

<論 文>

비균질성 석출물의 응력장과 변형에너지

—(I) 두개의 구형석출물에 대한 탄성해—

최 병 익* · 엄 윤 용*

(1984년 9월 13일 접수)

Stress Field and Deformation Energy of Inhomogeneous Precipitates

—(I) An Elastic Solution for Two Spherical Precipitates—

Byoung Ik Choi and Youn Young Earmme

Abstract

Using the tensor elastic Green functions an exact integral equation is formulated for two anisotropic precipitates embedded in an infinite anisotropic matrix; the matrix is subjected to an applied strain field or the precipitates undergo a stress-free transformation strain. This equation is reduced to an infinite system of algebraic equations by expanding the strains in Taylor series about the two points within each precipitate, and an approximation of the strain distributions within the two spherical precipitates is obtained by truncating the higher order terms.

Since the present method requires no symmetry condition between the two spherical precipitates, it is possible to obtain the strain distribution within the precipitates when the elastic constants and/or the sizes of the precipitates are different each other. The strains are expanded about arbitrary points, giving more accurate distributions of the strains than those presented elsewhere. The present method can be directly extended to the case of more than two spherical precipitates.

기 호 설 명

a : 구(sphere)의 반경
 a_A, a_B : 구형석출물 A, B 의 반경
 R : 구의 중심의 위치벡터
 R^A, R^B : 구형석출물 A, B 의 중심의 위치벡터
 x^A, x^B : 석출물 A, B 안에 있는 점의 위치벡터
 x, y, z : 위치벡터들

$x \cdot z$: 두 벡터 x 와 z 의 내적(inner product)
 C_{ijkl} : 기체의 강성텐서(stiffness tensor)
 C_{ijkl}^* : 영역 Ω 의 강성텐서
 ΔC_{ijkl} : $C_{ijkl}^* - C_{ijkl}$
 C_{ijkl}^A, C_{ijkl}^B : 석출물 A, B 의 강성텐서
 $\Delta C_{ijkl}^A, \Delta C_{ijkl}^B$: $C_{ijkl}^A - C_{ijkl}, C_{ijkl}^B - C_{ijkl}$
 G_{ij} : Green 텐서
 \bar{M}_{ij}^* : Christoffel 강성행렬의 역행렬(inverse)
 $\delta(x)$: Dirac delta 함수

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

δ_{ij}	: Kronecker delta
θ	: 영역 Q 의 특성함수
θ_A, θ_B	: 석출물 A, B 의 특성함수
u_i	: 변위벡터 성분
ϵ	: misfit
ϵ_{ij}	: 변형도(strain)성분
ϵ_{ij}^T	: 영역 Q 의 응력과 무관한 변형도
$\epsilon_{ij}^{TA}, \epsilon_{ij}^{TB}$: 석출물 A, B 의 응력과 무관한 변형도
ϵ_{ij}^H	: 기재의 외부에서 가해지는 변형도
$\bar{\epsilon}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}^T, \bar{\epsilon}_{ij}^A, \bar{\epsilon}_{ij}^B, \bar{\epsilon}_{ij}^{TA}, \bar{\epsilon}_{ij}^{TB}$: 각각 $\epsilon_{ij}(x)\theta(x)$, $\epsilon_{ij}^T(x)\theta(x)$, $\epsilon_{ij}(x)\theta_A(x)$, $\epsilon_{ij}(x)\theta_B(x)$, $\epsilon_{ij}^{TA}(x)\theta_A(x)$, $\epsilon_{ij}^{TB}(x)\theta_B(x)$ 의 Radon 변환
λ, μ	: 기재의 Lamé 상수
λ_A, μ_A	: 석출물 A 의 Lamé 상수
λ_B, μ_B	: 석출물 B 의 Lamé 상수

1. 서 론 *Introduction*

탄성체의 내부에 탄성계수가 기재(matrix)와 다른 석출물(precipitate)이 있어서 외부에서 가한 응력장(stress field)의 균일성을 교란하거나, 이들 석출물 또는 탄성계수가 기재와 같은 함유물(inclusion)에 응력과는 무관한 변형도(stress-free transformation strain)가 있는 경우에는 석출물에 대한 기재의 구속으로 인하여 응력상태가 발생한다. 전자의 경우에는 “비균질성 문제(inhomogeneity problem)”로, 후자의 경우에는 “변태 문제(transformation problem)”로 불리고 있다⁽¹⁾. 이러한 응력상태에 있는 석출물끼리의 상호작용(interaction)은 Guinier-Preston Zone 혹은 석출물의 규칙적인 배열⁽²⁾이나 void lattice 형성⁽³⁾ 등 여러 현상에 간여하여 재료의 미시적 구조에 영향을 끼침이 알려져 있다. 특히, 두개의 석출물이 인접하여 있을 때의 응력분포를 아는 일은 응력집중 등 역학적인 관심사인 이외에도 상호작용에너지(interaction energy)를 구하는 등 석출물의 상호작용에 대한 이해를 넓히는 전제가 된다.

석출물의 상호작용과 관련된 대부분의 현상들은 비등방성 기재에서 관찰되며 상호작용은 기재와 석출물 사이의 탄성계수의 차나 기재의 비등방성 등에 크게 좌우된다⁽⁴⁾. 그러나 두개의 석출물이 있는 경우에 대한 탄성장(elastic field)을 구하는 지금까지의 연구들은 등방성 기재에서의 비균질성문제⁽⁵⁻⁸⁾ 또는 기재와 탄성계수가 같은 함유물의 변태문제⁽⁹⁾에 대한 것이다.

둘 또는 그 이상의 함유물이 있을 때의 탄성장은 함유물 한개가 독립하여 있을 때의 탄성장을 중첩(superposition)하여 나타낼 수 있으나 석출물인 경우에는 이러한 중첩이 불가능하여 상당히 복잡한 경계치문제(boundary value problem)를 해결해야 한다.

Willis⁽¹⁰⁾는 Green 함수를 이용하여 비등방성 기재안에 있는 두개의 구형 기포(gas bubble)에 대한 적분방정식을 유도하고 반복방법(iterative method)으로 변형도분포와 상호작용에너지를 구한 바 있다. 이 방법은 후에 두개의 구형 석출물에 확장된다⁽¹¹⁾. 이 방법은 비등방성 기재 안의 두개의 석출물의 변형도분포를 구할 수 있는 방법으로서 현실적으로 유일하나, 몇가지 제한 점이 있다. 두 구형석출물의 크기나 재질 등이 똑같아서 한 석출물 안의 어떤 점에서의 응력상태와 똑같은 상태에 있는 점이 다른 석출물 안에 항상 존재해야 한다. 또한 석출물 안에서의 변형도분포가 구의 중심에 원점을 둔 공간 좌표의 다항식으로 얻어지므로 기재와 석출물 사이의 경계면에 가까워질수록 부정확한 해가 얻어진다.

본 연구에서는 비등방성 기재 안에 있는 두개의 비등방성 구형석출물에 대한 보다 일반적인 해법이 다루어진다. Green함수와 석출물의 특성함수(characteristic function)을 이용하여 변형도에 대한 적분방정식이 유도되었으며, Taylor 급수를 이용한 근사해가 얻어졌다. 이 방법은 어떠한 대칭성도 필요로 하지 않으므로 석출물의 크기나 재질 등이 서로 다른 경우에 적용될 수 있으며 급수전개하는 점을 옮김으로써 기존의 연구에서보다 더욱 정확한 해를 얻을 수 있다. 또한 특성함수의 중첩이 가능함을 이용하면 이 방법은 세개 또는 그 이상의 석출물을 갖는 계(system)에도 적용될 수 있다.

실제의 계산은 크기 상으로 꼭 맞지 않는 양(misfit)이 있는 석출물의 변태 문제에 대하여 수행되었다. 비등방성 기재에 비등방성 석출물이 있는 경우, 석출물의 크기 및 탄성계수가 서로 다른 경우 등 몇가지 경우에 대한 변형도 분포의 예를 보인다.

2. 적분 방정식

탄성계수가 C_{ijkl} 인 무한 고체 안의 어떤 영역 Q 에서의 탄성계수가 C_{ijkl}^* 이라면 전체 영역에 대한 탄성계수는 위치벡터 x 의 함수로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{ijkl}(x) = C_{ijkl} + \Delta C_{ijkl} \theta(x) \quad (1)$$

여기에서 $\Delta C_{ijkl} = C_{ijkl}^* - C_{ijkl}$ 이며, 영역 Ω 의 특성함수(characteristic function) θ 는 다음 식으로 정의된다.

$$\theta(x) = \int_{\Omega} \delta(x-y) dV(y) \quad (2)$$

응력과는 무관한 변형도 ϵ_{ij}^T 가 영역 Ω 에 존재하면 전체의 응력장에서 $\epsilon_{mn}^T(x)\theta(x)$ 만큼의 영향이 고려되어야 한다. 영역 전체에 대한 응력장은

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x)\epsilon_{kl}(x) - C_{ijkl}^*\epsilon_{kl}^T(x)\theta(x) \quad (3)$$

으로 표현된다. 체적력(body force)이 없으면 이 무한고체의 정적 평형은 Cartesian 좌표계에서

$$C_{ijkl}u_{i,jk}(x) = C_{ijkl}^*[\epsilon_{kl}^T(x)\theta(x)],_j - \Delta C_{ijkl}[u_{i,k}(x)\theta(x)],_j \quad (4)$$

으로 표현됨을 보일 수 있다.

탄성계수가 C_{ijkl} 인 균일한 무한 고체에 대한 Green 텐서 G_{im} 은

$$C_{ijkl}G_{im,jk}(x) + \delta_{in}\delta(x) = 0 \quad (5)$$

으로 정의되며, 이를 이용하면 식 (4)의 형식적 해(formal solution)는 다음과 같음을 보일 수가 있다.

$$u_n(x) = u_n^0(x) + \quad (6)$$

$$\Delta C_{ijkl} \int G_{im}(x-y)[u_{i,k}(y)\theta(y)],_j dV(y).$$

여기에서

$$u_n^0(x) = u_n^H(x) - C_{ijkl}^* \int G_{im}(x-y)[\epsilon_{kl}^T(y)\theta(y)],_j dV(y) \quad (7)$$

이다. $u_n^H(x)$ 는 식 (4)의 homogeneous solution이며, 적분은 전 영역에 대한 체적적분(volume integral)을 의미한다. 식 (6)의 양변을 x_n 으로 미분하여 다음의 적분방정식을 얻는다.

$$u_{n,n}(x) = u_{n,n}^0(x) + \Delta C_{ijkl} \int G_{im,n}(x-y)[u_{i,k}(y)\theta(y)],_j dV(y) \quad (8)$$

Willis⁽¹⁰⁾ 또는 Asaro와 Barnett⁽¹²⁾ 등은 식 (8)의 적분과 유사한 형태의 체적적분을 convolution 정리 등을 이용하여 단위 구면에 대한 면적적분(surface integral)으로 유도한 바 있다. 같은 방법을 따르면 식 (8)로부터 다음의 적분방정식이 얻어진다.

$$\epsilon_{mn}(x) = \epsilon_{mn}^0(x) + \frac{1}{8\pi^2} \Delta C_{ijkl} \int_{|z|=1} N_{nnij}(z) \frac{\partial^2}{\partial(x \cdot z)^2} \bar{\epsilon}_{kl}(z, x \cdot z) dS_z \quad (9)$$

여기에서

$$N_{nnij}(z) = \frac{1}{2} z_j [z_n M_{in}^*(z) + z_n M_{in}^*(z)]$$

이며, 식 (5)의 Fourier 변환으로부터 다음을 보일 수 있다⁽¹³⁾.

$$C_{ijkl} z_j z_k M_{im}^*(z) = \delta_{im} \quad (10)$$

ϵ_{mn}^0 은 식 (7)의 u_n^0 에 대응하는 변형도 성분으로서 다음과 같다.

$$\epsilon_{mn}^0(x) = \epsilon_{mn}^H(x) \quad (11)$$

$$- \frac{1}{8\pi^2} C_{ijkl}^* \int_{|z|=1} N_{nnij}(z) \frac{\partial^2}{\partial(x \cdot z)^2} \bar{\epsilon}_{kl}^T(z, x \cdot z) dS_z$$

식 (9)과 식 (11)의 $\bar{\epsilon}_{kl}$ 및 $\bar{\epsilon}_{kl}^T$ 은 Radon 변환의 정의⁽¹⁴⁾와 식 (2)로부터 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\bar{\epsilon}_{kl}(x, \xi) = \int_{\Omega} \epsilon_{kl}(y) \delta(\xi - z \cdot y) dV(y),$$

$$\bar{\epsilon}_{kl}^T(x, \xi) = \int_{\Omega} \epsilon_{kl}^T(y) \delta(\xi - z \cdot y) dV(y) \quad (12)$$

식 (11)의 ϵ_{mn}^H 은 식 (7)의 u_n^H 에 대응하는 homogeneous solution이다. ϵ_{kl}^T 과 ΔC_{ijkl} 이 모두 0이면 외부에서 가해지는 응력장이 교란되지 않으므로 ϵ_{mn}^H 은 바로 기재의 외부에서 가해지는 변형도임을 알 수 있다.

이제, 기재 안에 영역 Ω_A 와 Ω_B 로 정의되는 두개의 석출물 A, B가 있는 경우를 생각한다. 석출물 전체에 대한 특성함수 θ 는 Ω_A 와 Ω_B 에 대한 특성함수 θ_A, θ_B 를 중첩하여

$$\theta(x) = \theta_A(x) + \theta_B(x) \quad (13)$$

으로 나타낼 수 있으므로, 식 (4)에 식 (13)을 대입한 후에 앞서와 같은 과정을 따라서 다음과 같은 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\epsilon_{mn}(x) = \epsilon_{mn}^0(x) + \frac{1}{8\pi^2} \Delta C_{ijkl}^A \int_{|z|=1} N_{nnij}(z) \frac{\partial^2}{\partial(x \cdot z)^2} \bar{\epsilon}_{kl}^A(z, x \cdot z) dS_z + \frac{1}{8\pi^2} \Delta C_{ijkl}^B \int_{|z|=1} N_{nnij}(z) \frac{\partial^2}{\partial(x \cdot z)^2} \bar{\epsilon}_{kl}^B(z, x \cdot z) dS_z \quad (14)$$

여기에서

$$\epsilon_{mn}^0(x) = \epsilon_{mn}^H(x) - \frac{1}{8\pi^2} C_{ijkl}^A \int_{|z|=1} N_{nnij}(z) \frac{\partial^2}{\partial(x \cdot z)^2} \bar{\epsilon}_{kl}^{TA}(z, x \cdot z) dS_z - \frac{1}{8\pi^2} C_{ijkl}^B \int_{|z|=1} N_{nnij}(z) \frac{\partial^2}{\partial(x \cdot z)^2} \bar{\epsilon}_{kl}^{TB}(z, x \cdot z) dS_z \quad (15)$$

임을 보일 수 있으며, $\bar{\epsilon}_{kl}^A, \bar{\epsilon}_{kl}^B, \bar{\epsilon}_{kl}^{TA}, \bar{\epsilon}_{kl}^{TB}$ 등은 식 (12)와 같은 형태로서 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\epsilon}_{kl}^{A,B}(z, \xi) = \int_{\Omega_{A,B}} \epsilon_{kl}(y) \delta(\xi - z \cdot y) dV(y),$$

$$\bar{\epsilon}_{kl}^{TA, TB}(z, \xi) = \int_{\Omega_{A,B}} \epsilon_{kl}^{TA, TB}(y) \delta(\xi - z \cdot y) dV(y) \quad (16)$$

3. 근사해법

다음으로 정의되는 구에 대한 일반화된 함수(generalized function) $\chi_{ij\dots k}$ 를 생각한다.

$$\chi_{ij\dots k}(z, \xi; x, R, a)$$

$$= \int_{|y-R| < a} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \dots (y_k - x_k) \delta(\xi - z \cdot y) dV(y) \quad (17)$$

좌표계의 평행이동을 이용하면 이들 함수 $\chi_{ij\dots k}$ 는 다음 관계식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \chi_{ij\dots k}(z, \xi; x, R, a) &= \chi_{ij\dots k}(z, \xi - z \cdot R; x - R, 0, a), \\ \chi(z, \xi; x, 0, a) &= \chi(z, \xi; 0, 0, a), \\ \chi_i(z, \xi; x, 0, a) &= \chi_i(z, \xi; 0, 0, a) \\ &\quad - x_i \chi(z, \xi; 0, 0, a), \\ \chi_{ij}(z, \xi; x, 0, a) &= \chi_{ij}(z, \xi; 0, 0, a) \\ &\quad - x_i \chi_j(z, \xi; 0, 0, a) - x_j \chi_i(z, \xi; 0, 0, a) \\ &\quad + x_i x_j \chi(z, \xi; 0, 0, a), \end{aligned} \quad (18)$$

.....

즉, 함수 $\chi_{ij\dots k}(z, \xi; x, R, a)$ 는 식 (18)에서 보인 바 처럼 함수 $\chi_{ij\dots k}(z, \xi; 0, 0, a)$ 로써 표현될 수 있다. 함수 $\chi_{ij\dots k}(z, \xi; 0, 0, a)$ 는 다음과 같이 유도되었다. 그 과정은 부록에 보인다.

$$\begin{aligned} \chi(z, \xi; 0, 0, a) &= \pi \frac{1}{|z|} QH(Q), \\ \chi_i(z, \xi; 0, 0, a) &= \pi \frac{1}{|z|} z_i \xi QH(Q), \\ \chi_{ij}(z, \xi; 0, 0, a) &= \frac{\pi}{4} \frac{1}{|z|} \left[Q \delta_{ij} - \frac{1}{|z|} z_i z_j \left(a^2 - 5 \frac{\xi^2}{|z|^2} \right) \right] QH(Q), \end{aligned} \quad (19)$$

.....

여기에서 $Q = a^2 - \frac{\xi^2}{|z|^2}$ 이다. 식 (19)은 $Q > 0$ 인 경우의 기존의 결과⁽¹⁰⁾와 일치한다.

영역 Ω_A 안의 한 점을 x^A , Ω_B 안의 한 점을 x^B 라 하고, 이 두점에서 변형도를 각각 Taylor 급수로 전개하면 각 영역 안에서의 변형도는

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^A) (x_{p_1} - x_{p_1}^A) \dots (x_{p_s} - x_{p_s}^A), \quad x \in \Omega_A, \\ \varepsilon_{kl}(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^B) (x_{p_1} - x_{p_1}^B) \dots (x_{p_s} - x_{p_s}^B), \quad x \in \Omega_B \end{aligned} \quad (20)$$

으로 표현된다. 석출물 A, B가 구형인 경우에는 식 (20)을 식 (16)에 대입한 후 식 (17)을 이용하여 다음을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{kl}^A(z, \xi) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^A) \chi_{p_1 \dots p_s}(z, \xi; x^A, R^A, a_A), \\ \bar{\varepsilon}_{kl}^B(z, \xi) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^B) \chi_{p_1 \dots p_s}(z, \xi; x^B, R^B, a_B) \end{aligned} \quad (21)$$

$\bar{\varepsilon}_{kl}^{TA}$, $\bar{\varepsilon}_{kl}^{TB}$ 등도 식 (21) 처럼 표현된다.

식 (21)을 적분방정식 (14)에 대입하고 양변을 x_{q_1}, \dots, x_{q_t} 에 대하여 t 번 미분한다. $x = x^A$ 일 때와 $x = x^B$

일 때를 연립하면 미지계수 $\varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^A)$, $\varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^B)$ 들에 대한 다음과 같은 선형 대수 방정식(linear algebraic equation)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn, q_1 \dots q_t}(x^A) - \varepsilon_{mn, q_1 \dots q_t}^0(x^A) &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \\ &[\Delta C_{ijkl}^A \varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^A) \int_{|z|=1} z_{q_1} \dots z_{q_t} \\ &\quad N_{mnij}(z) \chi^{(2+t)}_{p_1 \dots p_s}(z, x^A \cdot z; x^A, R^A, a_A) dS_z \\ &\quad + \Delta C_{ijkl}^B \varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^B) \int_{|z|=1} z_{q_1} \dots z_{q_t} \\ &\quad N_{mnij}(z) \chi^{(2+t)}_{p_1 \dots p_s}(z, x^A \cdot z; x^B, R^B, a_B) dS_z], \\ \varepsilon_{mn, q_1 \dots q_t}(x^B) - \varepsilon_{mn, q_1 \dots q_t}^0(x^B) &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \\ &[\Delta C_{ijkl}^A \varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^A) \int_{|z|=1} z_{q_1} \dots z_{q_t} \\ &\quad N_{mnij}(z) \chi^{(2+t)}_{p_1 \dots p_s}(z, x^B \cdot z; x^A, R^A, a_A) dS_z \\ &\quad + \Delta C_{ijkl}^B \varepsilon_{kl, p_1 \dots p_s}(x^B) \int_{|z|=1} z_{q_1} \dots z_{q_t} \\ &\quad N_{mnij}(z) \chi^{(2+t)}_{p_1 \dots p_s}(z, x^B \cdot z; x^B, R^B, a_B) dS_z]. \end{aligned} \quad (22)$$

여기에서

$$\chi^{(t)}_{p_1 \dots p_s}(z, \xi; x, R, a) = \frac{\partial^t}{\partial \xi^t} \chi_{p_1 \dots p_s}(z, \xi; x, R, a)$$

이다. 교차항을 무시하면 식 (22)는 유한개의 미지수를 갖는 대수방정식으로 되어 풀어질 수 있다.

4. 계산결과 및 논의

식 (22)의 일반화된 함수에 대한 적분들은 일반화된 함수의 성질을 이용하여 수치적분에 적합한 보통의 함수(ordinary function)만을 포함하는 형태로 바꾸어졌으며, Gaussian quadrature를 이용하여 수치적으로 계산되었다. 수식이 번잡해지고 계산시간이 길어지는 등의 이유로 변형도는 Taylor 급수의 2차항까지만으로 전개되었다. 한 점에서의 변형도를 얻는데 소요된 계산시간은 CDC170 전자계산기로 약 10여초였다.

기재와 석출물 사이에 크기 상으로 꼭 맞지않는 양(misfit) ϵ 이 있는 변태문제의 경우 몇가지 적용예를 보이기로 한다. 응력과 무관한 변형도는

$$\varepsilon_{ij}^{TA} = \varepsilon_{ij}^{TB} = \epsilon \delta_{ij}$$

으로 표현된다. 기재의 외부에서 작용되는 응력장은 없다. Cartesian 좌표계 (x_1, x_2, x_3) 의 원점을 한 구형 석출물의 중심에 두고 다른 한 개의 석출물의 중심은 x_3 축 상에 있도록 하였다.

반경이 1이고 중심간의 거리가 2.5인 두개의 똑같은 등방성 석출물이 등방성 기재에 들어있는 경우, 석출물안에서의 x_3 축 상의 변형도 분포를 Fig. 1과 Fig.

2에 보인다. x_3 축은 대칭축이어서 $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ 이며, 전단 변형도 성분들은 나타나지 않는다. 따라서 x_3 축 상의 최대전단응력은 ϵ_{11} 과 ϵ_{33} 의 차에 비례한다. 등방성 기재의 Lamé 상수는 $\lambda = 1.214 \times 10^5 \text{ MN/m}^2$, $\mu = 7.54 \times 10^4 \text{ MN/m}^2$ 으로서 Table 1에 보이는 구리(Cu)의 탄성계수와 비슷하다. 석출물의 탄성계수는 λ^A, λ^B 는 λ 와 같으나 μ^A, μ^B 만 적당한 비율로 μ 와 다른 두 경우를 택하였다.

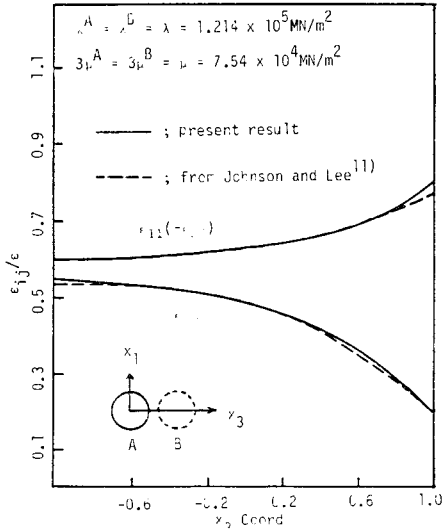


Fig. 1 Strain distribution within the precipitate A, one of the two identical isotropic precipitates which are softer than the isotropic matrix. The radius of the precipitate is 1.0 and the intercenter distance is 2.5

Fig. 1은 석출물이 기재보다 무른 경우 ($\mu^A = \mu^B = \frac{1}{3}\mu$) 로서, 본 연구 결과와 이에 대응하는 Johnson과 Lee⁽¹¹⁾의 결과는 구별이 어려울 만큼 잘 일치함을 볼 수 있다. 응력집중의 관점에서 최대전단응력을 살펴보면, 응력집중은 상대편 석출물과 인접한 곳($x_3 \rightarrow 1$)에서 최대이며 상대방 석출물과의 거리가 먼 곳일 수록 감소하여 $x_3 = -1$ 부근에서는 거의 정수압 상태에 이른다.

Fig. 2는 석출물이 기재보다 단단한 경우로서 $\mu^A = \mu^B = 3\mu$ 이다. Fig. 1에서와는 대조적으로, 점선과 실선으로 표시된 두 연구 결과는 상당한 차이를 보이며, 이 차이는 석출물과 기재의 경계면에 가까운 곳일수록 더 크다. 특히 응력집중의 관점에서 보면 두 결과는 오히려 상반된다. 본 연구 결과에 의하면 최대전단응력은 상대편 석출물과의 거리가 가까운 곳에서 최대이고 멀어질수록 감소하여 가장 먼곳에서 최소이나 Johnson과 Lee⁽¹¹⁾의 결과는 이와 반대이다.

Fig. 1, Fig. 2와 같은 경향은 석출물 사이의 거리

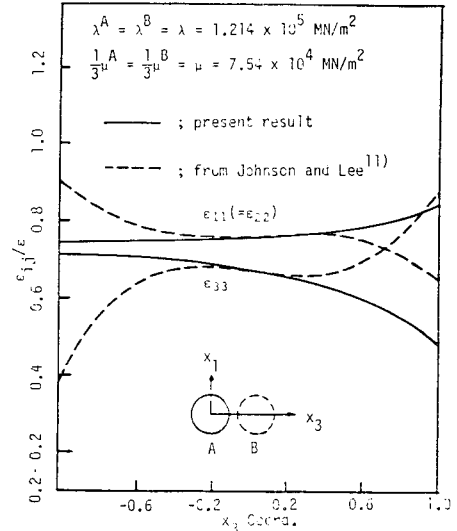


Fig. 2 Strain distribution within the precipitate A for the same case as in Fig. 1 except that the isotropic precipitates are harder than the isotropic matrix

가 다를 때에도 여전히 나타났다. 석출물이 기재보다 무를 때에는 Fig. 1에서 처럼 두 결과가 일치되나, 석출물이 더 단단할 때에는 Fig. 2에서와 같이 상당한 차이를 보였다.

Fig. 2의 결과들과 비교하기 위하여 SAP V program을 사용한 유한 요소 해석(finite element analysis)이 시도되었다. 똑같은 두개의 구형석출물에 대한 축대칭(axisymmetric) 문제에 한해서는 비교적 적은 자유도(degree of freedom)로써 유한요소 모형화(modeling)할 수 있으며, 변태문제는 열응력(thermal stress) 문제로 다루어질 수 있다. 유한요소해석 결과는 Fig. 2에 나타낸다면 실선과 구별이 어려울 만큼 정확히 본 연구결과와 일치했다. 석출물 간의 거리가 다른 경우에도 본 연구 및 유한요소해석은 거의 같은 결과를 보였다.

Johnson과 Lee⁽¹¹⁾의 결과에 나타나는 이러한 오차는 그들이 구의 중심에 원점을 둔 좌표계에서 좌표치의 다항식으로 변형도를 얻고 있기 때문이다. 그들은 3차항까지 고려한 변형도 분포를 얻고 있으나 원점 부근에서 비교적 정확한 해를 얻을 뿐이다. 이에 비해서 본 연구에서는 급수전개하는 점을 읊길 수 있어서 어디에서도 정확한 해를 구할 수 있었다. Fig. 1~Fig. 7에 보이는 본 연구결과들은 어느 경우에도 약 15점에서 급수전개한 것이다. 계산시간이 증가되나 본 연구에서도 3차항까지 고려된 변형도 분포를 구할 수 있으며, Fig. 2의 경우에 대해서 실제로 계산되었다. 정

확한 분포를 얻기 위해서는 급수전개하는 점을 옮기는 일이 역시 필요했으며, 옮겨본 결과는 Fig. 2의 실선과 거의 일치하였다.

Fig. 3과 Fig. 4는 두 석출물의 탄성계수는 같으나

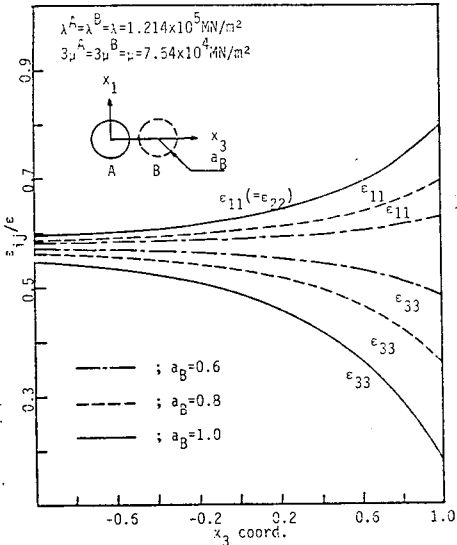


Fig. 3 Strain distribution within the precipitate *A*, one of the two isotropic precipitates softer than the isotropic matrix. The radius of the precipitate *A* is 1.0 while the radii of the precipitate *B*, a_B , are 0.6, 0.8 and 1.0 (identical to Fig. 1), respectively. The intercenter distance is 2.5

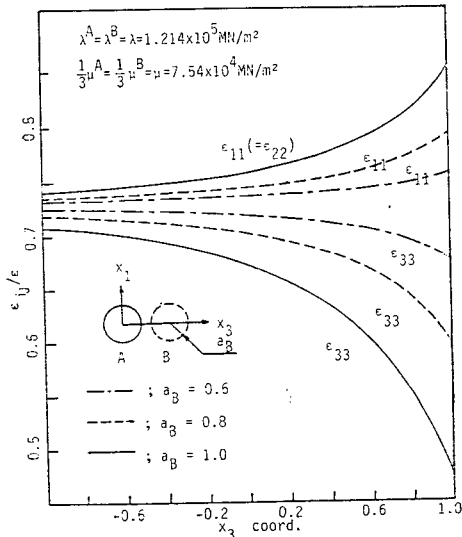


Fig. 4 Strain distribution within the precipitate *A* for the same case as in Fig. 3 except that the isotropic precipitates are harder than the isotropic matrix

크기가 서로 다른 경우로서 석출물 *B*의 반경이 각각 1.0, 0.8, 0.6일 때 반경 1.0인 석출물 *A* 안에서의 x_3 축 상의 변형도 분포를 보인다. 석출물 중심 사이의 거리는 2.5이다. Fig. 3과 Fig. 4에서의 석출물과 기체의 탄성계수는 각각 Fig. 1과 Fig. 2에서의 탄성계

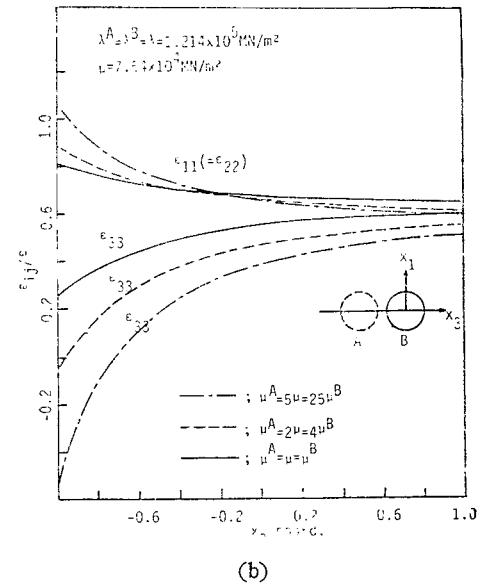
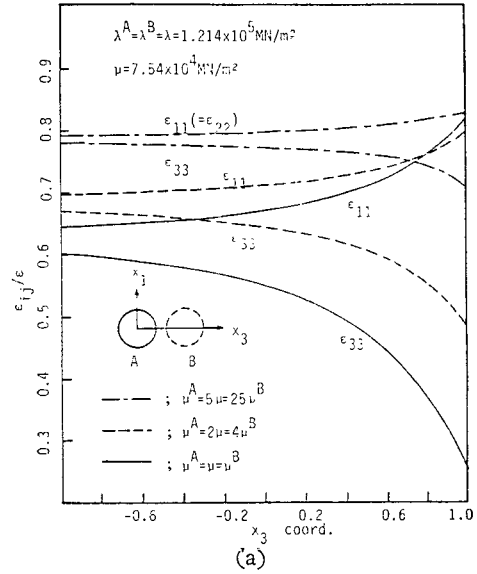


Fig. 5 The strain distribution within the precipitate *A* is shown in Fig. 5(a) while the strain distribution within the precipitate *B* is shown in Fig. 5(b). The elastic constants of the precipitate *A, B* and the isotropic matrix are different each other. The radius of the precipitate is 1.0 and the intercenter distance is 2.5

수와 같다. 두 경우 모두, 최대전단응력은 석출물 어더에서나 상대편 석출물이 작아짐에 따라 감소함을 보이고 있다. 한 석출물이 다른쪽에 비해서 매우 작으면 큰 쪽에서의 변형도 분포는 거의 정수압 상태로서 석출물 한개가 독립하여 있을때와 거의 같았다. 이는 직관과도 일치한다.

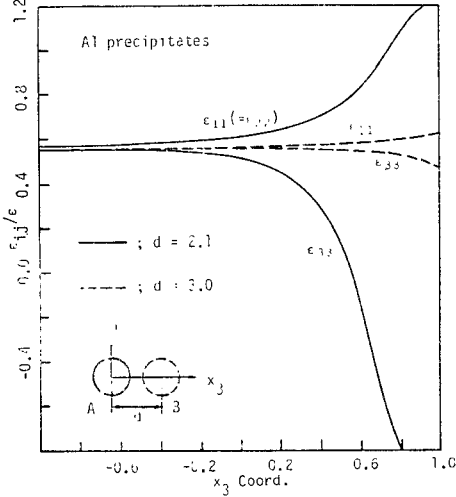


Fig. 6 Strain distribution within the precipitate A, one of the two identical Al precipitates (anisotropic with cubic symmetry) embedded in Cu matrix (anisotropic with cubic symmetry) along [001] direction. The radius of the precipitate is 1.0

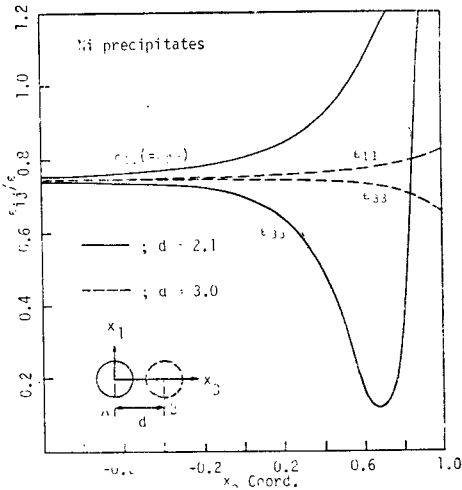


Fig. 7 Strain distribution within the precipitate A, one of the two identical Ni precipitates (anisotropic with cubic symmetry) embedded in Cu matrix (anisotropic with cubic symmetry) along [001] direction. The radius of the precipitates is 1.0

Fig. 5(a)와 Fig. 5(b)는 각각 석출물 A와 B 안에서의 x_3 축 상의 변형도 분포를 보인다. $\mu^A = \mu = \mu^B$ (실선), $\mu^A = 2\mu = 4\mu^B$ (점선), $\mu^A = 5\mu = 25\mu^B$ (일점쇄선)등 석출물 A, B 및 기체의 탄성계수가 각각 다른 경우들을 보인다. 기체의 탄성계수는 Fig. 1에서와 같으며, 석출물의 반경은 1.0, 층집간의 거리는 2.5이다. 어느 경우에도 응력집중은 상대편 석출물과의 거리가 가까운 곳일수록 크고 먼 곳일수록 작음을 보이고 있다.

Fig. 6과 Fig. 7은 비등방성 재질인 경우 석출물 안에서의 x_3 축 상의 변형도 분포를 보인다. 두개의 Al 또는 Ni 석출물이 Cu 기체의 [001] 방향으로 놓여 있으며, 세 좌표축과 기체 및 석출물의 <100> 방향들은 각각 일치하도록 하였다. Al, Ni, Cu 등은 모두 입방격자(cubic lattice)인 금속으로서 이들의 탄성계수는 Table 1에 보인다. Al은 Cu에 비해서 다소 무른 금속이며, Ni는 Cu에 비하여 약간 단단하다. Fig. 6과 Fig. 7에서 최대전단응력을 살펴보면 상대편 석출물과의 거리가 가까운 곳에서 최대이며, 멀어짐에 따라 감소한다. 이러한 경향은 앞서 논의한 결과들과 비슷하나, $x_3 > 0.6$ 인 곳에서는 Fig. 6과 Fig. 7은 큰 차이를 보이고 있다. 이 차이는 비등방성 기체 안에 있는 석출물 사이에 강한 상호작용이 있기 때문으로 생각된다. 이에 대해서는 다음 연구 대상으로 미룬다.

Table 1 Elastic constants of some cubic elements⁽¹⁵⁾

Elements	C_{11}	C_{12}	C_{44}	H
Cu	16.84	12.14	7.54	10.38
Ni	24.65	14.73	12.47	15.02
Al	10.82	6.13	2.85	1.01

(Unit : 10^4MN/m^2 , $H = 2C_{44} + C_{12} = C_{11}$)

석출물과 기체가 탄성계수의 차가 적어지면 본 연구의 해는 엄밀해에 접근한다. 식 (22)나 식 (14)를 보면 우변의 적분들은 항상 유한한 값을 내지므로 $\Delta C_{ijkl}^{A,B} \rightarrow 0$ 이면 $\epsilon_{ij}(x) \rightarrow \epsilon_{ij}^0(x)$ 임을 알 수 있다. 비균질성 문제의 경우에는 물론 하나의 석출물의 탄성계수가 기체와 같아져도 이 근사해는 엄밀해에 접근한다. 이는 다음과 같이 설명된다. 두개의 구형석출물 A, B가 있고 석출물 B의 탄성계수가 기체와 같으면 석출물 A 안에서의 변형도는 상수이다⁽¹⁾. ΔC_{ijkl}^B 이 작으면 석출물 B가 A에 미치는 영향이 작아져서 석출물 A 안의 변형도를 Taylor 급수의 몇개 항으로 나타내는 일이 타당하게 된다. 따라서 $\Delta C_{ijkl}^B \rightarrow 0$ 이면 해는 엄밀해에 접근한다. 석출물 사이의 거리가 멀어질 때에도 위와 비슷한 논리로써 근사해는 엄밀해에 가까워짐을

알 수 있다.

본 연구의 근사해법은 어떠한 대칭성도 요구하지 않으므로 세개 이상의 구형석출물들에 대해서도 바로 적용될 수 있다. 식 (13)에 세번째 석출물의 특성함수를 중첩하고 앞서와 같은 과정을 따르면 식 (22)에 세번째 석출물에 의한 항이 추가된다. 따라서 구해야 할 계수와 계산시간 등이 증가하나 변형도 분포를 얻을 수 있다.

5. 결 론

두개의 비등방성 구형석출물이 있는 비등방성 기체에 대한 변태문제 및 비균질성문제의 근사해법이 연구되었다. 이 방법은 기존의 연구결과보다 더 정확한 변형도 분포를 주며, 두 석출물의 크기나 탄성계수가 서로 다른 경우 등 보다 일반적인 많은 경우에 적용될 수 있음을 보였다. 얻어진 근사해는 석출물과 기체의 탄성계수의 차가 적을수록 또는 석출물 사이의 거리가 멀수록 엄밀해에 접근한다.

후 기

본 연구는 1983년도 한국과학재단의 연구 지원으로 수행되었으며 이에 감사하는 바입니다. 또한 연구 수행중 많은 계산이 한국과학기술원 전산개발센터의 지원으로 이루어졌으며 이에 감사하는 바입니다.

참 고 문 헌

- (1) J.D. Eshelby, The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, *Proceedings of Royal Society London*, Vol. A241, pp. 376~396, 1957
- (2) V. Perovic, G.R. Purdy and L.M. Brown, On the Stability of Arrays of Precipitates, *Acta Metallurgica*, Vol. 27, pp. 1075~1084, 1979
- (3) F.V. Nolfi, Jr., Elastic Interactions between "Voids" Induced by Solute Segregation, *Journal of Applied Physics*, Vol. 47, pp. 24~36, 1976
- (4) W.C. Johnson and J.K. Lee, Elastic Interaction Energy of Two Spherical Precipitates in an Anisotropic Matrix, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 10A, pp. 1141~1149, 1979
- (5) E. Sternberg and M.A. Sadowsky, On the Axisymmetric Problem of the Theory of Elasticity for an Infinite Region Containing Two Spherical Cavities, *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, Vol. 74, pp. 19~27, 1952
- (6) H.S. Chen and A. Acrivos, The Solution of the Equations of Linear Elasticity for an Infinite Region Containing Two Spherical Inclusions, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, pp. 331~348, 1978
- (7) Z.A. Moschovidis and T. Mura, Two-Ellipsoidal Inhomogeneities by the Equivalent Inclusion Method, *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME*, Vol. 42, pp. 847~852, 1975
- (8) W.C. Johnson, Elastic Interaction of Two Precipitates Subjected to an Applied Stress Field, *Metallurgical Transactions A*, Vol. 14A, pp. 2219~2227, 1983
- (9) T. Mori, P.C. Cheng, M. Kato and T. Mura, Elastic Strain Energies of Precipitates and Periodically Distributed Inclusions in Anisotropic Media, *Acta Metallurgica*, Vol. 26, pp. 1435~1441, 1978
- (10) J.R. Willis, The Interaction of Gas Bubbles in an Anisotropic Elastic Solid, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 129~138, 1975
- (11) W.C. Johnson and J.K. Lee, An Integral Equation Approach to the Elastic Interaction of Two Precipitates, *Physica Status Solidi (a)*, Vol. 71 pp. 589~602, 1982
- (12) R.J. Asaro and D.M. Barnett, The Non-Uniform Transformation Strain Problem for an Anisotropic Ellipsoidal Inclusion, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 77~83, 1975
- (13) D.M. Barnett, The Precise Evaluation of Derivatives of the Anisotropic Elastic Green's Functions, *Physica Status Solidi (b)*, Vol. 49, pp. 741~748, 1972
- (14) I.M. Gel'fand, M.I. Graev and N. Ya. Vilenkin, *Integral Geometry and Representation Theory, Generalized Functions Volume 5, Chap. 1, p. 1*, Academic Press, New York, 1966
- (15) J.P. Hirth and J. Lothe, *Theory of Dislocations, Appendix I, p. 761*, McGraw-Hill, New York, 1968

부 록

함수 $\chi_{ij\dots k}(z, \xi; 0, 0, a)$ 의 유도

반경 a 인 구를 생각하고 Cartesian 좌표계의 원점을 구의 중심에 둔다. 함수 $P(x)$ 와 $\theta_n(x)$ 를

$$P(x) \equiv a^2 - x \cdot x, \quad \theta_n(x) \equiv P^n H(P), \quad \text{정수 } n \geq 0, \quad (A1)$$

으로 정의하면 이 구의 특성함수 $\theta(x)$ 는 본문 식 (2)의 정의로부터

$$\theta(x) = H(P(x)) = \theta_0(x) \quad (A2)$$

임을 보일 수 있다. 여기에서 H 는 Heaviside step 함수이다.

임의의 함수 $f(x)$ 의 Radon 변환을 기호 $[\]$ 를 써서 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$\check{f}(z, \xi) = [f(x)]_{z, \xi}^v \equiv \int f(x) \delta(\xi - z \cdot x) dV(x)$$

함수 $\chi_{ij\dots k}(z, \xi; 0, 0, a)$ 는 본문 식 (17)의 정의에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$\chi_{ij\dots k}(z, \xi; 0, 0, a) = [x_i x_j \dots x_k \theta_0(x)]_{z, \xi}^v \quad (A3)$$

식 (A1)으로 정의되는 함수 $\theta_n(x)$ 를 x_i, x_j, \dots 들로 미분해 가면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$x_i \theta_0(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_1(x),$$

$$x_i x_j \theta_0(x) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \theta_1(x) + \frac{1}{8} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \theta_2(x), \quad (A4)$$

식 (A4)의 양변을 Radon 변환하고 식 (A3)을 대입한 후, Radon 변환의 기본적 성질⁽¹⁴⁾

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right]_{z, \xi}^v = z_i \frac{\partial}{\partial \xi} \check{f}(z, \xi)$$

을 이용하면 다음을 보일 수 있다.

$$\chi_i(z, \xi; 0, 0, a) = -\frac{1}{2} z_i \frac{\partial}{\partial \xi} \check{\theta}_1(z, \xi),$$

$$\chi_{ij}(z, \xi; 0, 0, a) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \check{\theta}_1(z, \xi) + \frac{1}{8} z_i z_j \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \check{\theta}_2(z, \xi), \quad (A5)$$

.....

함수 $\theta_n(x)$ 의 Radon 변환 $\check{\theta}_n(z, \xi)$ 는 식 (A1)과 Radon 변환의 정의로부터 다음과 같이 계산되었다.

$$\check{\theta}_n(z, \xi) = \frac{\pi}{1+n} \frac{1}{|z|} Q^{1+n} H(Q),$$

$$Q = Q(z, \xi) \equiv a^2 - \frac{\xi^2}{|z|^2}, \quad \text{정수 } n \geq 0 \quad (A6)$$

식 (A6)을 식 (A5)에 대입하여 본문 식 (19)의 결과를 얻는다.

함수 $\chi_{ij\dots k}(z, \xi; 0, 0, a)$ 는 $Q > 0$ 일 때에 보통의 함수(ordinary function)로서 알려진 바 있다⁽¹⁰⁾. 그러나 기존의 결과⁽¹⁰⁾를 본 연구에 직접 이용할 수는 없으며 반드시 일반화된 함수(generalized function)로서의 $\chi_{ij\dots k}$ 를 알아야 한다. 이는 본문 식 (22)의 적분들이 불연속점인 $Q=0$ 에서의 $\chi_{ij\dots k}$ 의 편도함수들을 포함하기 때문이다.