

<論 文>

振動法에 의한 補強平板의 剛性測定研究

金天旭* · 南俊祐** · 元鍾鎭** · 韓承奉***

(1985年 1月 28日 接受)

A Study on the Measurement of Rigidities of Stiffened Plates by Vibration Method

Chon Wook Kim, Joon Woo Nam, Chong Jin Won and Seung Bong Han

Abstract

A new measuring technique for the rigidities of stiffened plates is presented. The equations relating the rigidities of stiffened plates and the natural frequencies of a cantilever plate are derived and the rigidities are determined using the measured natural frequencies of the plate.

The static deflection tests are conducted for checking the validity of this method.

For unstiffened plates the measured rigidities are good agreement with the theoretical values and the experimental results of deflection tests. In the case of stiffened plates the measured rigidities closely matched with the results of deflection tests.

It has been also demonstrated that this measuring technique can be utilized in determining the rigidities of arbitrarily stiffened plates.

1. 序 論

補強平板은 구조적 필요성이나 輕量化 設計에 따라 항공기, 선박, 철도차량, 교량등의 구조물에 널리 사용되고 있다.

이러한 補強平板은 補強材의 부착방법에 따라 板의 한쪽면에만 부착된 偏心補強平板, 板의 양쪽면에 대칭

으로 부착된 對稱補強平板으로 분류할 수 있으며 보강재의 형태에 따라 規則 및 不規則(任意)補強平板으로 분류할 수 있다.

對稱補強平板의 굽힘에 관한 연구는 Bryan⁽¹⁾이 압축력을 받는 대칭 補強平板의 굽힘 강도에 대하여 연구한 것을 시초로 Huber⁽²⁾에 의한 直交異方性板의 支配方程式의 유도로 활발하여졌다. 그는 補強으로 인한 構造의 直교이방성판을 等價의 剛性を 갖는 材料的 直교이방성판으로 치환하여 해석함으로써 비교적 간단한 모양의 平衡微分方程式을 유도하였다.

현재 構造의 필요성에 따라 널리 사용되고 있는 偏心補強平板의 경우는 많은 연구자^(3,4,5,6)들이 補強材

*正會員, 延世大學校 工科大學 機械工學科

**正會員, 國民大學校 工科大學 機械設計學科

***正會員, 延世大學校 大學院

에 의한 中立面의 이동에 따른 偏心 영향을 고려한 엄밀이론에 대하여 연구하였지만, 그 解의 복잡성 때문에 Huber 형 지배 방정식이 아직까지도 사용되고 있으며 이에 따른 等價剛性係數의 산정문제는 중요한 연구과제가 되고 있다. 특히 任意補強平板의 굽힘에 관한 이론적 연구는 아직까지 되어있지 않다.

補強平板의 剛性係數 산정에 관한 실험적 연구로는 Bergsträsser⁽⁷⁾가 순수 굽힘 모우멘트와 순수 비틀림 모우멘트를 가하는 실험으로부터, 板의 彈性係數를 구한 이래 Hearmon⁽⁸⁾과 Witt⁽⁹⁾ 등은 재료적 직교이방성 판의 탄성계수를 산정하였으며 Beckett⁽¹⁰⁾는 曲率을 측정하여 補強平板의 剛性係數를 산정하였다. 상기의 실험방법은 순수 굽힘 모우멘트 및 비틀림 모우멘트의 작용 및 試片의 초기 결함에 따른 曲率測定值의 不正確性 때문에 실험장치 및 試片의 대형화와 高精密度가 불가피하게 된다.

이 論文에서는 等方性 외판板의 剛性係數 및 고유진동수의 관계^(11, 12, 13)로부터 外판 補強平板의 剛性係數와 고유진동수와의 관계식을 유도하였으며 고유진동수를 측정하여 剛性係數를 산정하였다. 위의 剛性係數算定法의 타당성을 입증하기 위하여 外판板에 집중하중 작용시 하중, 처짐, 剛性係數의 관계식을 유도하고 外판板 처짐 실험을 하였다.

이론해가 없는 임의補強平板에 대해서도 진동수 측정에 의해 剛性係數를 산정하고, 이를 外판板 처짐實驗에 적용하여 처짐의 이론치와 실험치를 비교 검토하였다.

2. 理 論

2.1. 外판板의 自由振動

直交異方性板의 진동에 관한 해석 방법은 여러가지⁽¹³⁾ 있으나 본 연구에서는 Ritz method에 의해서 의

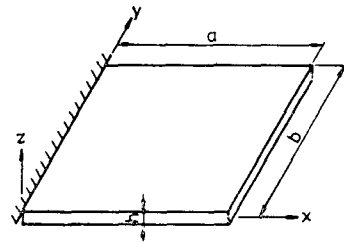


Fig. 1 Cantilever plate

외판板의 고유진동수와 剛性係數와의 관계식을 유도한다.

Fig. 1과 같은 外판板의 경계조건(boundary condition)은 다음과 같다.

$$w=0, \frac{\partial w}{\partial x}=0 \text{ at } x=0 \quad (1)$$

$$M=0, V=0 \text{ at } x=0 \text{ and } y=0, b$$

여기서 w 는 z 방향으로의 변위를 나타낸다.

板이 調和振動하는 경우 판의 처짐곡면은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot \sin \omega t \quad (2)$$

식 (2)에서 ω 는 角振動數를 나타내며 $W(x, y)$ 는 처짐함수를 다음과 같이 가정한다.

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \phi_n(x) \psi_m(y) \quad (3)$$

식 (3)에서 $\phi_n(x)$ 는 clamped-free 인 경계조건을 만족시키는 보의 特性函數이고 $\psi_m(y)$ 는 free-free 인 경계조건을 만족시키는 보의 특성함수이다.

Table 1은 식 (1)의 경계조건을 만족시키는 보의 특성함수^(11, 12)들을 나타내고 있으며 Table 2는 Table 1의 특성함수에서의 계수 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ 값을 나타내고 있다.

Table 1 Characteristic functions

	Boundary condition	Mode	Characteristic function
x	clamped-free	m th	$\phi_m(x) = \cos h(\alpha_n x/a) - \cos(\alpha_n x/a) - \beta_n \{ \sinh(\alpha_n x/a) - \sin(\alpha_n x/a) \}$ (4)
y	free-free	1 st	$\phi_1(y) = 1$ (5 a)
		2 nd	$\phi_2(y) = \sqrt{3}(1 - 2y/b)$ (5 b)
		n th ($n=3, 4, \dots$)	$\phi_n(y) = \cos h(\gamma_n y/b) + \cos(\gamma_n y/b) - \delta_n \{ \sin h(\gamma_n y/b) + \sin(\gamma_n y/b) \}$ (5 c)

Table 2 Values of $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ and δ_n

m, n	α_n	β_n	γ_n	δ_n
1	1.8751	0.7341	—	—
2	4.6941	1.0184	—	—
3	7.8548	0.9992	4.7300	0.9825

直交異方性板이 振幅 $W(x, y)$ 와 角振動數 ω 로 조화진동하는 경우 최대변형에너지(U_{max})와 최대 운동에너지(T_{max})는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2 D_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 4 D_{xy} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (6a)$$

$$T_{max} = \frac{\bar{m}}{2g} \omega^2 \int_0^a \int_0^b W^2 dx dy \quad (6b)$$

여기서

$$D_1 = \frac{\nu E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7)$$

식 (6a), (6b)에서 D_x, D_y 는 平板의 굽힘 剛性係數, D_{xy} 는 비틀림 剛性係數를 나타내며 \bar{m} 는 단위면적당 중량, g 는 중력가속도를 나타낸다.

保存系에서 $U_{max} = T_{max}$ 이므로 식 (6a), (6b)로부터 角振動數 ω 는 다음과 같이 주어진다.

$$\omega^2 = \frac{2gU_{max}}{\bar{m} \int_0^a \int_0^b W^2 dx dy} \quad (8)$$

식 (8)에 Table 1의 특성함수를 적용하면 ω 는 다음과 같이 된다.

$$\omega^2 = \frac{g}{\bar{m} a^4} [\eta_1 D_x + \eta_2 D_y + 2\eta_3 D_1 + 4\eta_4 D_{xy}] \quad (9)$$

여기서 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 는 식 (3)의 項數 및 a/b 에 따른 係數를 나타낸다⁽¹¹⁾.

외팔보의 1次모우드에서 식 (9)의 계수 η_2, η_4 는 $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 크기의 값으로 무시할 수 있으므로 굽힘강성계수 D_x 는 다음과 같이 된다.

$$D_x = \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{\bar{m} a^4 \omega_1^2}{g} - 2\eta_3 \nu D \right) \quad (10)$$

여기서

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

등방판의 경우 D_x 는 D 임으로 식 (10)으로부터 D 는 다음과 같이 된다.

$$D = \frac{\bar{m} a^4 \omega_1^2}{(\eta_1 + 2\eta_3 \nu) g} \quad (11)$$

식 (10), (11)로부터 D_x 와 ω_1 과의 관계식은 다음

과 같이 나타낼 수 있다.

$$D_x = \frac{\omega_1^2}{\lambda_1 g} \bar{m} a^4 \quad (12)$$

여기서

$$\lambda_1 = \eta_1 + 2\eta_3 \nu$$

같은 방법으로

$$D_y = \frac{\omega_1'^2}{\lambda_1 g} \bar{m} b^4 \quad (13)$$

여기서 ω_1' 은 $x=0$ 가 clamp된 경우, 1次 모우드에서의 角振動數이다.

2次모우드에서는 $\eta_2 = \eta_3 = 0$ 이므로 식 (9), (12)로부터 비틀림 강성계수 D_{xy} 는 다음과 같이 주어진다.

$$D_{xy} = \frac{(\omega_2^2 b^2 - \lambda_3 \omega_1'^2 a^2)}{\lambda_2 g} \bar{m} a^2 \quad (14)$$

여기서 ω_2 는 2次모우드에서의 角振動數이다.

식 (12), (13), (14)의 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 는 a/b 에 따른 frequency parameter를 나타내고 있으며, Table 3는 $a/b=1$ 인 경우, 식 (3)의 項數에 따른 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 의 값을 나타낸다.

Table 3 Frequency parameters $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($a/b=1$)

Term	λ_1	λ_2	λ_3
1	12.3622	223.09	1.0
2	12.3622	223.09	1.0
3	12.3622	223.09	1.6043
4	12.3622	155.8168	1.6137
5	12.2901	155.8168	1.6325
6	12.2898	155.7351	1.6228
7	12.1483	155.7351	1.6228
8	12.1308	155.7351	1.6228
9	12.1308	155.7351	1.6228

Table 4는 $\nu=0.333$ 인 等方性板의 경우, a/b 의 변화에 따른 frequency parameter λ_1, λ_2 를 나타내고 있다.

Table 4 Frequency parameters λ_1, λ_2 for unstiffened plates a/b

a/b	λ_1		λ_2	
	Eq(10)	Gorman ⁽¹³⁾	Eq(12)	Gorman ⁽¹³⁾
1/3	3.521	3.497	4.505	4.368
1/2	3.511	3.487	5.426	5.278
1	3.5	3.459	8.47	8.356
2	3.486	3.420	14.651	14.5
3	3.478	3.395	21.000	20.68

2.2. 외팔板的 처짐

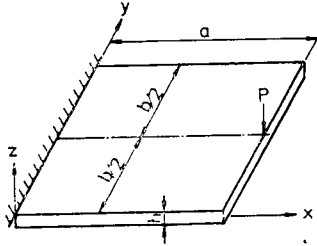


Fig. 2 Cantilever plate

Fig. 2와 같이 외팔板에 집중하중 P 가 적용할 때 처짐곡면 $W(x, y)$ 를 식 (3)으로 가정하면, 直交異方性板의 굽힘에 의한 변형에너지 U 는 식 (6a)로 표시된다.

식 (3)에 假想變位の 原理(principle of virtual displacement)를 적용하면 板의 假想變位는 다음과 같이 된다.

$$\delta W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta A_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y) \quad (15)$$

여기서 $\phi_m(x)$ 와 $\psi_n(y)$ 는 Table 1에 표시된 보의 특성함수이다.

식 (6a)로 부터 變形에너지의 변화는 다음과 같이 주어진다.

$$\delta U = -\frac{\partial U}{\partial A_{mn}} \delta A_{mn} \quad (16)$$

집중하중 P 가 假想的 미소 변위에 작용하여 한 일은 다음과 같다.

$$P \delta W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P \delta A_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y) \quad (17)$$

$\delta U = P \delta W$ 이므로 식 (16), (17)로 부터 A_{mn} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_{mn} = \frac{P \phi_m(x) \psi_n(y)}{\int_0^a \int_0^b \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \right)^2 \psi_n^2 + D_y \phi_m^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + 4D_{xy} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy} \quad (18)$$

식 (18)을 식 (3)에 대입하면, 집중하중이 작용할 때 외팔板的 처짐 W 는 다음과 같이 구해진다.

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P \phi_m^2(x) \psi_n^2(y)}{\int_0^a \int_0^b \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \right)^2 \psi_n^2 + D_y \phi_m^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + 4D_{xy} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy} \quad (19)$$

3. 實 驗

3.1. 試驗片

진동 및 처짐 실험에 사용한 시험편의 재료는 알루미늄板(Al 1050 P)을 사용하였으며, 보강재는 강력접착제(Araldite)로 접착하였다.

알루미늄板의 탄성계수 E 및 Poisson's ratio ν 의 측정치는 각각 7100 kgf/mm^2 과 0.333 이었으며, Fig. 3과 Table 5는 각각 시험편의 형상 및 치수를 나타낸다.

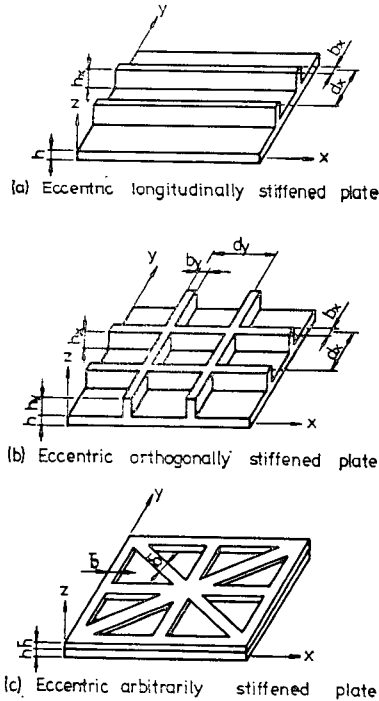


Fig. 3 Stiffened plate specimens

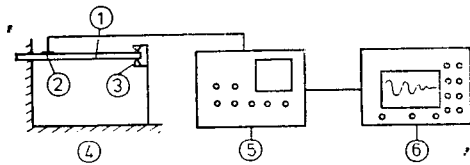
3.2. 실험장치 및 방법

(1) 진동실험

외팔板的 한 自由端 또는 모서리에서의 정적 초기처짐에 의하여 쉽게 調和振動이 발생할 수 있도록 실험장치를 제작하였으며, Fig. 4는 schematic diagram을 나타내고 있다. Fig. 5와 같이 외팔板이 1次모우드 및 2次모우드로 진동할 때, 板 표면에 접착된 스트레인 게이지의 처장변화를 dynamic strain amplifier에

Table 5 Dimensions of specimens (mm)

	specimens	$a=b$	h	h_x	h_y	b_x	b_y	d_x	d_y
Isotropic plate	I 1	140	1.2	—	—	—	—	—	—
	I 2	"	1.5	—	—	—	—	—	—
Longitudinally Stiffened plate	L 1	140	0.6	1.0	—	6.6	—	35.0	—
	L 2	"	0.6	2.0	—	6.6	—	35.0	—
	L 3	"	0.6	3.0	—	6.6	—	35.0	—
Orthogonally Stiffened plate	G 1	130	0.6	0.8	0.8	4.0	4.0	21.5	21.5
	G 2	"	0.6	1.5	1.5	4.0	4.0	21.5	21.5
	G 3	"	0.8	2.0	2.0	4.0	4.0	21.5	21.5
Arbitrarily Stiffened plate	A 1	140	0.8	$\bar{h}=1.5, \bar{b}=8.0$					
	A 2	"	0.8	$\bar{h}=2.0, \bar{b}=8.0$					



- ① Specimen
- ② Strain gage
- ③ Support equipment
- ④ Clamping equipment
- ⑤ Dynamic strain amplifier
- ⑥ Storage oscilloscope

Fig. 4 Schematic diagram of experimental equipment

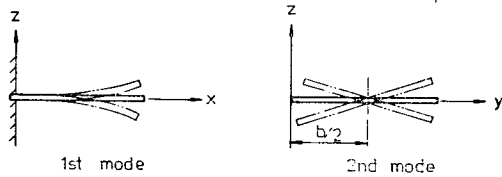


Fig. 5 Vibration shape of 1st and 2nd mode of the cantilever plate

서 증폭하여 storage oscilloscope에 나타나는 파형으로부터 試驗片의 고유 진동수를 측정하였다.

(2) 처짐 측정 실험

Fig. 2와 같이 $x=a, y=b/2$ 인 지점에 무게 P 를 가했으며, 그 점에서의 처짐을 다이얼 게이지로 측정하였다.

4. 실험결과 및 고찰

Table 6은 等方性平板(I1, I2)의 경우 진동법으로 산정한 剛性係數와 이론 剛性係數 $\{D_x=D_y=D=\frac{Ek^3}{12(1-\nu^2)}, D_{xy}=\nu D\}$ 를 나타내고 있으며, 이들은 3%내에서 잘 일치하고 있다.

Table 7은 等方性平板(I1, I2), 規則補强平板(L1~G3) 및 任意補强平板(A1, A2)의 實驗剛性係數로부터 구한 이론 처짐량과 실험 처짐량을 비교하여 나타내고 있으며 Fig. 6~Fig. 9는 각 경우의 하중-처짐 선도를 나타내고 있다. 위의 결과를 검토하면, 剛性係數를 이론적으로 구할 수 있는 等方性平板(非補强平板)의 경우에는 振動法에 의한 實驗剛性係數가 理論値와 3%이내의 범위에서 잘 맞고 있으며 特定の 理論을 적용하기 곤란한 補强平板의 경우에도 4%이내의 오차를 보이고 있다. 특히 近似理論도 존재하지 않는 任意補强平板의 경우에는 이 論文에서 제시하는 振動法이 유일한 剛性測定法으로 주어질 수 있다.

Table 6 Comparisons of the rigidities for unstiffened plates (kgf·mm)

$h(\text{mm})$	D_x		D_y		D_{xy}	
	Theory (=D)	Experiments	Theory (=D)	Experiments	Theory (=νD)	Experiments
1.2	1149	1115	1149	1118	383	376
1.5	2244	2194	2244	2196	748	731

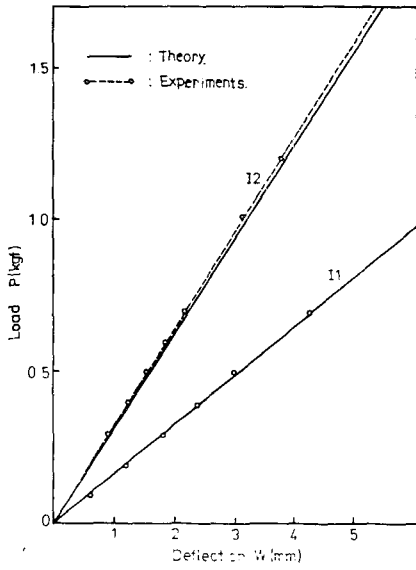


Fig. 6 Load-deflection curve for unstiffened cantilever plates

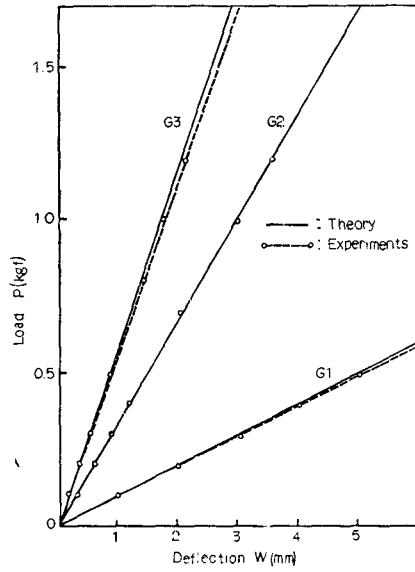


Fig. 8 Load-deflection curve for orthogonally stiffened cantilever plates

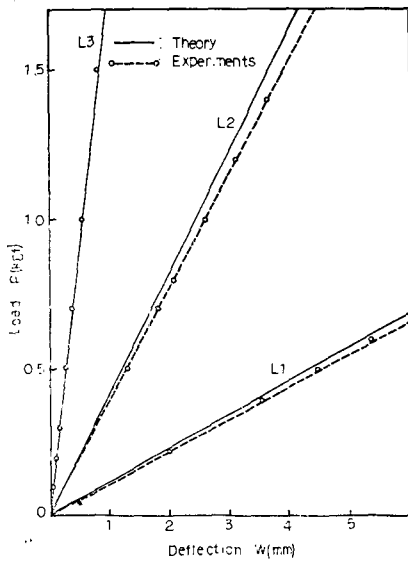


Fig. 7 Load-deflection curve for longitudinally stiffened cantilever plates

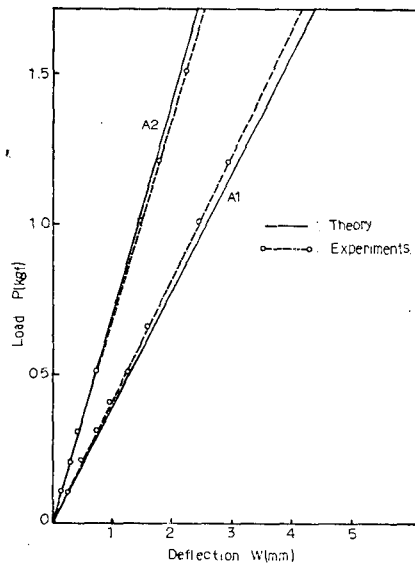


Fig. 9 Load-deflection curve for arbitrarily stiffened cantilever plates

Table 7 Comparison of deflection (Load $P=1$ kgf)

Specimen	Deflection W (mm)		Differrence $\left(\frac{A-B}{A} \times 100\%\right)$
	Theory(A)	Experiments (B)	
I 1	6.128	6.12	0.13
I 2	3.22	3.14	2.48
L 1	8.672	8.93	-2.98
L 2	2.430	2.55	-4.94
L 3	1.031	1.035	-0.39
G 1	9.794	9.96	-1.69
G 2	2.929	2.94	-0.38
G 3	1.669	1.70	-1.38
A 1	2.539	2.54	-0.04
A 2	2.552	2.495	3.64

5. 結 論

이 論文에서는 각종 補强平板의 剛性係數를 진동법을 이용하여 산정하는 방법을 제시한다. 이 방법으로 산정된 剛性係數를 외판板의 처짐 실험으로 검증하여 그 정밀도를 평가하였다.

이 연구의 결과는 다음과 같다.

(1) 등방성板의 경우 진동법에 의한 剛性係數는 이론치와 3%내에서 일치하며, 처짐 실험결과와도 3%내에서 일치한다.

(2) 규칙 및 임의보강평판에서 진동법에 의하여 산정한 剛性係數를 사용하여 구한 처짐의 이론치와 실험치는 4%내에서 일치한다.

References

- (1) Bryan, G.H. On the Stability of a Plane Plate under Thrusts in Its Own Plane, with Applications to the Buckling of the Sices, Proc. London Math. Soc., Vol. 22, pp. 54~67, 1891
- (2) Huber, M.T., "Die Grundlagen einer Rationellen Berechnung der Kreuzweise Bewehrten Eisenbetonplatten, Zeitschrift des Osterr.", Ingenieur und Architekten Vereines, No. 30, pp. 557~564, 1914
- (3) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Co., 2nd ed. 1959
- (4) Massonnet, C., "Plaque et coques Cylindriques Orthotropes a Nervures Dissymetriques.", Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, pp. 201~230, 1957
- (5) Giencke, E., "Die Grundgleichungen fur die Orthotrope Platte mit Extentrishen Steifen.", Stahlbau, Bd. 24, Herf 6, Juni, pp. 128~129, 1955
- (6) Hasegawa, A., Akiyama, H. and Nishino, F., "Analysis of Plates with Single-Sided Stiffeners.", Japan Society of Civil Engineering, Vol. 270, pp. 23~34, 1975
- (7) Bergsträsser, M., "Bestimmung der Beiden Elastischen Konstanten von Plattenformigen Korp-ern.", Z. Tech. Phys. 8, p. 355~1927
- (8) Hearmon, R.F. and Adams, E.H., "The Bending and Twisting Of Anisotropic Plates.", Brit. J. Appl. Phys. 3, May, pp. 150~156, 1952
- (9) Witt, R.K., Hoppmann, W.H. and Buxbaum, R.S., "Determination of Elastic Constants of Orthotropic Materials with Special Reference to Laminates.", ASTM Bulletin No. 194, Dec., p. 53, 1953
- (10) Beckett, R.E., Dohrmann, R.J. and Ives, K.D., "An Experimental Method for Determining the Elastic Constants of Orthogonally Stiffened Plates.", Experimental Mechanics, Pergamon, Press., pp. 129~148, 1963
- (11) Young, D., "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method.", J. of Appl. Mech., Trans. ASME., Vol. 72, pp. 448~453, 1950
- (12) Barton, M.V., "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates.", J. Appl. Mech., Trans. ASME., Vol. 73, pp. 129~134, 1951
- (13) Gorman, D.J., Free Vibration Analysis of Rectangular Plates., Elsevier North Holland, Ins. 1982