되는 일반 이론이어서 그 체계가 다소 추상적이므로 그 내용을 명확히 전개하려면 다양체(manifold)의 기하학과 범함수해석적 방법[3]이 적절하다고 생각하나 본 강좌에서는 연속체의 역학적 거동에 관한 기초적 개요를 쉽게 설명하고 관련문헌을 제시하여 일반기술자의 관심을 돕고저 한다(연속체역학의 우리 용어들이 정립되지 않은 것은 필자 임의로 선택하였으니 양해를 바라며, 개요의 부족함은 기초적 문헌[4]으로 쉽게 보충되도록 유의하였다)

2. 텐서(Tensor)

3차원 Euclid공간(E_3)의 직교 Cartesian좌표계를 z^r(기준벡터 $\underset{\sim}{i}_r$, r; 1, 2, 3)이라 하면 일반곡선좌표계 x^n은 다음과 같이 정의된다.

$$x^m = x^m\ (z^1,\ z^2,\ z^3)$$
$$z^m = z^m\,(x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{1}$$

한점의 위치벡터가 $\underset{\sim}{p}$이면 x^r계의 자연적 기준벡터(natural base vector) $\underset{\sim}{g}_s$는

$$\underset{\sim}{g}_s = \frac{\partial \underset{\sim}{p}}{\partial x^s}. \tag{2}$$

또

$$d\underset{\sim}{p} = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \underset{\sim}{p}}{\partial x^s} dx^s \equiv \frac{\partial \underset{\sim}{p}}{\partial x^s} dx^s = dx^s \underset{\sim}{g}_s. \tag{3}$$

두 개의 곡선좌표계 $\bar{x}^r$, x^s를 고려하면

$$d\underset{\sim}{p} = d\bar{x}^r \bar{\underset{\sim}{g}}_r = dx^s\, d\underset{\sim}{g}_s = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} d\bar{x}^r \underset{\sim}{g}_s. \tag{4}$$

그러므로 $x^s - \bar{x}^r$ 좌표변환에 따르는 기준벡터의 변환은 다음과 같다.

$$\bar{\underset{\sim}{g}}_r = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}_r} \underset{\sim}{g}_s. \tag{5}$$

$\underset{\sim}{g}_s$계는 각각 x^s-좌표곡선에 접하나 일반적으로 단위벡터가 아니며 서로 직교하지도, 좌표곡면에 직교하지도 않는다. $\underset{\sim}{g}_s$계에 대응하는 역기준벡터(reciprocal base vector)계 $\underset{\sim}{g}^r$은 다음과 같이 정의된다.

$$g^1=\frac{g_2\times g_3}{[g_1 g_2 g_3]},\ g^2=\frac{g_3\times g_1}{[g_1 g_2 g_3]},$$

$$g^3=\frac{g_1\times g_2}{[g_1 g_2 g_3]}, \tag{6}$$

$$([g_1 g_2 g_3]\equiv g_1\cdot g_2\times g_3).$$

g^r 계는 좌표곡면에 수직이며, g_s 계와의 관계는 다음과 같이 Kronecker δ 로 표시된다.

$$g^r\cdot g_s=\delta^r{}_s. \tag{7}$$

식 (7)로부터 $\bar{x}^r-x_s$ 좌표변환에서 g^r 의 변환식은

$$\bar{g}^r=\frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^s}g^s. \tag{8}$$

임의의 벡터 v 를 g_s 와 g^r 기준 표기하면

$$v=v^s g_s,\ v=v_r g^r. \tag{9}$$

식 (5)와 식 (8)로부터 g^s 와 g^r 은 변환식이 서로 다름을 알 수 있으며, g_s 를 공변기준벡터 (covariant base vector), g^r 을 반변 (contravariant)기준벡터라 부르고 식 (9)의 $v^r[v_r]$을 v의 반변[공변]성분이라 한다(엄밀한 해석[5,6]에서는 g^r 은 벡터와 구별되어 1-형식(1-form)이라 부르고, 식 $(9)_2$와 같은 표기법도 피하나 여기서는 고전적 텐서해석[7]을 따른다).

텐서는 벡터들의 스칼라 값을 갖는 다선형형식(multilinear form)으로 정의된다. 즉, n차 텐서 S에 n개의 벡터 $e_i(i=1, 2\cdots n)$를 넣으면 스칼라 값 S를 도출하는 데 S 값은 각 벡터 e_i 에 대하여 선형관계이다. 예를 들어 2차텐서 T 의 경우

$$T(u, v)=T(u^i g_i,\ v^j g_j)$$

$$=T(g_i, g_j)u^i v^j=T_{ij}u^i v^j. \tag{10}$$

위에서 $T_{ij}\equiv T(g_i, g_j)$는 텐서 T의 g_r 기준 공변성분이라 한다. 또 반변성분 T^{ij} 및 혼합성분(mixed component) $T_i{}^j$ 는 각각 다음과 같다.

$$T^{ij}\equiv T(g^i, g^j),\ T_i{}^j\equiv T(g_i, g^j). \tag{11}$$

좌표변환 x^r-x^s 에 따르는 텐서 성분들의 변환은 식 (5), (8)의 벡터변환과 2-선형(bilinear) 관계로부터 다음과 같음이 분명하다.

$$\bar{T}_{mn}=\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}_m}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^n}T_{rs}$$

$$\bar{T}^{mn}=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^r}\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^s}T^{rs}$$

$$\bar{T}_m{}^n=\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^s}T_r{}^s. \tag{12}$$

고차텐서의 경우 위 변환식은 자명한 형식으로 연장되고, 이와같은 변환식을 텐서의 정의로 쓸 수 있다. 그러므로 벡터는 1차텐서로, 스칼라는 0차텐서가 된다. 텐서는 좌표계와 무관이지만 그 성분들은 일정한 규칙으로 변환하므로서 기준벡터의 변환을 상쇄하고 텐서자체의 불변성을 유지시킨다. 또 식 (10)에서 u를 g_i 로 고정하면

$$T_i{}^{(v)}\equiv T(g_i, v)=T(g_i, v^j g_j)=T_{ij}v^j.$$

따라서 2차텐서는 매트릭스와 같은 선형연산자로 취급할 수 있다.

거리텐서(metric tensor) g_{ij} 는 다음과 같이 정의된다.

$$g_{ij}=g_i\cdot g_j, \tag{13}$$

길이요소 ds 와 벡터내적은 g_{ij} 로 표시된다.

$$ds^2=dr\cdot dr=\frac{\partial r}{\partial x^i}\frac{\partial r}{\partial x^j}dx^j dx^j$$

$$=g_{ij}dx^i dx^j,$$

$$u\cdot v=u^i g_i\cdot v^j g_j=g_{ij}u^j v^j. \tag{14}$$

직교 Carterian 좌표계 z^i 와 x^s 의 변환에서는

$$g_{ij}=\frac{\partial z^r}{\partial x^i}\frac{\partial z^s}{\partial x^j}\delta_{rs}. \tag{15}$$

이므로 g_{ij} 는 단위 텐서의 x^s-좌표성분이다. 또 식 (9)로부터

$$g_{ij}u^j=g_i\cdot g_j u_j=g_i\cdot g^j u_j=\delta_i{}^j u_j=u_i. \tag{16}$$

반면에

$$g^{rs}\equiv g^r\cdot g^s,\ g_{ij}g^{js}=\delta_i{}^s,\ g^{rs}u_s=u^r.$$

그러므로 거리텐서는 공간의 기하학적 관계를 나타내는 기본텐서임이 분명하다.

연속체의 거동은 텐서장(tensor field)들로 표현되며 이들의 미분연산은 다음 예와 같다.

$$\frac{\partial v}{\partial x^n}=\frac{\partial v^m}{\partial x^n}g_m+v_m\frac{\partial g_m}{\partial x^n}=\frac{\partial v^m}{\partial x^n}g_m$$

$$+v_m \frac{\partial^2 z^p}{\partial x^m \partial x^n} \underset{\sim}{i}_p = \frac{\partial v^m}{\partial x^n} \underset{\sim}{g}_m + v^m \frac{\partial^2 z^p}{\partial x^m \partial x^n}$$

$$\times \frac{\partial x^s}{\partial z^p} g_s = \left(\frac{\partial v^m}{\partial x^n} + \Gamma^m{}_{sn} v_s \right) \underset{\sim}{g}_m$$

$$= v^m|_n g_m \tag{17}$$

$$\Gamma^m{}_{sn} \equiv \frac{\partial^2 z^p}{\partial z^s \partial z^n} \frac{\partial x^m}{\partial z^p},$$

$$v^m|_n = \frac{\partial v^m}{\partial x^n} + \Gamma^m{}_{sn} v^s. \tag{18}$$

위에서 $\Gamma^m{}_{sn}$은 기준벡터 $\underset{\sim}{g}_r$의 위치적 변화율을 표시하며 제 2종의 Christoffel 기호라 하고 $v^m|_n$은 v^m의 x^n에 관한 공변도함수(covariant derivative)라 부른다. 2차텐서의 공변도함수는[7]

$$T^{rs}|_n = \frac{\partial T^{rs}}{\partial x^n} + \Gamma^r{}_{mn} T^{ms} + \Gamma^s{}_{mn} T^{rm} \tag{19}$$

이와같은 공변도함수들은 각각 해당 텐서 변환식을 만족시키므로[7] 어느 좌표계에나 적용할 수 있는 객관적 관계식에 독립된 항으로 등장할 수 있으나 단순한 편미분항은 그렇지 못하다.

연속체의 기하학적 형태나 거동의 기술방법에 따라 곡선좌표계를 사용해야 할 경우가 많으므로 일반텐서 성분들로 관계식을 정립하는 것이 매우 바람직하다. 그러나 이 기초적 개요의 전개에서는 그 기술적 복잡성이 개념을 흐리는 폐단을 피하기 위하여 이하내용에서 직접 표기법(direct notation)을 위주로 하고 성분식을 쓸때는 직교 Cartesian 좌표계에 국한하기로 한다. 따라서 자연적 기준벡터계 $\underset{\sim}{i}_r$은 서로 직교하는 단위벡터들이므로 역기준벡터계와 일치하며 위치에 따라 변하지도 않으므로 앞의 내용들을 간단해진다. 즉

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$$

$$T_{ijkl} = T^{ijkl} = T_{ij}{}^{kl} \text{ 등}$$

$$\Gamma_{kj}{}^i = 0, \quad v^i|_j = \frac{\partial v_i}{\partial z_j} \equiv v_{i,j}.$$

좌표변환$(\bar{z}^r, \bar{\underset{\sim}{i}}_r) - (z_s, \underset{\sim}{i}_s)$에 따르는 기준벡터와 좌표성분의 변환은 $\bar{\underset{\sim}{i}}_r$와 $\underset{\sim}{i}_s$ 사이의 방향여현 a_{rs}로 간단히 표시된다.

$$\bar{\underset{\sim}{i}}_r = a_{rs} \underset{\sim}{i}_s, \quad \underset{\sim}{i}_r = a_{sr} \bar{\underset{\sim}{i}}_s$$

$$\bar{z}_r = a_{rs} z_s, \quad z_r = a_{sr} \bar{z}_s.$$

$$a_{rs} \equiv \bar{\underset{\sim}{i}}_r \cdot \underset{\sim}{i}_s = \frac{\partial \bar{z}_r}{\partial z_s} = \frac{\partial z_s}{\partial \bar{z}_r}. \tag{20}$$

예를들어 z_3축을 회전축으로하여 반시계 방향으로 θ만큼 회전하여 $\bar{z}_r$-좌표계를 구성하면, z_2-z_3 평면응력텐서 $\sigma_{\alpha\beta}$의 변환은

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} \sigma_{\gamma\delta} \quad (\underset{\sim}{\bar{\sigma}} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\sigma} \underset{\sim}{A}^T)$$

$$\underset{\sim}{A} = [a_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -\sin\theta, & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

위 변환식을 도시하면 Mohr의 응력원이 된다. 2차 텐서장에 관한 발산정리(divergence theorem)는 텐서성분의 한 인덱스를 고정하여 벡터로 취급하는 편법을 써서 벡터해석의 경우와 같이 도출할 수 있다. 즉,

$$\int_R \sigma_{ij,j}\, dv = \int_{\partial R} \sigma_{ij} n_j\, da,$$

$$\int_R div\, \underset{\sim}{\sigma}\, dv = \int_{\partial R} \underset{\sim}{\sigma}\, \underset{\sim}{n}\, da. \tag{21}$$

3. 연속체의 운동학(Kinematics)

연속체란 물체의 한 이론적 모델로서 물체가 공간의 영역을 빈틈없이 점유한다고 가정한다. 따라서 연속체의 한 질점은 기하학적 점에, 봉과 같은 일차원 연속체는 곡선에, 셸등의 2차원 연속체는 곡면에, 그리고 3차원 연속체는 E_3의 한 영역에 유사한 것으로 간주한다. 이러한 모델은 특이점(선, 면)을 제외하면 연속함수의 해석학을 적용할 수 있어서 편리할 뿐 아니라 광범위한 문제에서 실험과 일치하는 결과를 도출함으로서 그 유용성이 입증되어 있다.

연속체 B의 운동은 시간에 따르는 일련의 사상(mapping)으로 표현할 수 있다.

$$\underset{\sim}{\hat{x}}_t;\ B \longrightarrow E_3. \tag{22}$$

한 질점 $\bar{X}_A$의 예를 들면

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\hat{x}}(\bar{X}_A, t), \quad \bar{X}_A = \underset{\sim}{\hat{x}}^{-1}(\underset{\sim}{x}, t). \tag{23}$$

속도와 가속도는 각각 다음과 같다.

$$\underset{\sim}{\dot{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \underset{\sim}{\hat{x}}(\bar{X}_A, t), \quad \underset{\sim}{\ddot{x}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underset{\sim}{\hat{x}}(\bar{X}_A, t). \tag{24}$$

연속체의 거동을 나타내는 장 ϕ를 기술하는 방법은 다음과 같이 여러 가지가 있다.

(가) 물질적 기술법 (material description)

함수 ϕ의 정의역(domain)은 물체 자체이다. 질점역학에서 오래 사용되어 왔으며 자연법칙의 구체적 기술에 적합한 방법이지만, 물체에 고착시킨 좌표계 $\overline{X}_A$를 사용하면 물체의 운동에 따라 변형하는 좌표계 ($\overline{X}_A \circ \hat{x}_t^{-1}$; convective coordinate)가 된다[8]. 한편 물체를 점유하는 영역과 독립된 다양체로 보면[1], (나)의 기술법과 밀접히 연관되므로 흔히 상호 구별없이 사용된다.

(나) 기준적 기술법 (referential description)

연속체의 한 배치(configuration) K를 기준으로 하여 그 영역에 ϕ를 표시한다. 물질적 기술법과 $X=K(\overline{X}_A)$로 연결되며, 기준배치가 고정되어 있으므로 직교좌표 등을 써서 Cartesian 텐서성분만으로 관계식을 세울 수 있다. Lagrange 기술법이라고도 하며 이하 $\phi^{(L)}$, $\phi(X, t)$ 등으로 표기한다.

(다) 공간적 기술법 (spatial description)

ϕ의 정의역이 공간의 고정된 일부분이며, 식 (23)에서 운동을 표시하는 종속변수 x가 이 기술법에서는 독립변수로 바뀌고 운동은 속도 $v(x, t)$로 대신 표시된다. Lagrange 기술법과는 $\frac{\partial \hat{x}}{\partial t}=v(x, t)$로 연결되지만 이 식의 해를 전 영역에서 구하는 것은 대체로 어려운 일이므로 물체 자체의 운동을 결정하는 데는 불편한 경우도 있다. 그러나 풍동실험의 예에서 들어나듯이 모형주변의 통제된 영역에서 일어나는 유체거동이 주관심사일 경우에는 이 기술법이 편리함으로 유체역학에서 많이 사용된다. 이하 $\phi^{(E)}$, $\phi(x, t)$ 등으로 표기한다.

식 (23)을 Lagrange 기술법으로 바꾸고 미분하면

$$dx=F\,dX, \quad dX=F^{-1}\,dx.$$

$$\left(F\equiv\frac{\partial \hat{x}}{\partial X};\ \text{변형도함수}\right). \tag{25}$$

식 (23)과 식 (25)를 비교하면 $\hat{x}$는 일반함수인 반면 F는 미소한 두 벡터 dx와 dX 사이에 작용하는 선형연산자이므로 F는 국소적 변형을 간단히 표현하는 주요 텐서임을 알 수 있다. 한편 연속체를 미소한 사면체들의 조합으로 보면 사면체요소는 변들의 길이로 결정되므로 요소의 변형은 길이의 변화만으로 알 수 있다. 따라서 dX의 크기와 방향이 어떻게 변화하여 dx가 되는가를 지시하는 F보다 크기의 증감만을 결정하는 더 간단한 텐서를 추출할 수 있는데 이는 다음과 같이 얻어진다.

$$(ds)^2=dx\cdot dx=F\,dX\cdot F\,dX=dX\cdot C\,dX$$

$$C\equiv F^T\cdot F=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial X_A}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial X_B}. \tag{26}$$

그러므로 Green의 변형텐서 C는 기본척도가 된다. Euler 기술법에서는 Cauchy의 변형텐서 C가 식 $(25)_2$로부터 다음과 같이 결정된다.

$$(dS)^2=dX\cdot dX=F^{-1}\,dx\cdot F^{-1}\,dx=dx\cdot c\,dx$$

$$c=(F^{-1})^T\cdot(F^{-1}). \tag{27}$$

길이요소의 증감은

$$\begin{aligned}(ds)^2-(dS)^2&=dx\cdot dx-dX\cdot dX\\ &=2\,dX\cdot E\,dX\\ &=2\,dx\cdot e\,dx,\end{aligned} \tag{28}$$

$$E\equiv\frac{1}{2}(C-I),\quad e\equiv\frac{1}{2}(I-c) \tag{29}$$

여기서 E[e]는 Lagrange[Euler] 변형율 텐서이다.

기준배치와 현배치(present configuration)의 기준벡터 I_A와 i_r을 일치시키면 변위벡터 u는 다음과 같다.

$$u=x-X=u_r\,i_r=U_A\,I_A. \tag{30}$$

그러므로

$$\begin{aligned}&x=X+u,\quad X=x-u\\ &x_i=\delta_{iA}\,X_A+\delta_{iA}\,U_A\\ &\hat{x}_{i,B}=\delta_{iA}\,\delta_{AB}+\delta_{iA}\,U_{A,B}\\ &\quad=\delta_{iB}+\delta_{iA}\,U_{A,B}.\end{aligned} \tag{31}$$

C와 E는 u로 다음과 같이 결정된다.

$$C_{BD}=\hat{x}_{i,B}\,\hat{x}_{i,D}=\delta_{BD}+U_{B,D}+U_{D,B}+U_{A,B}U_{A,D}$$

$$E_{BD}=\frac{1}{2}(U_{B,D}+U_{D,B}+U_{A,B}\,U_{A,D}). \tag{32}$$

같은 방법으로

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}-u_{m,i}\,u_{m,j}). \tag{33}$$

E와 e는 유한변형율의 엄밀한 척도가 되는데,

미소변형율의 경우($|u_{i,A}|\ll 1$)에는 다음과 같이 간략하게 된다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}-\frac{\partial X_i}{\partial x_j}=\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{F}^{-1}=\underset{\sim}{I}-\{\underset{\sim}{I}+(\underset{\sim}{F}-\underset{\sim}{I})\}^{-1}$$
$$=(\underset{\sim}{F}-\underset{\sim}{I})-(\underset{\sim}{F}-\underset{\sim}{I})^2+(\underset{\sim}{F}-\underset{\sim}{I})^3\cdots. \quad (34)$$

$\underset{\sim}{F}-\underset{\sim}{I}=\frac{\partial u_i}{\partial X_A}$이므로 $\underset{\sim}{u}$의 구배는 기준배치와 현배치에서 일차적으로 동등하게 된다. 즉

$$u_{i,j}\approx u_{i,A}$$
$$E_{AB}\approx\frac{1}{2}(u_{j,A}+u_{i,B})\approx\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\approx e_{ij}.$$

그러므로 미소변형율의 경우 $\underset{\sim}{E}$와 $\underset{\sim}{e}$는 모두 다음과 같이 $\underset{\sim}{F}$와 선형적 관계로 정의된다.

$$\underset{\sim}{E}=\frac{1}{2}(\underset{\sim}{F}+\underset{\sim}{F}^T)-\underset{\sim}{I}=\underset{\sim}{e}. \quad (34)$$

이 정의는 기초적 재료 역학에서 채택되는 정의와 일치하나 전단변형율 값을 $\frac{1}{2}$로 줄여서 지시한다.

벡터장 $\underset{\sim}{\phi}$의 물질적기술 시간도함수(material time derivative)는 미분연산의 연쇄공식으로 다음 관계식이 성립한다.

$$\dot{\underset{\sim}{\phi}}\equiv\left.\frac{\partial\underset{\sim}{\phi}^{(L)}}{\partial t}\right|_{X\text{ 고정}}$$
$$=\left.\frac{\partial\underset{\sim}{\phi}^{(E)}}{\partial t}\right|_{\underset{\sim}{x}\text{ 고정}}+\frac{\partial\underset{\sim}{\phi}^{(E)}}{\partial x_i}\left.\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial t}\right|_{\underset{\sim}{X}\text{ 고정}}$$
$$=\frac{\partial\underset{\sim}{\phi}^{(E)}}{\partial t}+v_i\,\underset{\sim}{\phi}^{(E)}_{,i}\,. \quad (35)$$

그러므로

$$\dot{\underset{\sim}{v}}=\frac{\partial\underset{\sim}{v}^{(E)}}{\partial t}+(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\underset{\sim}{v}. \quad (36)$$

변형의 시간적 변화율을 구하기 위하여 식 (25)를 신장(stretch) λ로 표시하면

$$\lambda\underset{\sim}{n}=\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{N}$$
$$\left(\lambda=\frac{ds}{dS},\ d\underset{\sim}{x}=ds\underset{\sim}{n},\ d\underset{\sim}{X}=dS\underset{\sim}{N}\right). \quad (37)$$

시간으로 미분하면

$$\dot{\lambda}\,n_i+\lambda\,\dot{n}_i=\dot{\overline{(\hat{x}_{i,A})}}\,N_A$$
$$=v_{i,A}\,N_A=v_{i,j}\,\lambda\,n_j. \quad (38)$$

그러므로

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}=\frac{d}{dt}(\ln\lambda)=d_{ij}\,n_i\,n_j=\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{n}$$
$$d_{ij}\equiv\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}). \quad (39)$$

즉 $\ln\lambda$의 시간적 변화율은 속도구배(velocity gradient)텐서의 대칭부분 $\underset{\sim}{D}$로 결정되므로 $\underset{\sim}{D}$를 변형의 시간적 변화율(rate of deformation) 텐서라 한다. 질점역학의 변위가 연속체역학의 $\underset{\sim}{F}$(또는 $\underset{\sim}{C}$)에 대응한다 하면 $\dot{\underset{\sim}{F}}$(또는 $\underset{\sim}{D}$)는 속도에 해당하는 기본척도이다. 미소체적 dv의 변화 및 그 시간적 변화율은 다음과 같이 $\underset{\sim}{F}$ 및 $\underset{\sim}{D}$로 결정됨을 밝힐 수 있다[4].

$$dv=J\,dV$$
$$\dot{\overline{dv}}=div\,\underset{\sim}{v}\,dv=tr\,\underset{\sim}{D}\,dv$$
$$\dot{J}=J\,div\,\underset{\sim}{v}=J\,tr\,D. \quad (40)$$

위에서 J는 Jacob 행열식 $det\,\underset{\sim}{F}$이고 $tr\,\underset{\sim}{D}$는 D_{ii}이다.

참 고 문 헌

(1) C. Truesdell & R.A. Toupin, The Classical Field Theories, in Handbuch der Physik Ⅲ/1 Springer-Verlag, 1960

(2) C. Truesdell & W. Noll The Non-linear Field Theories of Mechanics, in Handbuch der Physik Ⅲ/3, Springer-Verlag, 1965

(3) J.E. Marsden & T.J.R. Hughes, Mathematical Foundations of Elasticity, Prentice-Hall, 1983

(4) L.E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, 1969

(5) R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Addison-Wesley, 1983

(6) C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation, Freeman, 1973

(7) I.S. Sokolnikoff, Tensor Analysis, Wiley, 1951.

(8) A.E. Green & W. Zerna, Theoretical Elasticity, Oxford, 1968

◇