

<論 文>

부수적인 영향을 고려한 일반적인 회전축의
횡진동에 관한 연구

한 동 철*

(1984년 11월 27일 접수)

An Investigation on the Lateral Vibration of General Rotors
Considering Additional Effects

Dong-Chul Han

Abstract

For the prediction of the real vibration and stability behaviour of rotor-bearing systems, various additional effects were considered, which are simplified or neglected by conventional modeling of real rotors. These are specially coupled spring and damping coefficients of journal bearings, spring and damping coefficients of external supporting elements for bearings, static load exerting on gears or pulleys by power transmissions, excitation through the gear tolerance or failure, and positive or negative spring and damping characteristics of magnetic or sealing friction force. Considering these effects, a computer program for the calculation of free and forced vibration of rotating shafts supported by two or more bearings is developed, based on the transfer matrix method. The reliability of the calculated results were ascertained by comparing with the measured data on high speed rotors supported by two journal bearings.

기 호 설 명

B : 베어링 폭

D : 베어링 직경 ($D=2R$)

B/D : 베어링 폭과 직경비

$c_{ik}(d_{ik})$: 베어링의 스프링(댐핑)계수 ($i, k=1, 2$)

$e_{ik}(g_{ik})$: 베어링외부의 스프링(댐핑)계수 ($i, k=1, 2$)

F_A : 자력

F_D : 속도에 비례하는 외력

F_E : 동기 또는 비동기 가진력

F_F : 변위에 비례하는 외력

F_L : 베어링 총 반력

m_a : 베어링 무게

l_j : j 번째 절단요소의 길이

E_j : j 번째 절단요소 재료의 탄성계수

d_j : j 번째 절단요소의 직경

J : 단면에 대한 2차 모우멘트

S, Q : 전단력

M, N : 모우멘트

x, y : 처짐

*정회원, 서울대학교 공과대학 기계설계학과

- ϕ, ψ : 횡각도
 θ_a : 반경방향 회전 관성 모우멘트
 θ_z : 축방향 회전 관성 모우멘트
 $\phi_{\min} = \Delta R_{\min} / R$: 최소 윤활 틈새비
 $\phi_{\max} / \phi_{\min}$: 윤활틈새의 최대치와 최소치의 비
 ω : 회전각 속도
 ω_s : 가진각 속도
 $U = u / \omega_k$: 시스템 뎀핑
 $V = \omega_e / \omega_k$: 시스템 고유진동 속도
 β : 위상각
 ω_k : 축의 고유 진동속도
 ω_b : 베어링의 안정 한계속도
지수
 A : 축의 시작
 E : 축의 끝

1. 서 론

현재의 터보 기계류의 개발이 경량화와 고효율을 목표로 추진되어 회전축의 진동 문제는 더욱 중요시되고 수백개의 자유도계를 갖는 모델을 간편하게 취급할 수 있는 해석적 방법들이 모색되고 있다. 회전축의 진동상태는 이상적인 경우에 축의 강성·질량분포·관성 모우멘트·불균형과 베어링의 특성에 의해 영향을 받는다. 실제 운전에 있어서는 회전체(rotor)에 작용하는 부수적 요인들, 예를 들면 기어동력 전달에 의한 정하중, 치차 및 유체의 맥동에 의한 가진력, 커플링, 실링과 전자적 인력에 의한 스프링 및 뎀핑 효과들이 진동상태에 큰 영향을 주고 있다.

저어널베어링에 의해 회전축이 지지되었을 경우에는 베어링내에 형성된 윤활유막의 특수한 스프링 및 뎀핑 특성으로 인하여 베어링-회전축계의 고유 진동수가 낮아지고 시스템의 뎀핑이 증가되며 공진의 진폭이 작아진다. 그러나 안정 한계속도가 존재하게 되고 그 이상으로 회전수를 증가시킬 경우에는 self exciting 진동 현상의 하나인 "oil whip" 현상이 나타나 진폭이 한계치 이상으로 커져 운전 불가능의 상태를 야기한다. 안정 한계속도는 운전중인 저어널베어링의 평형점 근처에서 선형화 된 4개의 스프링 및 4개의 뎀핑계수를 사용하여 시스템의 고유치를 구하였을 때 시스템 뎀핑이 영이 되는 점이다^(1,2). 이 계수의 계산은 일반적으로 이상화된 모델 및 운전조건에 준한 것이며 실제에서 일어나는 조건들, 즉 윤활유 온도 및 점도의 변화, 유막의 난류상태 및 관성력, 베어링내의 축의 경사 그

리고 윤활유 급유 조건들은 윤활유막의 정적 및 동적 특성, 나아가서는 시스템의 진동 상태에 크게 영향을 미친다^(3,4). 구름베어링의 동특성에 대해서는 별로 알려져 있지 않으나 뎀핑이 일반적으로 매우 적어 공진 폭은 크고 기타 비선형적인 스프링계수와 로울러의 간격으로 인하여 초음파 조화 또는 부수조화 공진현상도 뚜렷하게 되는 것이다. 이러한 진동현상을 완화시키기 위하여 종종 베어링 "외부뎀핑"이 추가 사용 되기도 한다.

베어링과 회전축의 중요한 변수들의 영향은 대칭형 단절점 회전축의 특수 경우에서 공진 및 안정한계선도의 형태로 일목요연하게 나타낼 수 있으며, 이를 근거로 일반적인 형상을 갖는 회전축의 진동상태를 미리 근사적으로 해석할 수도 있다. 그러나 이상화된 일반적인 회전축에, 위에 언급한 부수적 요인들을 모두 고려하면 실제의 회전축에 아주 근사한 해석결과를 얻을 수 있다. 이와같은 복합적인 실제 회전축의 진동 특성을 해석하는 방법은 여러가지가 있으나 그중에서 축을 여러개의(집중질량, 스프링 및 뎀핑을 포함하는) 작은 요소로 나누어 운동방정식을 매트릭스 형태로 전개시켜 직접 해석하는 방법이 가장 널리 쓰인다. 유한 요소법을 사용하여 구조물의 동특성을 계산하는 프로그램도 많이 개발되어 있다. 그러나 매트릭스의 직접적인 취급방법은 컴퓨터의 기억용량과 계산 시간을 많이 소요한다.

이에 대체하는 방법으로선 전달 매트릭스 방법을 들 수 있는데, 선형 진동계 해석에 있어 이 방법의 효용은 많은 논문을 통해 실증된 바이다^(5,6). 특히 저어널 베어링의 뎀핑효과는 크고 또한 운전회전속도에서 선형화된 스프링 및 뎀핑계수들이 수평 및 수직방향으로 연성되어 있어 전달 매트릭스 방법의 적용이 이상적이다. 회전축계의 진동 해석에 있어 낮은 공진회전수와 안정한계회전수, 즉 시스템 뎀핑이 영이 되는 점을 규명하는 것이 실제에서 중요하므로 낮은 고유 진동수만을 구하면 되는데, 이를 위하여 수치해석의 기법을 타각도로 연구 검토할 필요가 있다.

2. 회전축 진동계 요소들의 특성

연구 대상의 진동계는 축방향의 단면이 일정하지 않은 원통형 탄성축과 여러개의 원판을 포함하여 여러 개의 저어널 및 구름베어링으로 지지되어 있다(Fig. 1). 회전체는 외부가진력 F_B , 축의 변위 및 속도에 비례하는 힘 F_F 및 F_D , 자력 F_A 등이 작용하며 베어링의 동특

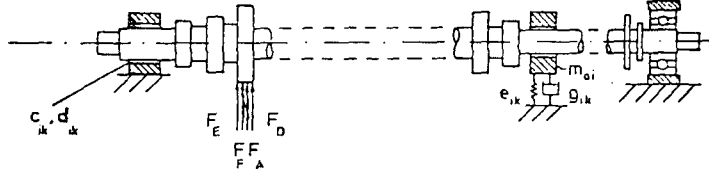


Fig. 1 Dynamic system of rotor and bearings

성은 하중평형점 근처에서 선형화된 스프링 및 댐핑계수 $c_{ik}, d_{ik}(i, k=1, 2)$ 로 나타낼 수 있다. 또한 베어링 외부의 스프링 및 댐핑계수는 e_{ik}, g_{ik} 로 표시된다.

진동해석을 위하여, 축을 단면이 일정한 짧은 원통형 요소로 나누고, 이것이 질량이 없는 탄성보와 오른쪽 끝에 질량이 집중된 질점으로 이루어졌다고 가정한다(Fig. 2). 축보다 상대적으로 지름이 크고 두께가 얇은 원판의 경우 축의 힘에 미치는 영향을 근사적으로 나타낼 수 있는 등가축지름으로 대체하고 여분의 두께에 대한 질량 m_{zj} 는 절단요소의 질량 m_j 에 추가한다. 원판의 반경 및 축방향의 회전 관성 모멘트 θ_{aj}, θ_{zj} , 원판에 작용하는 외력 그리고 베어링 반력들은 해당 절단요소의 질량집중점에 작용한다고 가정한다.

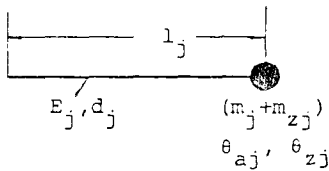


Fig. 2 Element of shaft

베어링의 반력은 Fig. 3에 나타낸 좌표계에 따라 x_L 과 y_L 을 동하중에 의한 축의 변위, 그리고 \dot{x}_L 과 \dot{y}_L 을 속도라 한다면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} F_{Lx} \\ F_{Ly} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{bmatrix} \quad (1)$$

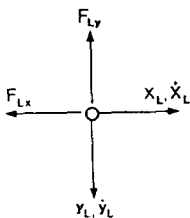


Fig. 3 Coordinate system of journal and bearing

저어널베어링의 스프링 및 댐핑계수는 이방성이고 장

하게 연성되어 있다($c_{12} \neq c_{21} \neq 0, d_{12} \neq d_{21} \neq 0, c_{11} \neq c_{22}, d_{11} \neq d_{22}$). 구름베어링의 스프링특성은 많은 경우에 등방성으로 가정되나 이것은 엄격히 말해서 틈새가 없고 하중을 받지 않을 경우에만 해당되며, 틈새가 있고 정하중을 받는 실제의 경우에는 평형점 근처에서 선형화하여 구한다. 구름베어링의 작은 댐핑으로 인하여 생기는 회전축의 큰 진폭을 낮추기 위하여 Fig. 4에서 처럼 베어링외부를 스프링 및 댐핑 특성을 갖는 요소로 특별히 지지하는 경우가 있다. 이 경우에는 축의 변위 및 속도에 따른 베어링 지지부의 총반력은 다음과 같다⁽²⁾.

$$\begin{bmatrix} F_{Lx} \\ F_{Ly} \end{bmatrix} = \text{Re}[\bar{K}] \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} + J_m[\bar{K}] \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \begin{bmatrix} c_{11} + \omega\lambda d_{11} & c_{12} + \omega\lambda d_{12} \\ c_{21} + \omega\lambda d_{21} & c_{22} + \omega\lambda d_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ &+ \begin{bmatrix} e_{11} + \omega\lambda g_{11} + \omega^2\lambda^2 m_{av} & e_{12} + \omega\lambda g_{12} \\ e_{21} + \omega\lambda g_{21} & e_{22} + \omega\lambda g_{22} + \omega^2\lambda^2 m_{av} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

$$\lambda = -\frac{u}{\omega} + i \frac{\omega_s}{\omega}, \quad (') = \frac{\partial}{\partial \omega t}$$

여기서 ω 는 회전각 속도, ω_s 는 가진각 속도이다.

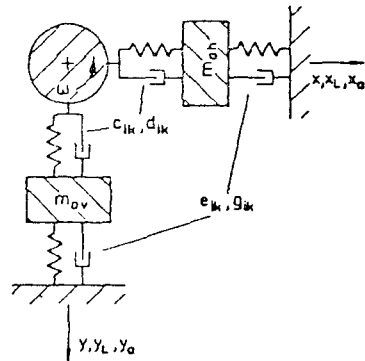


Fig. 4 Model of journal and bearing with external damping

회전축의 변위에 비례하는 외력 F_F 와 속도에 비례하는 외력 F_D 들은 토크를 전달하는 치차, 커플링, 실링 등에 의한 것이며 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{Fx} & 0 \\ 0 & c_{Fy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F_{Dx} \\ F_{Dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{Fx} & 0 \\ 0 & d_{Fy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

회전축과 등기주파수를 갖는 불균형에 의한 가진 또는 비동기 주파수의 기타(j 번째 요소에 작용하는) 가진력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{E_{xj}} &= F_{E_{1j}} \sin(V\phi + \beta_{1j}) \\ F_{E_{yj}} &= F_{E_{2j}} \cos(V\phi + \beta_{2j}) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $V = \omega_s/\omega$ 는 상대적 가진속도, $\phi = \omega t$ 는 회전각, β 는 위상각이다. 불균형에 의한 가진의 경우에는 $V=1$, $F_{E1} = F_{E2} = m\omega^2$, $\beta_1 = \beta_2$ 가 된다.

3. 전달 매트릭스법

앞에서 언급된 등가축의 j 번째 가상적으로 절단된 요소에는 Fig. 5에서 보여주는 바와 같이 단면에 작용하는 전단력(S, Q), 모우멘트(M, N), 처짐(x, y), 그리고 휨각도(ϕ, ψ)로서 그 상태를 나타낼 수 있다. 축에 작용하는 외력(베어링반력 등)은 $\Sigma F_x, \Sigma F_y$, 로 또 회전 관성 모우멘트는 M_k, N_k 로 해당 요소에 추가시킨다. 여기서 z 는 축의 방향이다. 힘과 모우멘트에 의한 절단 요소의 휨과 처짐에 대한 관계식은 평형 조건에 다음과 같이 유도된다.

$x-z$ 평면에 대하여

$$x_j = x_{j-1} + l_j \phi_{j-1} + \left(\frac{l^2}{2EJ}\right)_j M_{j-1} - \left(\frac{l^3}{6EJ}\right)_j S_{j-1}$$

$$\phi_j = \phi_{j-1} + \left(\frac{l}{EJ}\right)_j M_{j-1} - \left(\frac{l^2}{2EJ}\right)_j S_{j-1}$$

$$M_j = M_{j-1} - l_j S_{j-1} + M_{k_j}$$

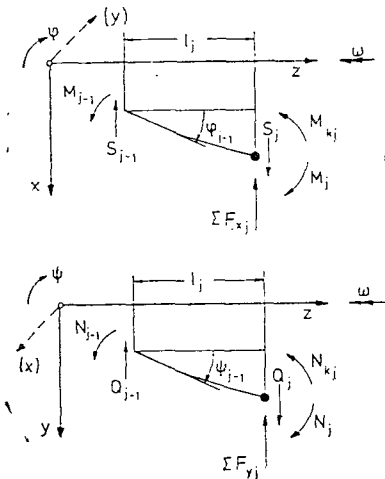


Fig. 5 End forces and deflections for shaft element

$$S_j = S_{j-1} + \Sigma F_{xj} \quad (5a)$$

$y-z$ 평면에 대하여

$$z_j = y_{j-1} + l_j \psi_{j-1} + \left(\frac{l^2}{2EJ}\right)_j N_{j-1} - \left(\frac{l^3}{6EJ}\right)_j Q_{j-1}$$

$$\psi_j = \psi_{j-1} + \left(\frac{l}{EJ}\right)_j N_{j-1} - \left(\frac{l^2}{2EJ}\right)_j Q_{j-1}$$

$$N_j = N_{j-1} + l_j Q_{j-1} + N_{k_j}$$

$$Q_j = Q_{j-1} + \Sigma F_{yj} \quad (5b)$$

회전판 법선방향의 시간적 변화로 인한 gyroscopic 모우멘트 M_k, N_k 는 회전판의 반경방향 및 축방향의 회전관성 모우멘트 θ_a 및 θ_z 를 구하여 계산할 수 있다.

$$M_{k_j} = \theta_{a_j} \omega^2 \phi_j'' - \theta_{z_j} \omega^2 \psi_j'$$

$$N_{k_j} = \theta_{a_j} \omega^2 \psi_j'' + \theta_{z_j} \omega^2 \phi_j' \quad (6)$$

일반적인 경우에 외력은 앞서 언급한 질량, 뎀핑, 강성, 가진, 그리고 베어링의 강성 및 뎀핑에 의한 힘의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Sigma F_x \\ \Sigma F_y \end{bmatrix}_j &= m_j \omega^2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_j'' + \begin{bmatrix} d_{Fx} & 0 \\ 0 & d_{Fy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_j \\ &+ \begin{bmatrix} c_{F11} & c_{F12} \\ c_{F21} & c_{F22} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} F_{E_x} \\ F_{E_y} \end{bmatrix}_j + \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}_{L_j} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 (')는 회전각 $\phi = \omega t$ 에 관한 미분이다.

가속도 ω 로 회전하는 축의 진동가속도를 ω_s 라 하면 절단요소의 상태벡터 $z = [x, y, \phi, \psi, M, N, S, Q]$ 의 속도 및 가속도는 다음과 같다.

$$z = \bar{z} e^{i\lambda t}, \quad z' = \lambda z, \quad z'' = \lambda^2 z, \quad \lambda = -\frac{\omega_s}{\omega} + i \frac{\omega_s}{\omega} \quad (8)$$

수치계산의 편의를 위해 모든 상태의 크기를 무차원으로 전환시키는 데 모든 길이는 평균 축지름 d_0 , 회전각속도 ω 는 축이 완전 고정지지 되었을 때의 고유진동각속도 ω_k 에 대하여 상대적인 크기로 나타낸다. 식 (5)는 절단요소의 원편 ($j-1$)과 오른편 (j)의 처짐 및 작동상태의 transfer 식이므로 가진력항 $F_{E_{xj}}, F_{E_{yj}}$ 를 우선 고려하지 않는다면 다음과 같은 매트릭스 관계식으로 간략히 표현할 수 있다.

$$\bar{z}_j = D_j \bar{z}_{j-1} \quad (9)$$

여기서 \bar{z} 는 복소수의 상태벡터이다. 즉,

$$\bar{z} = [\bar{x}, \bar{y}, \phi, \psi, \bar{M}, \bar{N}, \bar{S}, \bar{Q}]^T$$

$$\bar{x} = x^0 + ix^*, \quad \bar{y} = y^0 + iy^*, \dots \quad (10)$$

그리고 전달매트릭스 D 는 복소수의 요소를 갖는 8×8 매트릭스이다. 축의 시작(Index A)과 끝(Index E) 사이의 전체적인 전달 매트릭스는 각각의 절단요소의 전달 매트릭스를 연계 함으로써 구한다.

$$\bar{T} = D_E \dots D_2 \cdot D_1$$

$$\bar{z}_E = \bar{T} \cdot \bar{z}_A \quad (11)$$

실제 계산에서 매트릭스 D_i 를 따로 저장하고 곱하면

전산기의 기억용량과 계산 시간을 많이 소요하므로 간단한 algorithm을 사용한다. 즉, 단위 매트릭스 \bar{I} 의 8개의 column $\{I_i\}$, ($i, j=1, \dots, 8$)를 각각 왼쪽 끝 상태 벡터로 놓고 전달 식 (5)를 이용하여 축의 오른쪽까지 전달시켜 구한 상태 벡터의 값 $\{T_i\}_j$ 를 T-매트릭스의 각 column에 나열하면 이것이 바로 구하려는 전체 전달 매트릭스가 된다.

$$T = [\{T_i\}_1, \dots, \{T_i\}_8] = D_B \dots D_2 \cdot D_1 [\{I_i\}_1, \dots, \{I_i\}_8] \quad (12)$$

$$\{I_i\}_j = [0, 0, \dots, 1_{i=j}, 0, 0]^T$$

가진력의 상태벡터 \bar{z}_R 에 대한 영향은 선형진동계이므로 따로 계산하여 증점시킬 수 있다. 즉, j 번째의 절단요소에 작용하는 가진력 F_{Ej} , F_{Ej} 로 인한 축의 오른쪽 끝 부분의 상태벡터 $\bar{z}_{R,E}$ 는 다음과 같다.

$$\bar{z}_{R,E} = \bar{T}_R [\bar{O}, \bar{O}, \bar{O}, \bar{O}, \bar{O}, \bar{O}, \bar{F}_{Ej}, \bar{F}_{Ej}]^T \quad (13)$$

$$\bar{T}_R = D_E \dots D_{j+2} \cdot D_{j+1}$$

여기에서도 매트릭스의 곱 $D_B \dots D_{j+1}$ 과정은 식 (5)를 이용하여 연속적으로 직접 계산한다.

상태벡터 \bar{z}_B 와 $\bar{z}_{R,E}$ 의 중첩을 통한 전체 진동계를 서술하는 매트릭스 식은 $\bar{z}_E = T \cdot z_A + \bar{z}_{R,E}$ 가 되며, 더 구체적으로 서술한다면

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \varphi \\ \psi \\ \bar{M} \\ \bar{N} \\ \bar{S} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \bar{B} & \bar{C} \\ \dots \\ \dots \\ \bar{T} \\ \dots \\ \dots \\ \bar{A} & \bar{D} \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \varphi \\ \psi \\ \bar{M} \\ \bar{N} \\ \bar{S} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} z_{R,1} \\ z_{R,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_E \quad (14)$$

이 된다. 이의 해를 구하기 위하여 본 연구에서는 양쪽이 자유단인 회전축을 예를 들어 다음과 같은 경계조건을 설정한다.

$$\bar{M}_E = \bar{N}_E = \bar{S}_E = \bar{Q}_E = \bar{M}_A = \bar{N}_A = \bar{S}_A = \bar{Q}_A = \bar{O} \quad (15)$$

이 경계조건을 식 (14)에 대입하면 두 개의 더 작은 방정식군으로 나뉘어지게 된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \bar{B} \\ \dots \end{bmatrix}_E \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} z_{R,1} \\ z_{R,2} \\ z_{R,3} \\ z_{R,4} \end{bmatrix}_E \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{O} \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \bar{A} \\ \dots \end{bmatrix}_E \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} z_{R,5} \\ z_{R,6} \\ z_{R,7} \\ z_{R,8} \end{bmatrix}_E \quad (17)$$

회전축계의 고유진동에 있어 시스템 뎀핑 $U = u/\omega_k$ 와

주파수 $V = \omega_c/\omega_k$ 를 계산하려면 식 (17)에서 $\bar{z}_{R,E} = 0$ 으로 한 방정식군을 풀어야 한다. $\bar{x}, \bar{y}, \varphi, \psi$ 의 non-trivial 해를 구하기 위해서는 매트릭스 \bar{A} 의 determinant $\Delta(A) = 0$ 이어야 하며 이를 만족시키는 $\lambda_i = -U_i + iV_i$ ($i=1, \dots, n$)들이 바로 시스템의 고유치가 된다. 각각의 고유치 λ_i 에 대한 진동형은 축의 처음 부분의 어느 한 값을 기준으로(예를 들어 $x_A = 1$) 나머지 변위 및 처짐각의 상대적인 값을 식 (17)에서 구하고 각 절단요소마다의 변위 및 처짐을 다시 전달식을 이용하여 계산한다.

회전축 계의 강제진동을 해석하기 위해서는 식 (17)에서 주어진 회전 및 가진속도에서 $\bar{x}, \bar{y}, \varphi, \psi$ 의 값을 구하고 다시 전달식을 이용하여 각 절단 요소의 상태를 구한다. 베어링 지지부의 변위 $(\bar{x}, \bar{y})_i$ 을 구하면 식 (2)에 대입하여 베어링의 동적인 반력이 구해진다. 진폭 S 는 여기서 타원형의 축의 중심의 궤적에서 장축의 반을 말하며 다음 식으로 계산된다.

$$S_{\max} = \sqrt{S_1^2 + \sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \quad (18)$$

$$S_1 = 0.5(x^{02} + x^{*2} + y^{02} + y^{*2})$$

$$S_2 = x^* \cdot y^0 - x^0 \cdot y^*$$

y 축과 장축이 이루는 각도 α 는

$$\alpha = 0.5 \arctan(2(x^0 y^0 + x^* y^*) / (y^{02} + y^{*2} - x^{02} - x^{*2})) \quad (19)$$

로 구한다.

4. 고유치 수치해석

앞서 언급한 식 (17)의 \bar{A} -매트릭스의 determinant $\Delta(A) = 0$ 이 되게 하는 고유치 λ_i 를 구하는 데는 수치해석적 방법이 최선이라 하겠다. 즉, λ_i 에 복소수의 값을 대입하여 determinant Δ 가 충분히 작은 값 $\epsilon \rightarrow 0$ 이 되게끔 반복적으로 계산하여 해를 구한다.

여기서 determinant Δ 는 구하려는 복소수근 λ 의 polynomial로 간주될 수 있으므로 수치 해석에 있어 수렴을 빠르고 확실하게 하기 위하여 참고문헌 (7)의 steepest descent method를 적용한다.

목적함수가 $\Delta(A) = \Delta^0 + i\Delta^* = 0$, $A = X + iY$ 일 때 어떤 함수 F 가 nonnegative 이고 미분 $\partial F/\partial X$, $\partial F/\partial Y$ 가 존재하며 $\Delta(A) = 0$ 가 되는 점에서 $F = 0$ 이며 이 점이 F 의 최솟치라면 F 의 steepest descent 방향은 상수 $h > 0$ 에 대하여

$$\Delta X = -h \frac{\partial F}{\partial X}, \quad \Delta Y = -h \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (20)$$

이 된다. 상수 h 를 구하기 위하여 $\Delta(A) = 0$ 의 근처에

서 Taylor 급수전개를 수행하면

$$\begin{aligned} \Delta^0 &\approx \Delta_0^0 + \left(\frac{\partial \Delta^0}{\partial X}\right)_0 \Delta X + \left(\frac{\partial \Delta^0}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y \approx 0 \\ \Delta^* &\approx \Delta_0^* + \left(\frac{\partial \Delta^*}{\partial X}\right)_0 \Delta X + \left(\frac{\partial \Delta^*}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y \approx 0 \end{aligned} \quad (21)$$

이 되고 Cauchy-Riemann 식

$$\frac{\partial \Delta^0}{\partial X} = \frac{\partial \Delta^*}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \Delta^0}{\partial Y} = -\frac{\partial \Delta^*}{\partial X} \quad (22)$$

를 뒷 식에 대입하여 ΔX 와 ΔY 에 대하여 풀면

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{-\Delta_0^0 \left(\frac{\partial \Delta^0}{\partial X}\right)_0 - \Delta_0^* \left(\frac{\partial \Delta^*}{\partial X}\right)_0}{\left(\frac{\partial \Delta^0}{\partial X}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial \Delta^*}{\partial X}\right)_0^2}, \\ \Delta Y &= \frac{\Delta_0^0 \left(\frac{\partial \Delta^*}{\partial X}\right)_0 - \Delta_0^* \left(\frac{\partial \Delta^0}{\partial X}\right)_0}{\left(\frac{\partial \Delta^0}{\partial X}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial \Delta^*}{\partial X}\right)_0^2} \end{aligned} \quad (23)$$

이다. 따라서 식 (20)과 비교하면

$$\begin{aligned} F &= \Delta^0 + \Delta^{*2} \geq 0 \\ h &= \frac{0.5}{\left(\frac{\partial \Delta^0}{\partial X}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial \Delta^*}{\partial Y}\right)_0^2} > 0 \end{aligned} \quad (24)$$

이 되는데, 이것은 앞서 언급한 조건들을 만족하므로 수치해석에 있어 식 (23)의 ΔX 와 ΔY 를 택하면 초기 값에 관계없이 $F=0$ 및 $\Delta(A)=0$ 에 수렴한다. 실제 계산에 있어 미분 $\partial \Delta^0 / \partial X$, $\partial \Delta^* / \partial X$ 는 해석적으로 구할 수 없으므로 임의의 작은 값의 ΔX 를 택하여 계산한 determinant의 차 $[\Delta(-A=X+\Delta X+iY) - \Delta(A=X+iY)]$ 의 실수부분과 허수부분을 나누어 구한 다음 다시 식 (23)의 ΔX 와 ΔY 를 구하고 전단계의 X 및 Y 값에 대하여 반복 계산한다. 이 반복계산은 $|\Delta A|/|A_0| < 10^{-7}$ 될 때 수렴이 된 것으로 간주하였다.

여러 개의 고유치 $\lambda_j (j > 1)$ 를 계산함에 있어 같은 근의 수렴을 방지하기 위하여 A 의 polynomial로 간주할 수 있는 determinant의 수치계산에 있어 이미 구하여진 근들로 artificial division을 행한다.

$$\Delta_{n+1}(A_0) = \frac{\Delta(A_0)}{\prod_{j=1}^n (A_0 - \lambda_j)(A_0 - \lambda_j^*)} \quad (25)$$

여기서 determinant인 polynomial의 계수가 실수이면 구하여진 근 λ_j 에는 언제나 공액복소수 λ_j^* 가 존재한다는 것을 고려하였다.

5. 계산 결과

계산 모델로써 고속원심 송풍기를 선택하였다(Fig. 6). 두개의 베어링에 지지되어 있으며 임펠러가 외팔보로 지지되어 있어 앞뒤 베어링 반력의 차이가 상당

히 큰 비대칭형의 축이며, 또한 임펠러의 gyroscopic 영향이 매우 크다. 축 전체를 24개의 절단 요소로 나누었으며 저어널 베어링, 로울러 베어링, 그리고 로울러 베어링에 외부 댄핑요소를 설치한 세가지의 경우에 있어 자유진동 및 강제진동 해석을 행하였다.

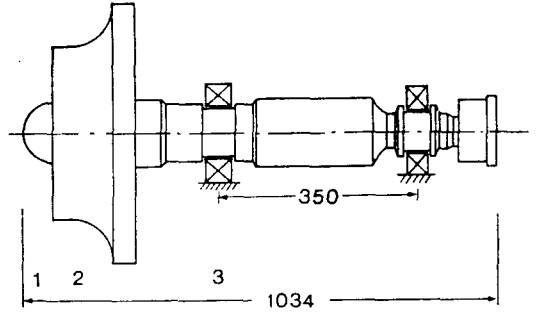


Fig. 6 Model of a radial fan

회전축이 베어링 지지부에 완전 고정 되었다고 가정할 경우의 고유진동 속도는 $\omega_k = 545 \text{ rad/sec}$ 이며 회전체의 gyroscopic 영향을 고려할 경우에는 $\omega_k = 585 \text{ rad/sec}$ 로 증가하였다.

Fig. 7에는 두 개의 4-lobed 저어널 베어링⁽⁴⁾에 의하여 지지된 경우의 자유진동에 있어 낮은 고유치 $\lambda_{1,2} = -u/\omega_k + i\omega_e/\omega_k$ 두 개를 계산하여 회전자 속도 ω/ω_k 에 대비하여 나타내었다. 여기서 $u/\omega_k \leq 0$ 인 회전수 범위에서는 시스템이 불안정하여지는 oil-whip 현상이 나타나는 것이다. 고유진동수 $\omega/\omega_k = \omega_e/\omega_k$ (그림의 점선)가 되는 회전자속도 ω 에서는 공진이 일어남을 예측할 수 있다.

Fig. 8에는 앞과 같은 경우의 불균형에 의한 강제진동에 있어 각 부분의 진폭 S 를 회전자속도 ω 에 대비

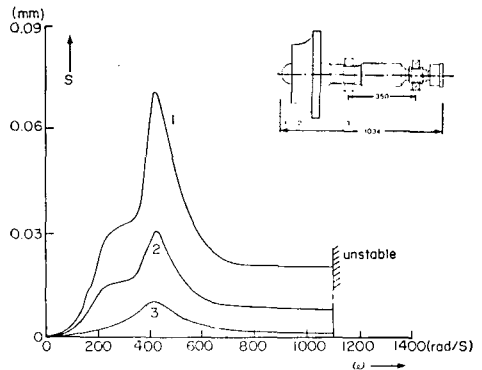


Fig. 8 Amplitude vs. rotating velocity ω of a radial fan supported by 4-lobed journal bearings

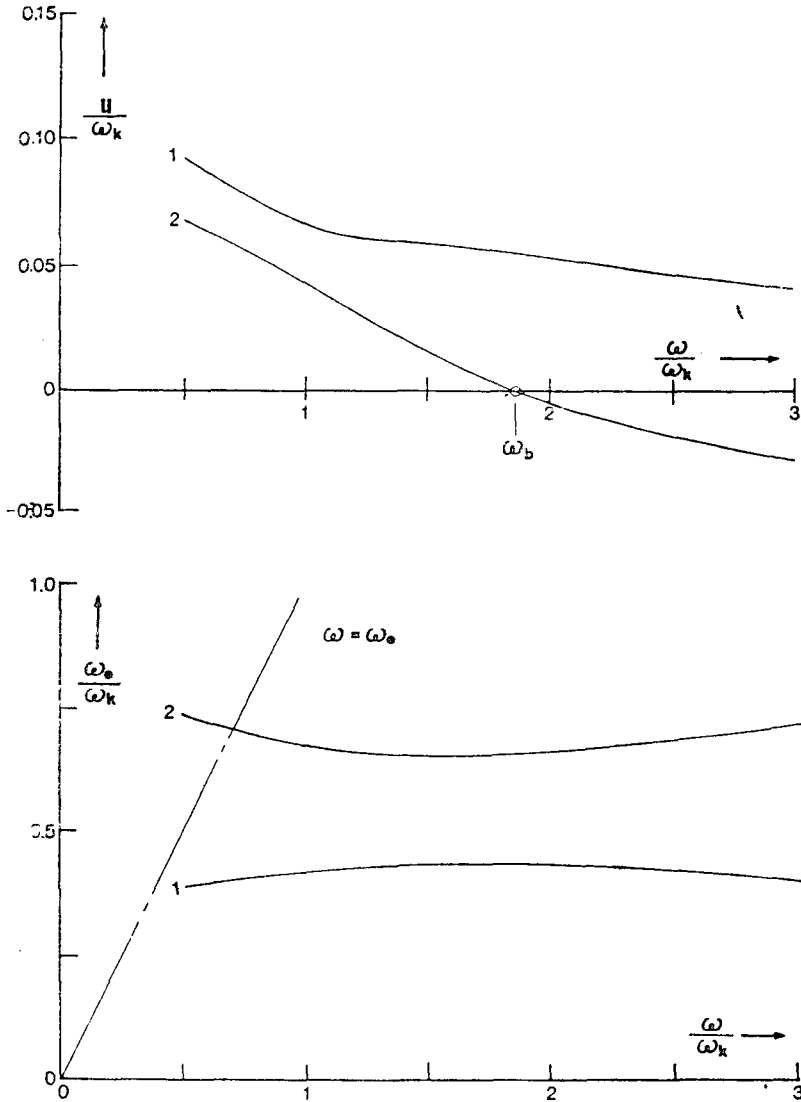


Fig. 7 System damping and natural frequency of a radial fan rotor supported by 4-lobed journal bearing

하여 나타내었다. 공진 회전속도에서의 진폭이 비교적 작으므로 일반적인 경우 이 속도보다 높고 안정한계속도 $\omega_b=110[\text{rad/s}]$ 보다 작은 범위에 운전 점을 설정한다.

Fig. 9 에는 보울베어링에 위하여 지지되어 있는 경우 불균형에 의한 강제진동에 있어 진폭 S 를 회전자 속도 ω 에 대비하여 나타내었다. 보울베어링의 뱀핑은 참고문헌 (8,9)에 따라 스프링 계수의 1/1000 값을 적용하였다. 공진폭은 저어널베어링에 지지되어 있을 경

우보다 훨씬 큼을 알 수 있다.

Fig. 10 은 앞의 보울베어링을 스프링계수 $e_{22}=20,000 \text{ N/mm}$, 뱀핑계수 $g_{22}=20 \text{ Ns/mm}$ 를 갖는 “외부 요소”로 지지할 경우의 불균형에 의한 강제 진동에 있어 진폭을 나타낸다. 외부 뱀핑으로 인하여 공진 속도는 낮아지고 진폭도 훨씬 작아짐을 알 수 있으며, 이것은 고속 회전축의 실제 설계에 응용할 수 있는 것이다.

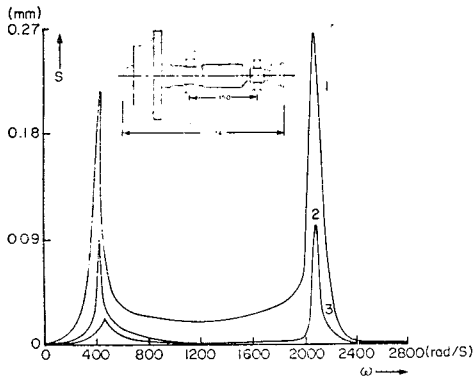


Fig. 9 Amplituds S vs. rotating velocity ω of a radial fan supported by ball bearing

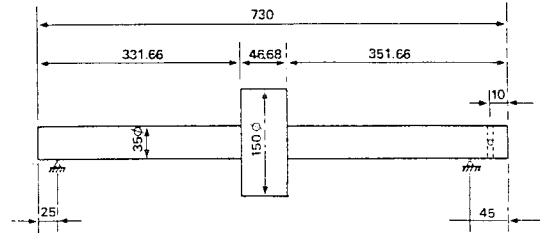


Fig. 11 Rotor

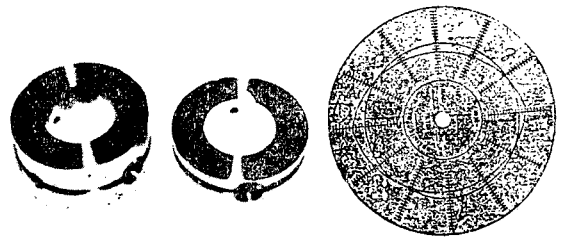


Fig. 12 Two-lobed journal bearing

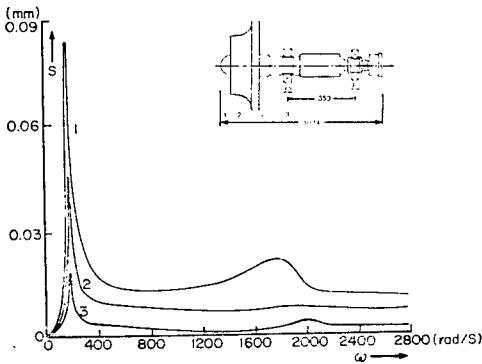


Fig. 10 Amplitude S vs. rotating velocity ω of a radial fan supported by ball bearing with external damping

Table 1 The calculated and measured natural frequency

Mode	Calculated	Measured
1.	96 Hz	98 Hz
2.	642 Hz	635 Hz
3.	1235 Hz	1280 Hz

6. 실험

이상 언급한 해석 방법과 계산 결과의 실제 사용에 있어서의 신빙성을 검토하기 위하여 축진동 측정 실험을 수행하였다. 본 실험에 사용된 축의 제원은 Fig. 11에 나타나 있으며 베어링은 2할면(two-lobed 또는 레몬형) 저어널베어링(Fig. 12)을 사용하였는데, 베어링 폭과 직경의 비는 $B/D=0.8$, 최소 윤활층세의 변경에 대한 비는 $\phi_{\min}=\Delta R_{\min}/R=0.002$, 윤활층세의 최대치와 최소치의 비는 $\phi_{\max}/\phi_{\min}=3$, 그리고 베어링 재질은 황동이다. 저어널베어링의 스프링 및 댐핑계수는 참고문헌 (3)에서 취하였다.

우선 앞에 서술된 전달 매트릭스법에 의해서 베어링 지지부가 완전 고정되어 있을 때의 고유진동수 3개를 구하고 또한 충격 시험법에 의하여 구한 고유 진동수 (Fig. 13)를 Table 1에 수록하였다.

수치해석에 있어 Fig. 11의 회전축은 24개의 요소로 나누었으며 실험결과와 거의 일치함을 알 수 있다.

회전축의 구동은 1.5 kW DC 모우터(0-3000 rpm)를 이용하고, 타이밍 벨트를 사용하여 1:4로 증속시킬 수 있도록 하였다. 기어풀리가 끼워져 있는 $D=30$ mm의 구동축은 두 개의 보울베어링에 의하여 지지되어 있으며 구동축과 실험축은 진동차단을 위하여 가는 봉으로 연결되어 있다. 회전축 중앙에 위치한 회전체에 수평(X -)방향과 수직(Y -)방향에 각각 비접촉 변위감응계를 설치하고 증폭기를 통하여 오실로스코프에 연결시켜 회전하는 회전체의 진동 제도를 관찰할 수 있도록 하였다. 또 한편으로 X - Y -방향의 진동변위 signal을 $\sqrt{X^2+Y^2}$ 회로를 통하여 합성시키고 구동축에서 감지한 회전속도 signal과 함께 A/D 변환기를 통하여 마이크로 컴퓨터(APPLE-II)에 입력시켜 화면에 회전수에 대비한 진폭의 크기 변화를 직접 관찰하고 필요한 경우 프린터에 출력시키도록 하였다. Fig. 14에 실험 장치의 설계도가 나타나 있다.

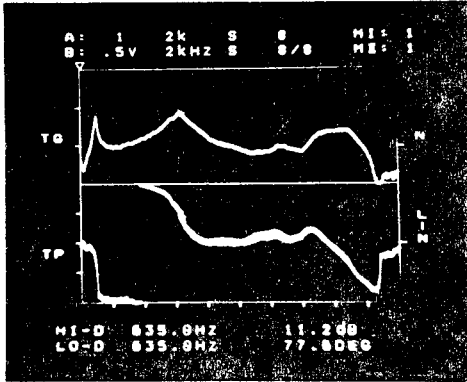


Fig. 13 Natural frequency of the rotor(Fig. 11) by impuls test

두 개의 저어널베어링에 공급되는 윤활유(24 cP/50°C)의 유량과 압력은 윤활유 공급장치에 설치된 3개의 밸브에 의하여 조정되고 베어링에서 유출된 윤활유는 윤활유 탱크에 모여져 냉각후 항온조에 들어가 일정한 온도(25°C)가 된 다음 기어펌프에 의하여 다시 베어링으로 유입된다. 본 실험에서는 유입압력 $p=2$ bar로 하였다. Fig. 15(a)에는 계산된 회전축의 진폭을 회전수에 대비하여 나타내었고 Fig. 15(b)에는 실험적으로 측정된 실험축의 진폭을 나타내었다. 계산에 있어서 회전축의 불균형 양은 가정하였으므로 진폭의 크기는 직접 비교할 수 없으나 공진 회전속도가 5500 rpm에서 잘 일치하고 있다. 또 하나의 공진이 6200 rpm에서 나타나는 것은 Fig. 15(c)에 나타나 있는 것처럼 구동

축의 공진으로 인한 것이라고 판단된다.

7. 결 론

실제에서 쓰이는 일반적인 형상을 갖는 굽힘축(flexible rotor)에 있어 원판의 gyroscopic 영향, 원판에 작용하는 외부스프링 및 댐핑에 의한 힘, 지지하여 주는 베어링에 있어 저어널베어링, 구름베어링, 베어링의 외부 댐핑 등의 부수적인 영향을 고려하여 자유 진동 및 강제 진동을 해석할 수 있는 방법으로서 컴퓨터 기억용량을 최소화하는 방법을 적용하여 전달 매트릭스 방법을 사용하였으며 실제에서 필요로 하는 낮은 고유진동수와 시스템 댐핑 및 안정한 계속도를 빠른 시간에 계산하기 위하여 steepest descent method를 사용하였다.

이러한 이론에 근거한 일반적인 회전축 진동 해석용 범용프로그램을 개발하였으며 서울대학교 공과대학 전산실에 설치된 MV/8000과 VAX11/750을 이용하여 전에 개발된 유사한 프로그램 (8)의 동일한 예제에 대한 계산결과를 비교한 결과 계산에 사용된 기억용량이 1/10로 감소되었으며 저어널베어링에 지지된 축의 고유치 계산 시간이 60 배 빨라졌고 수렴이 확실해졌음을 확인하였다.

위의 프로그램을 이용하여 고속원심송풍기의 축을 예로 들어 진동 해석을 하였으며 베어링의 종류를 변환시켜 가면서 자유진동에서의 고유치를 구하고 불균

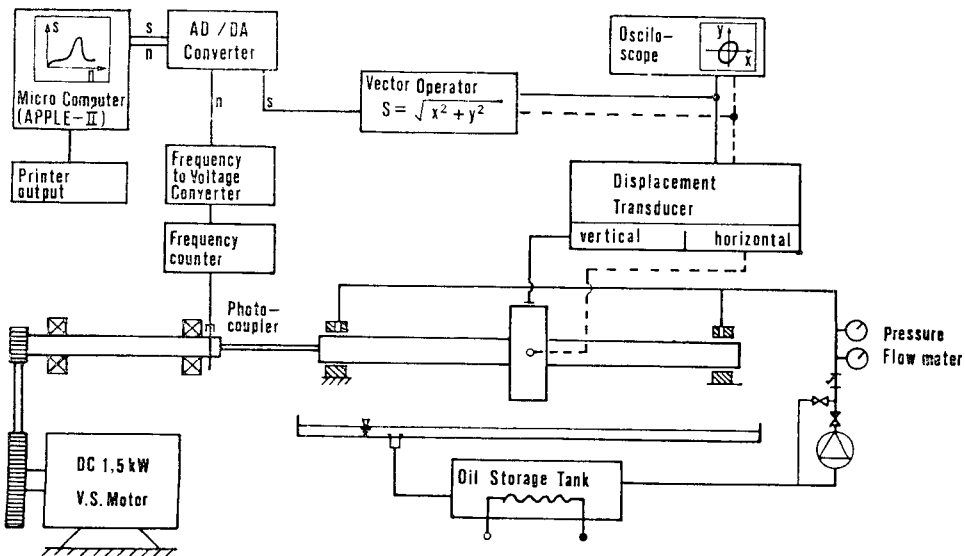


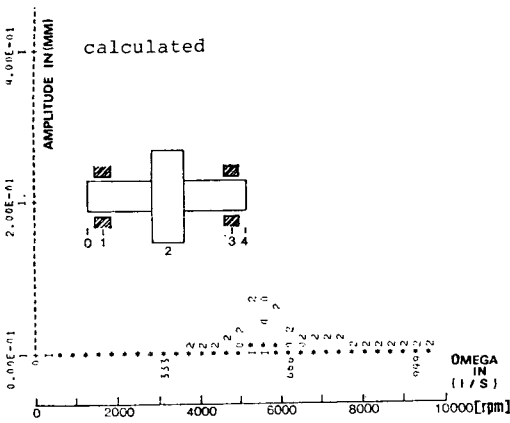
Fig. 14 Schematic layout of experimental apparatus

후 기

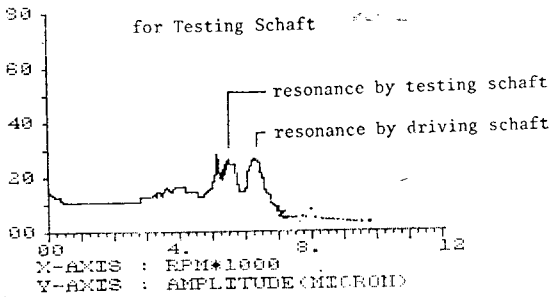
본 연구는 한국학술진흥재단의 1983년도 연구 지원비에 의하여 연구되었으며, 재단 및 관계자 여러분에게 심심한 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

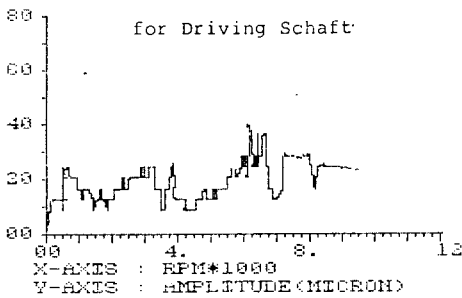
- (1) Someya, T., Stabilität Einer in Zylindrischen Gleitlagern Laufenden, Unwuchtfreien Welle-Beitrag Zur Theorie Des Instationar Belasteten Gleitlagers, Diss, Techn, Hochschule Karlsruhe 1962
- (2) Glienicke, J., Theoretische und Experimentell Ermittlung der Systemdämpfung Gleitgelagerter Rotoren und Ihre Erhöhung Durch Eine äußere Lagerdämpfung, Fortschr.-Ber. VDI-z Reihe 11 Nr. 13, Dusseldorf 1972
- (3) Glienicke, J., Han, D.-C. and Leonhard, M., Practical Determination and use of Bearing Dynamic Coefficients, Tribology International, Dec. pp.297~309, 1980
- (4) Han, D.-C.: Theoretische Ermittlung der Kennlinien und Stabilitätseigenschaften Hochtouriger Hybridlager, Fortschr.-Ber, VDI-Z Reihe 1 Nr. Düsseldorf 1983, 106
- (5) Lund, J.W., "Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings", Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, May pp.509~517, 1974
- (6) Pestel, E.C., Leckie, F.A., "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-Hill Book Company, 1963
- (7) Moore, J.B., A Convergent Algorithm for Solving Polynomial Equations, J. Asc. Comp. Mach. Vol. 14, Nr. 2, pp.311~315, 1967
- (8) Glienicke, J.u. Wiedenmann, R., Programme zur Berechnung der Selbst-und Unwucherregten Schwingungen Allgemeiner Gleitgelagerter Rotoren, Forsch.-Ber. H. 61 der Forschungsvereinigung Antriebstechnik, Frankfurt/M. 1977
- (9) Klumpers, K.u. Weck M.: Experimentelle und Theoretische Bestimmung der Dämpfungswerte Von Wälzlager Systemen. Forsch.-Ber. H. 68 der Forschungsvereinigung Antriebstechnik Frankfurt/M. 1979



(a)



(b)



(c)

Fig. 15 Calculated and measured amplitude curves

형에 의한 강제진동에서의 진폭을 회전 속도에 대비하여 나타내고 비교 검토하였다.

계산 프로그램의 결과를 실제 사용함에 있어서의 신빙성을 검토하기 위하여 회전축의 진동측정 실험을 수행하였다. 두개의 two-lobed 저어널베어링에 지지된 중간에 회전체를 갖는 회전축을 0-10000 rpm 까지 회전시켜 비접촉 변위계를 통하여 측정된 진폭은 계산결과와 잘 부합함을 확인하였다.