

<論 文>

固定端의 스프링 상수가 末端質量을 가진 Beck's Column의 안정성에 미치는 영향

尹 漢 翼* · 金 光 植**

(1985年 6月 24日 接受)

Influence of Spring Constant at Fixed End on Stability of Beck's Column with Tip Mass

Han Ik Yoon and Kwang Sic Kim

Key Words: Nonconservative Force(비 보존력), Follower Force(종동력), Stability(안정성), Kinetic Method(동적방법), Spring Constant(스프링 상수), Flutter Load(플러터 하중), Tip Mass(말단질량)

Abstract

On the stability of the Beck's column with a tip mass, the influence of the characteristics of the springs at the fixed end of the column are studied. The equations of motion and boundary conditions of this system are established by using the Hamilton's principle. On the evaluation of the stability of the column, the effect of the shear deformation and rotatory inertia is considered in calculation.

For the maintenance of the stability of the column, it is proved that the constant of the translational spring at the fixed end must be very large while the magnitude of the constant of the rotational spring at the fixed end has no effect. When the constants of the springs at the fixed end are small, it is also proved that the influence of the moment of inertia of the tip mass on the stability of the column are decreased and for the translational spring the degree of the decrease is more and more.

Therefore it is found that the characteristics of the springs at the fixed end are very effective elements for the stability of the column when the columns subjected to a compressive follower force are designed.

기 호 설 명

- A : 기둥의 횡단면적(m^2)
- a : 말단질량의 횡단면 반경(m)
- c : 기둥의 자유단으로부터 말단질량 중심까지

의 거리(m)

- C_R, K_R : 회전스프링 상수($kg\cdot m/rad$)
- C_T, K_T : 병진스프링 상수(kg/m)
- E : 기둥 재료의 종탄성계수(kg/m^2)
- G : 기둥 재료의 횡탄성계수(kg/m^2)
- I : 기둥 단면의 2차 관성모우멘트(m^4)

* 정회원, 동의대학교 공과대학 기계설계학과

**정회원, 한양대학교 공과대학 정밀기계공학과

- Jc, γ : 말단질량의 관성모우멘트(kg-m-s²)
- k : 기둥 횡단면의 관성반지름(m)
- K' : 티모셴코(Timoshenko)의 전단계수
- l : 기둥의 전 길이(m)
- m : 단위 길이 당 기둥의 질량(kg-s²/m²)
- M_i, μ : 말단질량(kg-s²/m)
- P, P_L : 압축 종동력(kg)
- p : 기둥에 대한 말단질량의 밀도 비
- P_E : Euler의 좌굴하중(kg)
- P_{Lcr} : 임계 압축 종동력
- s : 기둥의 세장비
- t : 시간(s)
- $v(x), v(\tau)$: 기둥의 횡진동 진폭(m)
- x : 기둥의 축좌표(m)
- τ : 기둥의 전진이에 대한 x 의 비
- $y(x, t)$: 기둥의 횡변위(m)
- α : 기둥의 전진이에 대한 c 의 비
- ϵ : 기둥의 횡탄성계수에 대한 종탄성계수 비
- η : 말단질량이 일정한 경우 c 의 변화율
- κ : 기둥의 전진이에 대한 a 의 비
- ν : 기둥 재료의 프와송 비
- ξ : 기둥의 전진이에 대한 말단질량 길이의 비
- ρ : 기둥 재료의 밀도(kg-s²/m⁴)
- ρ_c : 말단질량 재료의 밀도(kg-s²/m⁴)
- $\varphi(x, t)$: 기둥 단면의 회전각(rad)
- ω, Ω : 기둥의 원진동수(rad/s)
- (\cdot) : 시간에 대한 미분
- (\cdot)' : x 또는 τ 에 대한 미

1. 序 論

최근 정밀기계공업 및 항공공학이 발달함에 따라 비보존력을 받는 탄성체의 안정성 문제의 연구가 많이 요구되고 있다.

Ziegler⁽¹⁾에 의하여 이러한 비보존적 탄성안정문제의 연구가 시작되었고, 또 그는 탄성체의 안정성에 크다란 영향을 미치는 힘이 종동력(follower force)임을 밝혔다⁽²⁾.

Beck⁽⁴⁾는 自由端에 압축 종동력이 작용하는 균일 단면의 一端固定 他端自由인 기둥(以下 Beck's column이라 한다.)의 플라터 荷重(flutter load)을 動的安定基準(kinetic stability criterion)에 의하여 계산하였다. Beck가 계산한 플라터 하중, 즉 기둥이 안정을 잃는 臨界荷重은 Euler의 撓屈荷重보다 8배 이상의 큰 값

이었다. 그 후 Beck's column의 안정성에 관한 연구는 계속되어 Nemat-Nasser⁽⁵⁾, Kounadis와 Katsikadelis⁽⁶⁾들은 기둥의 剪斷變形과 回轉慣性이 Beck's column의 플라터 하중을 감소시킴을 보고하였고, Deineko와 Leonov⁽⁷⁾들은 Beck's column의 자유단과 기둥의 중앙에 集中質量을 부가하여 그들이 기둥의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. Kounadis⁽⁸⁾는 압축 종동력을 받는 Timoshenko 보의 안정성에 미치는 집중질량과 그 관성모우멘트의 영향을 계산하였다. 그러나 이들이 연구한 집중질량의 영향은 實際系에서 거의 찾아 볼 수 없으며, 또한 집중질량의 관성모우멘트는 존재하지 않는다.

최근에 와서 Bhat와 Wagner⁽⁹⁾, Bhat와 Kulkarni⁽¹⁰⁾, Flax⁽¹¹⁾들은 重心이 棒의 끝과 일치하지 않는 末端質量이 부착된 균일 단면 외팔봉의 固有橫振動數에 관해서 연구하였다. 연료탱크를 부착한 비행기의 날개나 미사일은 실제로 이러한 모델을 가지며, 人工衛星의 운반 로켓도 같은 모델이다. Anderson, Vasilakis와 Wu⁽¹²⁾들은 上記의 말단질량이 부착된 Beck's column의 안정성을 연구하여 말단질량의 重心이 기둥의 자유단으로부터 멀어짐에 따라 그 질량과 관성모우멘트가 증가하므로 기둥의 플라터 하중이 감소함을 보고하였다. 그러나 그들은 기둥의 전단변형과 회전관성의 영향을 고려하지 않았으며, 말단질량의 크기가 일정한 경우 그 관성모우멘트의 변화가 系の 안정성에 미치는 영향은 언급하지 않았다. 또 여기서 플라터 하중의 감소는 말단질량의 증가에는 영향을 적게 받고, 그 관성모우멘트의 증가에 큰 영향을 받는다^{(13), (14)}.

본 논문은 前報⁽¹⁴⁾의 연속으로서 말단질량이 부착된 기둥의 자유단에 압축 종동력이 작용하는 비보존적 탄성계의 불완전 고정단에 나타나는 스프링 특성의 영향을 연구하였다. 고정단은 並進스프링과 回轉스프링으로 구속되었고, 이들 스프링 상수의 여러 값이 말단질량과 연성(coupling)되어 기둥의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. 기둥의 전단변형과 회전관성의 영향을 고려하였으며, Hamilton's principle로서 系の 運動方程式과 경계조건의 식을 유도하여 數值解析하였다.

2. 理論解析

Fig. 1의 비보존적 탄성계의 운동방정식을 유도하기 위하여 Hamilton's principle을 적용하였다⁽¹⁵⁾. 비보존적 線形系에 대한 Hamilton's principle은 다음과 같이 쓸 수 있다.

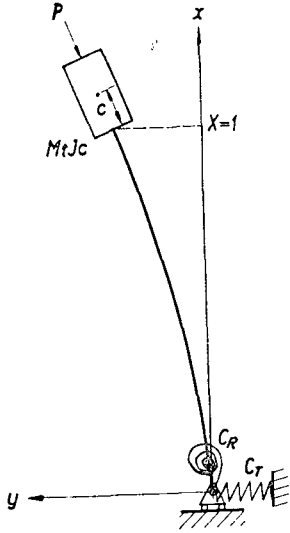


Fig. 1 A cantilever column carrying a tip mass and subjected to a compressive follower force

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_N dt = 0 \tag{1}$$

여기서 L 는 Lagrangian 으로서

$$L = T - V - W_c \tag{2}$$

이고, T : 系의 全運動에너지

V : 系의 全變形에너지

W_c : 변형이 일어나는 동안에 외력의 保存力에 의하여 이루어진 일량

W_N : 변형이 일어나는 동안에 외력의 非保存力에 의하여 이루어진 일량

이다. 본 논문의 비보존적 탄성계에서는

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l [\rho A \dot{y}^2 + \rho I \dot{\varphi}^2] dx + \frac{1}{2} [M_t \dot{y}^2(l, t) + (J_c + M_t c^2) \dot{\varphi}^2(l, t)] \tag{3}$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l [EI \varphi'^2 + K' AG (y' - \varphi)^2] dx + \frac{1}{2} C_T y^2(0, t) + \frac{1}{2} C_R \varphi^2(0, t) \tag{4}$$

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^l P y'^2 dx \tag{5}$$

$$W_N = -P y'(l, t) y(l, t) \tag{6}$$

이다. 여기서 EI 는 굽힘剛性係數, $(y' - \varphi)$ 는 기둥의 전단변형에 의한 전단각, $(J_c + M_t c^2)$ 은 平行軸 定理에 의한 기둥의 자유단에 관한 말단질량의 관성모우멘트이다.

또 기둥의 전단변형과 회전관성을 고려하면 기둥의 굽힘모우멘트 $M(x, t)$ 와 변형되지 않은 기둥의 축에 수직인 전단력 $Q(x, t)$ 는 다음과 같다.

$$M(x, t) = -EI \varphi'(x, t) \tag{7a}$$

$$Q(x, t) = K' AG [e y'(x, t) - \varphi(x, t)] \tag{7b}$$

여기서 $e = 1 - P / (K' AG)$ 이고, 종동력 P 가 작용하지 않는다면 식 (7a, b) 는 Timoshenko 보의 굽힘모우멘트와 전단력의 식⁽¹⁶⁾에 일치된다.

구간 $t_1 \sim t_2$ 에서 식 (3)~(6)의 變分式을 유도하여 식 (1)에 대입 정리하면 기둥의 운동방정식 (8)과 경계조건의 식 (9a, b, c, d)를 얻는다.

$$y'''' - \rho \left(\frac{1}{K'G} + \frac{1}{E} \right) y'' + \frac{m}{EI^*} \ddot{y} + \frac{P}{EI^*} y'' + \frac{\rho^2}{K'EG} \ddot{y} = 0 \tag{8}$$

여기서 $I^* = I / (1 + P / K'AG)$ 이다.

$x=0$ 에서

$$Q(0, t) - C_T y(0, t) = 0 \tag{9a}$$

$$EI \varphi'(0, t) - C_R \varphi(0, t) = 0 \tag{9b}$$

$x=l$ 에서

$$EI \varphi'(l, t) + (J_c + M_t c^2) \dot{\varphi}(l, t) = 0 \tag{9c}$$

$$Q(l, t) + P y'(l, t) + M_t \dot{y}(l, t) = 0 \tag{9d}$$

기둥의 운동방정식 (8)의 해를

$$y(x, t) = v(x) e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{10}$$

이라고 가정하여, 식 (10)을 식 (8)에 대입하고, 무차원 독립변수 $\tau = x/l$ ($0 \leq \tau \leq 1$)을 도입하면 식 (8)은

$$\frac{d^4 v(\tau)}{d\tau^4} + \beta^2 \frac{d^2 v(\tau)}{d\tau^2} - \zeta v(\tau) = 0 \tag{11}$$

의 무차원화된 식이 된다. 여기서

$$\beta^2 = \frac{\rho \omega^2 l^2}{K'G} + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} + \frac{P l^2}{EI^*} \tag{12a}$$

$$\zeta = \frac{m \omega^2 l^4}{EI^*} \left(1 - \frac{\rho^2 \omega^2 I^*}{m K'G} \right) \tag{12b}$$

이다. 마찬가지로 경계조건의 식 (9a, b, c, d)도 다음과 같이 무차원화 된다.

$\tau=0$ 에서

$$Q(0) - C_T v(0) = 0 \tag{13a}$$

$$EI \varphi'(0) - C_R \varphi(0) = 0 \tag{13b}$$

$\tau=1$ 에서

$$EI \varphi'(1) - \omega^2 (J_c + M_t c^2) \varphi(1) = 0 \tag{13c}$$

$$Q(1) + (P/l) v'(1) - \omega^2 M_t v(1) = 0 \tag{13d}$$

식 (11)의 일반해는

$$v(\tau) = c_1 \cosh \lambda_1 \tau + c_2 \sinh \lambda_1 \tau + c_3 \cos \lambda_2 \tau + c_4 \sin \lambda_2 \tau \tag{14}$$

가 되고, 여기서

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\beta^4 + 4\zeta)^{1/2} + (-1)^n \beta^2]^{1/2}, \quad n=1, 2 \tag{15}$$

이다.

식 (7a, b)로부터 유도되는 $Q(\tau)$ 와 $\varphi(\tau)$ 의 값과 식 (14)를 경계조건의 식 (13a, b, c, d)에 대입하고, 무차

원 매개변수

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{c}{l}, \quad s = \frac{2l}{k}, \quad \varepsilon = \frac{E}{G}, \quad \mu = \frac{M_1}{ml}, \\ K_R &= \frac{C_R l}{EI}, \quad K_T = \frac{C_T l^3}{EI}, \quad \gamma = \frac{J_c}{ml^3}, \\ Q^2 &= \frac{\rho A \omega^2 l^4}{EI}, \quad \theta = \frac{1}{1 - 16\varepsilon \Omega^2 / K' s^4}, \\ P_L &= \frac{P}{P_E}, \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \end{aligned} \right\} (16)$$

를 도입하면 다음 4개의 선형제차대수방정식을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^4 b_{jk} c_k = 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (17)$$

대수방정식의 系 (17)이 뜻을 갖는 해를 갖기 위해서는 그 계수의 매트릭스의 行列式이 영(zero)이 되어야 한다. 즉

$$d(b_{jk}) = \begin{array}{|c|c|} \hline K_T & \theta \lambda_2^2 \lambda_1 \\ \hline -\left(\lambda_1^2 + \frac{4\varepsilon \Omega^2}{K' s^2}\right) & \left(1 + \frac{4\varepsilon \theta \lambda_2^2}{K' s^2}\right) \lambda_1 K_R \\ \hline \left(\lambda_1^2 + \frac{4\varepsilon \Omega^2}{K' s^2}\right) \cosh \lambda_1 & \left(\lambda_1^2 + \frac{4\varepsilon \Omega^2}{K' s^2}\right) \sinh \lambda_1 \\ -\Omega^2 \lambda_1 (\gamma + \mu \alpha^2) \left(1 + \frac{4\varepsilon \theta \lambda_2^2}{K' s^2}\right) \sinh \lambda_1 & -\Omega^2 \lambda_1 (\gamma + \mu \alpha^2) \left(1 + \frac{4\varepsilon \theta \lambda_2^2}{K' s^2}\right) \cosh \lambda_1 \\ \hline \left(-\theta \lambda_2^2 + \frac{\pi^2 P_L}{4}\right) \lambda_1 \sinh \lambda_1 - \Omega^2 \mu \cosh \lambda_1 & \left(-\theta \lambda_2^2 + \frac{\pi^2 P_L}{4}\right) \lambda_1 \cosh \lambda_1 - \Omega^2 \mu \sinh \lambda_1 \\ \hline K_T & -\theta \lambda_1^2 \lambda_2 \\ \hline \left(\lambda_1^2 - \frac{4\varepsilon \Omega^2}{K' s^2}\right) & \left(1 - \frac{4\varepsilon \theta \lambda_1^2}{K' s^2}\right) \lambda_2 K_R \\ \hline \left(-\lambda_2^2 + \frac{4\varepsilon \Omega^2}{K' s^2}\right) \csc \lambda_2 & \left(\lambda_2^2 + \frac{4\varepsilon \Omega^2}{K' s^2}\right) \sin \lambda_2 \\ + \Omega^2 \lambda_2 (\gamma + \mu \alpha^2) \left(1 - \frac{4\varepsilon \theta \lambda_1^2}{K' s^2}\right) \sin \lambda_2 & -\Omega^2 \lambda_2 (\gamma + \mu \alpha^2) \left(1 - \frac{4\varepsilon \theta \lambda_1^2}{K' s^2}\right) \csc \lambda_2 \\ \hline -\left(\theta \lambda_1^2 + \frac{\pi^2 P_L}{4}\right) \lambda_2 \sin \lambda_2 - \Omega^2 \mu \csc \lambda_2 & \left(\theta \lambda_1^2 + \frac{\pi^2 P_L}{4}\right) \lambda_2 \cos \lambda_2 - \Omega^2 \mu \sin \lambda_2 \\ \hline \end{array} = 0 \quad (18)$$

행렬식 (18)을 전개하면 압축 증동력을 받는 비보존적 탄성계 Fig. 1의 振動數 方程式이 된다.

3. 數値解析 및 考察

행렬식 (18)은 무차원 증동력 P_L 과 진동수 Ω^2 을 변수로 갖는다. 그러므로 충분히 작은 값 P_L 을 선택하여 식 (18)을 만족시키는 Ω^2 을 구하면, 기둥의 횡진동의 제 1, 2차 모드(mode)에 해당되는 진동수를 얻게 된다. P_L 을 점차 증가시키면 제 1, 2차 진동수는 점차 가까워져서 겹쳐지게 되는데, 그 때의 P_L 이 플러터 하중 P_{Lcr} 이며 기둥이 불안정하게 되는 임계하중이다. P_L 이 P_{Lcr} 보다 작을 때에는 1, 2차 모드의 진동수가 실수이지만, P_L 이 P_{Lcr} 보다 크게 되면 이들 진동수는 공액복소수가 되어서 무의미하게 되고 기둥은 안정은 잃게 된다. 플러터는 $P_L = P_{Lcr}$ 에서 시작되어 기둥의 횡진동 진폭은 지수적으로 증가하여 불안정한 진동으로 되고 파괴가 일어난다.

본 수치해석에서는 서로 영향을 끼치는 매개변수 K_R ,

K_T, p, ξ, η 들의 값에 대한 하중 매개변수 P_{Lcr} , 즉 무차원 플러터 하중을 구하여 系의 안정성을 규명하였다.

기둥의 횡단면은 구형단면으로 하고, 말단질량은 원형단면이며 기둥 단면의 4배가 되는 것을 일 예로 하여 계산하였다. 고정단의 병진스프링과 회전스프링의 스프링 상수는 여러가지로 바꾸어 계산하여 그 결과를 비교하였다. 기둥의 자유단과 말단질량의 重心 사이의 거리를 조절하여 그 관성모멘트의 크기를 증감시켰다. 기둥의 전단변형과 회전관성을 고려하여 계산하였으며, 기둥의 세장비 s 는 50으로 하였다. Poisson의 비는 0.3으로 했으며, Timoshenko의 전단계수는 Cowper⁽¹⁷⁾의 공식으로 계산하여 0.85로 하였다.

3.1. 末端質量과 그 慣性모멘트가 增減하는 境遇

기둥의 단면적을 $b \times h$, 말단질량의 횡단면 반경을 a 이라고 하면

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}, \quad m = \rho bh,$$

$$M_t = 2\rho_t \pi c a^2, J_c = \frac{\pi}{6} \cdot \rho_t c a^2 (3a^2 + 4c^2) \quad (19)$$

가 되고, 여기서 ρ 는 기둥 재료의 밀도, ρ_t 는 말단질량의 밀도이고, b 와 h 의 관계는 $b = \frac{5}{6}h$ 로 하였다.

$$4bh = \pi a^2 \text{ 이라 놓으면 식 (18)의 } \mu \text{와 } \gamma + \mu \alpha^2 \text{ 은}$$

$$\mu = \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right) \left(\frac{2c}{l}\right) \left(\frac{\pi a^2}{bh}\right) = 4p\xi \quad (20)$$

$$\gamma + \mu \alpha^2 = \frac{\mu}{12} (\xi^2 + 3\kappa^2) + \mu \alpha^2 = p\xi \left(\frac{4\xi^2}{3} + \kappa^2\right) \quad (21)$$

가 되고, 여기서 $p = \rho_t / \rho$, $\xi = 2c/l$, $\kappa^2 = (a/l)^2 = 0.0204$ 이다. 또 c 는 말단질량의 중심의 측방향 평행이동 거리, 즉 기둥의 자유단에서 말단질량의 중심까지의 거리로서 系の 중요한 인자이다. 식 (18)에 식 (20)과 식 (21)을 대입하면 식 (18)은 말단질량의 길이의 매개변수 ξ 의 함수가 되어, 말단질량의 관성모우멘트 변화와 고정단의 스프링 상수의 크기가 기둥의 안정성에 미치는 영향을 ξ 에 따라 계산할 수가 있다.

Fig. 2는 $p=1$, $K_T = \infty$ 일 때의 매개변수 ξ 에 대한 수치해의 결과이다. K_R 의 값이 기둥의 안정성에 미치는 영향을 비교하였다. $K_T = K_R = \infty$ 에 대해서 계산하면 $\xi=0$ 에서 $P_{LCr} = 7.318$, $\xi=1$ 에서 $P_{LCr} = 2.260$ 이 되어 $K_R=100$ 곡선의 각각의 값에 근사하며, 곡선이 구분되어 그려지지 않는다. 또 $K_R=100$ 의 곡선은 前報⁽¹⁴⁾ ($K_R = K_T = \infty$, 세장비 $s=64$, $K'=0.89$)의 $p=1$

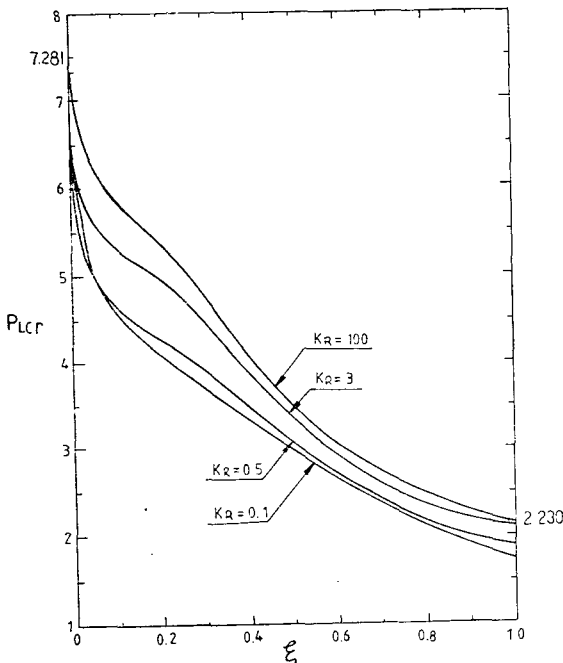


Fig. 2 Variation of P_{LCr} versus ξ for four values of K_R . A tip mass and its moment of inertia are variable according to a magnitude of ξ . $\kappa=0.85$, $s=50$, $p=1$, $K_T = \infty$

의 곡선과 같은 모양을 갖는다. 곡선들의 기울기를 보면 K_R 의 크기에 관계 없이 말단질량의 관성모우멘트의 영향이 기둥의 안정성에 크게 미침을 알 수 있고, 또 K_R 의 작은 값에서도 P_{LCr} 이 대단히 크게 나타나므로, K_R 값은 기둥의 안정성에 큰 영향을 미치지 못함을 알 수 있다. 여기서 기둥의 회전관성과 전단변형을 무시하고 ($K' = \infty$), $K_T = \infty$, $K_R = 1$, 그리고 $\xi = 0$ ($\mu = 0$)일 때의 P_{LCr} 은 6.6191이다. 이 값은 Kounadis⁽¹⁸⁾의 6.5763 ($= 16.21 \times \frac{4}{\pi^2}$)과 비교하면 약 0.6%의 차이를 가지므로, 두 값은 충분히 접근하고 있다.

$\xi=0.2$ 근방에서 곡선이 불안함은 $\xi=0.12$ 까지는 말단질량의 관성모우멘트와 수평관성력이 모두 P_{LCr} 를 감소시키지만, $\xi=0.12$ 이상에서 말단질량의 관성모우멘트는 P_{LCr} 를 계속 감소시키는 반면, 그 수평관성력은 P_{LCr} 를 증가시키기 때문이다⁽¹⁴⁾.

Fig. 3에는 $p=1$, $K_R = \infty$ 일 때의 K_T 의 크기가 기둥의 안정성에 미치는 영향을 ξ 의 값에 대하여 圖示하였다. K_T 의 값이 기둥의 안정성에 미치는 영향은 K_R 의 영향보다 크게 나타났다. $K_T=100$ 곡선의 $\xi=0$ 에서 $P_{LCr} = 5.364$, $\xi=1$ 에서 $P_{LCr} = 2.100$ 은 Fig. 2의 $K_R = 100$ 곡선에 비하면 상당히 낮은 값이고, K_T 의 낮은 값에서는 그 정도가 더욱 쉽다. 말단질량의 관성모우멘트의 영향은 K_T 의 값이 클 때 많이 나타나고, K_T

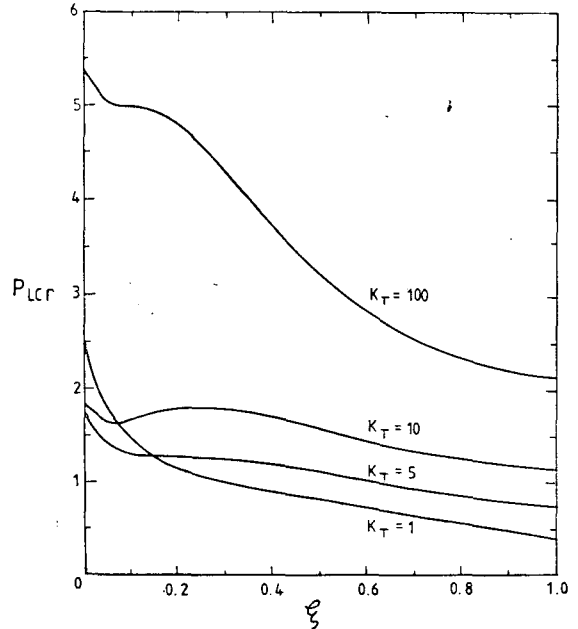


Fig. 3 Variation of P_{LCr} versus ξ for four values of K_T . A tip mass and its moment of inertia are all variable according to a magnitude of ξ . $K'=0.85$, $s=50$, $p=1$, $K_R = \infty$

의 작은 값에서는 말단질량의 수평관성력의 영향이 크게 나타나며 곡선의 기울기는 완만해진다. 또 $K'=\infty$, $K_R=\infty$, 그리고 $K_T=1$ 에서 $\xi=0.125(\mu=0.5)$ 인 말단질량의 수평관성력의 영향만 고려하면 그때의 P_{LCR} 는 1.352이다. 이 값은 Kounadis⁽¹⁸⁾의 $1.351(=3.33 \times \frac{4}{\pi^2})$ 과 비교하여 0.074%의 근소한 차를 가지므로, 두 값은 충분히 일치하고 있다.

3.2. 末端質量이 一定하고 그 慣性모우멘트가 增減하는 境遇

μ 를 일정한 값으로 유지하고, γ 를 증감시키기 위하여 다음과 같이 매개변수 η 를 유도한다.

$$M_i = 2\rho_i \pi c a^2 = 2\rho_i \pi \left(\frac{a}{\sqrt{\eta}} \right)^2 \eta c$$

$$= 2\rho_i \pi a^2 c_1 = \text{const} \quad (22)$$

매개변수 η 는 기둥의 자유단으로부터 말단질량의 重心거리의 변화율이 된다.

그러면, p 의 각 값에 대하여 $\mu=p$ 가 되도록 c 를 결정하면, 식 (20)으로부터

$$4\xi = \left(\frac{\pi a^2}{bh} \right) \left(\frac{2c}{l} \right) = 1 \quad (23)$$

이므로 $c=l/8$ 이 된다. 식 (20)과 식 (21)에서 c 는 ηc 로, a 는 $a/\sqrt{\eta}$ 로 치환하고, $c=l/8$ 을 대입하여 정리하면

$$\mu = p \quad (24)$$

$$\gamma + \mu\alpha^2 = \frac{p}{12} \left[\left(\frac{\eta}{4} \right)^2 + \frac{3\kappa^2}{\eta} + \left(\frac{\eta}{8} \right)^2 \times 12 \right] \quad (25)$$

가 되고, 식 (18)에 식 (24)와 식 (26)을 대입하면 식 (18)은 말단질량의 重心거리의 변화율 η 의 함수가 되어, 말단질량의 관성모우멘트 변화와 고정단의 스프링 상수의 크기가 기둥의 안정성에 미치는 영향을 η 에 따라 계산할 수가 있다. 여기서 $p=1$ 이면, $\mu=1$ 이 되어 기둥의 질량과 말단질량의 크기가 서로 같으며, $\eta=1$ 일 때 말단질량의 길이 $2c$ 는 $l/4$ 이다.

Table 1은 식 (25)에 의하여 계산한 말단질량의 관

Table 1 Values of the moment of inertia of the tip mass for a magnitude of η

$$D = 0.3112 \times \frac{p}{12}$$

η	$(\gamma + \mu\alpha^2)/D$	η	$(\gamma + \mu\alpha^2)$	η	$(\gamma + \mu\alpha^2)/D$	η	$(\gamma + \mu\alpha^2)$
0.05	3.9350	0.5	0.5942	1.0	1	1.5	1.9386
0.1	1.9746	0.6	0.6170	1.1	1.1509	1.6	2.1795
0.2	1.0154	0.7	0.6742	1.2	1.3207	1.7	2.4373
0.3	0.7278	0.8	0.7600	1.3	1.5089	1.8	2.7121
0.4	0.6202	0.9	0.8692	1.4	1.7150	2.0	3.3117

성모우멘트 값이다. η 의 값에 따른 그 크기를 비교하였다. 여기서 $\eta \rightarrow 0$ 이면 $\gamma + \mu\alpha^2 \rightarrow \infty$ 이지만 $\eta=0$ 이면 식 (25)은 불능이 된다. 그러나 엄밀히 말하면 $\eta=0$ 에서는 질량이 0이 아닌 말단질량을 정의할 수 없으므로 $\eta=0$ 은 본 문제의 범위가 아니다.

Fig. 4에서, 말단질량의 관성모우멘트가 가장 큰 $\eta=0.05$ 근방에서는 P_{LCR} 의 값이 K_R 의 영향을 적게 받아 K_R 의 값에 관계 없이 거의 비슷하게 나타나지만, 말단질량의 관성모우멘트가 가장 작은 $\eta=0.5$ 근방에서는 P_{LCR} 의 값이 K_R 의 크기에 많은 영향을 받고 있

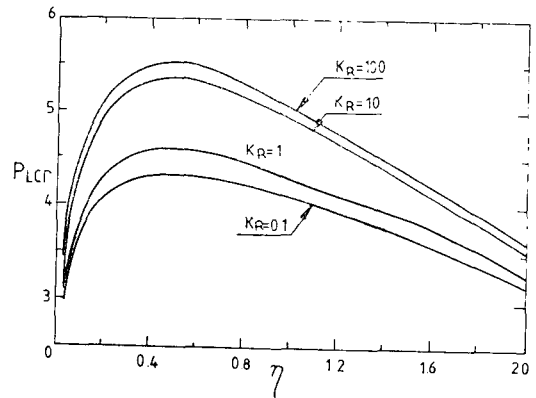


Fig. 4 Variation of P_{LCR} versus η for four values of K_R . A tip mass is constant while its moment of inertia is variable according to a magnitude of η . $K'=0.85$, $s=50$, $p=1$, $K_T=\infty$

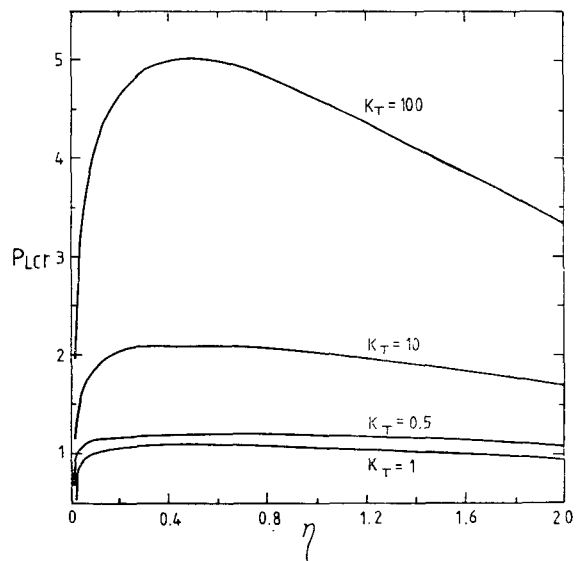


Fig. 5 Variation of P_{LCR} versus η for four values of K_T . A tip mass is constant while its moment of inertia is variable according to a magnitude of η . $K'=0.85$, $s=50$, $p=1$, $K_R=\infty$

다. K_R 를 중심으로 보면 $K_R=100$ 의 곡선은 $K_R=K_T=\infty$ 의 곡선⁽¹⁴⁾과 거의 일치되는 모양이고, K_R 의 작은 값에서는 기둥의 안정성에 미치는 말단질량의 관성모우멘트의 영향이 감소됨을 알 수 있다.

Fig. 5에서 K_T 의 값이 기둥의 안정성에 미치는 영향은 K_R 가 기둥의 안정성에 미치는 영향보다 크게 나타난다. K_T 의 작은 값에서는 말단질량의 관성모우멘트 값의 변화가 P_{Lcr} 에 거의 영향을 미치지 못하고 있다. 그러나, K_T 의 큰 값에서는 말단질량의 관성모우멘트 값의 영향이 대단히 크게 나타났다. 그러므로 기둥의 안정성은 Fig. 3에서도 나타난 바와 같이 K_T 의 작은 값에서 말단질량의 크기에 주된 영향을 받고, K_T 의 큰 값에서 말단질량의 관성모우멘트 값에 주된 영향을 받는다.

4. 結 論

말단질량이 부착된 기둥의 자유단에 압축 중동력이 작용하는 비보존적 탄성계의 불완전 고정단에 나타나는 스프링 특성이 기둥의 안정성에 미치는 영향을 연구하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 고정단의 회전스프링 상수는 기둥의 안정성에 영향을 크게 미치지 않으나, 병진스프링 상수의 영향은 크므로 그 상수가 작을 때는 기둥의 플러터 하중이 크게 감소된다.
- (2) 고정단의 스프링 상수가 작을 때는 기둥의 안정성에 미치는 말단질량의 관성모우멘트 값의 영향이 감소되고, 병진스프링의 경우는 그 정도가 더욱 심하다.
- (3) 압축 중동력을 받는 기둥이나 외팔보를 설계할 때는 고정단의 응력 집중을 방지하기 위하여 스프링 상수가 적당히 큰 회전스프링으로 고정함이 바람직하다.

참 고 문 헌

- (1) H. Ziegler, "Stabilitätsprobleme Bei Geraden Stäben und Wellen", ZAMP. Vol. 12, pp. 265~289, 1951
- (2) H. Ziegler, "Knickung Gerader Stäbe unter Torsion", ZAMP. Vol. 13, pp. 96~119, 1952
- (3) H. Ziegler, "Principles of Structural Stability", Blaisdell Pub. Co., Waltham, 1968
- (4) M. Beck, "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten", Tangential Gedruckten Stäbes, ZAMP. Vol. 13, pp. 225~228, 1952
- (5) S. Nemat-Nasser, "Instability of a Cantilever under Follower Force According to Timoshenko Beam Theory", J. of Applied Mechanics, Vol. 34, pp. 484~485, 1967
- (6) A.N. Kounadis and J.T. Katsikadelis, "Shear and Rotatory Inertia Effect on Beck's Column", J. of Sound and Vibration, Vol. 49, pp. 171~178, 1976
- (7) K.S. Deineko and M. Iu. Leonov, "The Dynamic Method Investigating the Stability of a Bar in Compression", PMM., Vol. 19, pp. 738~744, 1955
- (8) A.N. Kounadis, "Stability of Elastically Restrained Timoshenko Cantilevers with Attached Masses Subjected to a Follower Force", J. of Applied Mechanics, Vol. 44, pp. 731~736, 1977
- (9) B. Rama Bhat and H. Wagner, "Natural Frequencies of a Uniform Cantilever with a Tip Mass Slender in the Axial Direction", J. of Sound and Vibration, Vol. 45, pp. 304~307, 1976
- (10) B. Rama Bhat and M. Avinash Kulkarni, "Natural Frequencies of a Cantilever with Slender Tip Mass", AIAA Journal, Vol. 14, pp. 536~537, 1976
- (11) A.H. Flax, Comment on "Natural Frequencies of a Cantilever with Slender Tip Mass" AIAA Journal, Vol. 16, pp. 94~96, 1978
- (12) G.L. Anderson, J.D. Vasilakis and J.J. Wu, "The Influence of Tip Mass Offset on the Stability of Beck's column", J. of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 475~480, 1979
- (13) V.V. Bolotin, "Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability", pp. 94, Pergamon Press Oxford, 1963
- (14) 윤한익, 김광식, "말단질량의 관성모우멘트가 Beck's column의 안정성에 미치는 영향", 대한기계학회논문집, 제 8권, 제 2호, pp. 119~126, 1984
- (15) M. Levinson, "Application of the Galerkin and Ritz Methods to Nonconservative Problems of Elastic Stability", ZAMP. Vol. 17, pp. 431~442, 1966
- (16) S. Timoshenko, "Vibration Problems in Engineering", 4th ed., pp. 433, John Wiley & Sons Inc., New York, 1974
- (17) G. R. Cowper, "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", J. of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335~340, 1966
- (18) A. N. Kounadis, "Coupling Effects on a Cantilever Subjected to a Follower Force", J. of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 131~139, 1979