

<論 文>

전위모델을 이용한 2차원 응력해석

구 인 회*

(1984년 5월 23일 접수)

2-D Stress Analysis by a Dislocation Model

Inhoy Gu

Abstract

A new method is suggested for the solution of plane elasticity problems. With use of the dislocation model in the crack problems, the basic scheme of this method is to find equilibrium Burgers vectors of dislocations which are distributed along the boundary of the first fundamental boundary value problems. The stress distribution in the region can be found by superposition of the contributions of each dislocation. The method is applied to three cases with known analytical solutions, and to a V-notched specimen under uniaxial tension. The numerical results are compared with other available solutions. This method is effective and simple in its use, compared with other numerical methods. The method also provides very accurate solutions in the region except near the boundary where the discretization error is significant. The extrapolation method is suggested for the stresses in the boundary region. [Extensive applications are also suggested for a general estimate of the computational efficiency of the method.

1. 서 론

본 논문에서는 전위이론을 이용하여 일반적인 평면 탄성응력해석을 위한 새로운 수치적 방법이 제안되었다. 전위이론이 미시적 소성변형을 제외하고 광범위하게 이용된 분야는 파괴역학으로 생각된다. 하중을 받는 무한평판에 있는 크랙의 상하단면에서의 불연속적인 변위를 전위의 Burgers Vector로 대치 한데서 착상한 크랙의 전위이론은 Bilby et al⁽¹⁾에 의해 처음 제안되었다. 또한 전단대항복(shear band yielding)에서

전단변위의 불연속을 전위분포로 대치할 수도 있다. 그래서 평면크랙의 길이나 전단대를 따라서 분포된 전위가 경계조건을 만족하도록 하여 얻은 평형의 전위분포로부터 직접 얻을 수 있는 응력확대계수, crack opening displacement, 전단대의 크기를 구하는데 그 목적이 있다. 이러한 방법은 Cottrel⁽²⁾, Vitek⁽³⁾, Evans⁽⁴⁾와 최근의 Fujino et al⁽⁵⁾등에 의해 여러형태로 이용되어 왔다. 이와같이 크랙을 전위의 연속분포로 대치하면 경계응력과의 관계식은 특이적분방정식이 된다(Landau and Lifshitz)⁽⁶⁾. 이 방정식을 선형대수방정식으로 바꾸어서는 푸는 해법이 Erdogan and Gupta⁽⁷⁾에 의해 개발되어 Lo⁽⁸⁾등에 의해 크랙문제에 사용되어 왔다.

*정회원, 중앙대학교 공과대학 기계공학과

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^{\infty}(z_k) + \sum_{j=1}^N [b_j \sigma_n(z_k, z_{0j}) + b_{j+N} \sigma'_n(z_k, z_{0j})] &= \sigma_n(z_k) \\ \tau_{ns}^{\infty}(z_k) + \sum_{j=1}^N [b_j \tau_{ns}(z_k, z_{0j}) + b_{j+N} \tau'_{ns}(z_k, z_{0j})] & \\ = \tau_{ns}(z_k) & \end{aligned} \quad (6)$$

이로써 $2N$ 개의 미지수 b_j, b_{j+N} 을 결정하기 위한 $2N$ 개의 방정식이 세워졌고 Gauss 소거법등의 방법으로 풀 수 있다. 탄성영역내의 임의점 z 에서의 응력 $\sigma_{mn}(z)$ 는 방정식 (6)에서 얻은 전위분포를 사용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{mn}(z) &= \sigma_{mn}^{\infty}(z) \\ &+ \sum_{j=1}^N [b_j \sigma_{mn}(z, z_{0j}) + b_{j+N} \sigma'_{mn}(z, z_{0j})] \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\sigma_{mn}(z, z_{0j})$ 는 z_{0j} 에 위치하는 단위벡타의 전위에 의한 z 점에서의 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 를 표시한다.

3. 해석에 및 검토

앞 절에서 설명한 방법을 사용하여, 널리 알려진 원공을 포함하는 다음 세가지 탄성응력을 풀고 정답과 비교하였다. 또한 응력의 특이점을 갖는 인장을 받는 대칭의 V-노치에 대해서도 적용되어 유한요소에 의한 계산결과와 비교하였다. 이 방법에서는 유한요소에 의한 계산과는 달리 평형관계식이 경계면상의 점에 대해서 세워진다. 따라서 계산량이 유한요소법에 비해 작을 것으로 판단되나 이에 대해서는 전위수에 따른 또한 유한요소절점수에 따른 해석의 오차를 비교 검토해야 하므로 개별적인 문제에 대한 상대적인 비교가 가능할 뿐이다. 다음의 수치해에 사용된 기종은 FACOM 230이고 double precision을 사용하였으며 계산시간은 CPU time으로 주어져 있다.

3.1. 무한평판에서 원형구멍이 내압을 받는 경우

Fig. 2에서 무한평판에 반경 a 의 원형구멍이 있고 이것이 내압 p 를 받고 있다. x 축과 각 θ 을 이루는 경계면상의 한점에 경계면에 평행한 벡타의 전위를 위치시키고 그것의 Burgers 벡타크기를 b 라고 하면 $(b_x, b_y) = b(-\sin\theta, \cos\theta)$ 가 된다. 이 문제는 경계모양과 부하방법이 모두 축대칭이므로 경계면을 N 개로 균등하게 나누고 그 나눈자리에 각각 전위를 분포시키면 축대칭에 의해 이들 벡타의 크기는 모두 동일하다. 따라서 전위간의 사이각을 $\Delta\theta$ 라고 하면 j 번째 전위위치는 x 축과 $\theta = (j-1)\Delta\theta$ 를 이루고 그 위치는 $z_{0j} = a(\cos\theta +$

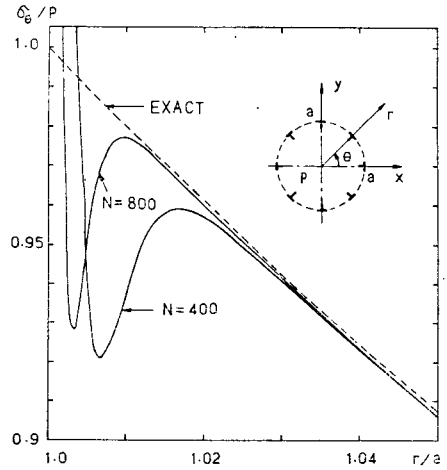


Fig. 2 A circular hole in an infinite plate is under an internal pressure p . The hoop stress near the boundary is compared between the dislocation model and exact solution. The number of total dislocations along the circular boundary is N

$is\sin\theta)$ 가 된다. 또한 축대칭에 의해 경계면에 수직인 Burgers 벡타는 모두 영이된다. 이웃하는 임의의 두전위의 중간점 예를들면 $z_1 = (z_{01} + z_{02})/2$ 를 택하면 경계 조건은

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^{\infty}(z_1) &= 0 \\ \sigma_n(z_1) = \sigma_r(z_1) &= -p \end{aligned} \quad (8)$$

이들 식 (6)에 대입하고 정리하면 평형을 이루는 벡타의 크기를 결정할 수 있다.

$$b = -p / \sum_{j=1}^N \sigma_r(z_1, z_{0j}) \quad (9)$$

여기서 $\sigma_r(z_1, z_{0j})$ 는 앞에서 설명한대로 z_{0j} 에 있는 단위벡타 $(b_x, b_y) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 의 전위에 의한 z_1 에서의 σ_r 를 의미하고 이는 (1), (4), (5)식과 적당한 좌표변환에 의해 얻어진다. 영역내 임의의 점 z 에서의 응력은 식 (9)의 결과를 이용하여 식 (7)로부터 계산된다.

$$\sigma_{mn}(z) = b \sum_{j=1}^N \sigma_{mn}(z, z_{0j}) \quad (10)$$

경계면 부근의 x 축상에서 응력 σ_r 의 계산결과가 Fig. 2에 주어져 있다. 이 문제의 정답은 $\sigma_r = -p \left(\frac{a}{r}\right)^2$, $\sigma_\theta = p \left(\frac{a}{r}\right)^2$ 이다. 전위분포에 의한 수치적 해답은 경계면 근방에서 해의 진동현상이 나타났으나 경계면에서 어느정도 떨어진 곳에서 오차는 무시될 수 있었다. 예를들면 $N=800$ 인 경우 $r/a=1.012$ 에서 수치해는 정답과 0.16%의 오차를 가져왔으나 이 보다 더 먼

곳일수록 오차는 감소한다. 그러나 진동현상이 나타나는 구간($N=800$ 일 때 $1 \leq r/a \leq 1.012$)에서의 응력값은 Fig. 2에서 진동현상이 나타나지 않는 부분의 폭선기술기를 이용한 연장선(extrapolation)을 통해 계산될 수 있을 것으로 생각된다. 경계면 부근에서 수치해의 이와같은 변화는 경계면에서 연속적인 경계값을 절편적인 분포(discrete distribution)로 대치 한데서 발생한 것이다. 그러나 전위간의 한구간에서의 합력은 연속과 절편의 두 경우가 같아야 할 것이므로 이를 확인하기 위해 Fig. 3에 경계면의 임의의 한 구간에서 전위분포로 인한 전단응력 $\tau_{\theta r}$ 가 주어져 있고 이것의 합력은

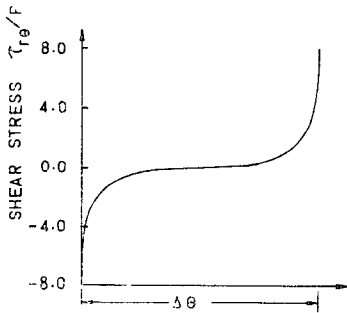


Fig. 3 The shear stress distribution due to the dislocations is shown for one division of the circular boundary of Fig. 3 with $N=200$

주어진 경계응력과 같이 영이 되었다. 다른 응력성분에 대해서도 같은 결과가 얻어졌다. 따라서 Saint-Venant의 원리에 의해 경계면에서 떨어진 것에서는 정확한 해답을 얻을 수 있다. 경계면 부근의 오차를 줄이기 위해 계산에서 한가지 주목할 사항은 각 등분자리에 전위를 분포시키는 것이 필요하다. 예를들면 첫번째 전위 위치 z_{01} 은 x 축상에 있고 두번째 전위위치 z_{02} 는 x 축과 $\Delta\theta$ 를 이룬다. 같은 전위수에 N 에 대해서 이와같은 분포는 각 구간의 중간점(예를들면 z_{01} 의 각이 $\Delta\theta/2$)에 분포시킨 경우보다 훨씬 좋은 결과를 가져다 주었다. 이 문제에서는 앞서 언급된 축대칭으로 인해, 다른 일반적인 경우와는 달리 전위수가 증가하더라도 미지수는 벡타크기 b 하나이므로 전체 계산시간은 전위수에 대략 선형적으로 증가할 뿐이다. $N=800$ 일 때 계산시간은 194 초이었다.

3.2. 내압을 받고 있는 원통

문제영역이 두개의 교차하지 않는 폐곡선으로 정의되는 가장 간단한 경우가 원통문제이다. 이 경우에도 전위분포에 의한 응력해석이 가능함을 알기 위해 내압을 받는 원통에 대해 이 방법이 적용되었다. 이 문제

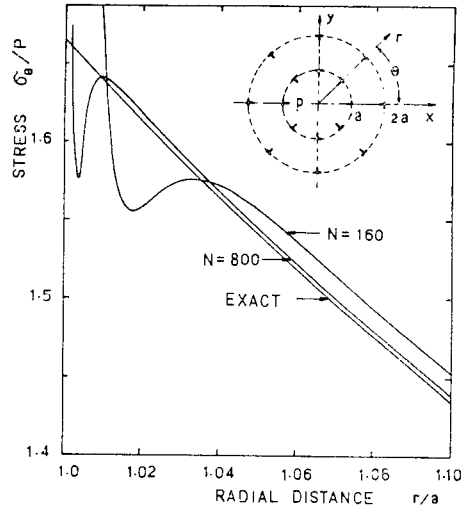


Fig. 4 A hollow cylinder with an internal pressure p . A comparison of stress near the inner surface is made between the dislocation model and exact solution

는 앞의 문제와 같이 축대칭이고 경계면에 전단응력이 없으므로 Fig. 4에서와 같이 내외경계면의 N 등분 지점에 경계면에 평행한 벡타의 전위만 분포시켰다. 이때 미지수는 축대칭으로 내경면($r=r_a$)에서 벡타의 크기 b_a 와 외경면($r=r_b$)에서의 크기 b_b 두개 뿐이다. 내경면의 j 번째 전위위치는 등분간격이 $\Delta\theta$ 일때 x 축과 $\theta=(j-1)\Delta\theta$ 를 이루고 $z^{a_{0j}}=r_a \cos\theta + ir_a \sin\theta$ 이다. 이 점에 있는 전위벡타는 $(b_x, b_y)=(-b_a \sin\theta, b_a \cos\theta)$ 이다. 마찬가지로 외경면의 전위위치는 $z^{b_{0j}}=r_b \cos\theta + ir_b \sin\theta$ 이고 여기서의 전위벡타는 $(b_x, b_y)=(-b_b \sin\theta, b_b \cos\theta)$ 이다. 또한 이웃하는 임의의 두 전위간의 중간점을 택하고 이들을 내외경에 대해 각각 z_a, z_b 로 표시하면(예를들어 $z_a=(z^{a_{01}}+z^{a_{02}})/2$) 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_n^a(z_a) &= \sigma_n^b(z_b) = 0 \\ \sigma_n(z_a) &= \sigma_r(z_a) = -p \\ \sigma_n(z_b) &= \sigma_r(z_b) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

이들을 대입하면

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N [b_a \sigma_r(z_a, z^{a_{0j}}) + b_b \sigma_r(z_a, z^{b_{0j}})] &= -p \\ \sum_{j=1}^N [b_a \sigma_r(z_b, z^{a_{0j}}) + b_b \sigma_r(z_b, z^{b_{0j}})] &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서도 앞서와 같이 $\sigma_r(z_a, z^{b_{0j}})$ 는 외경계상의 점 $z^{b_{0j}}$ 에 있는 단위벡타 $(b_x, b_y)=(-\sin\theta, \cos\theta)$ 의 전위에 의한 z_a 에서의 응력 σ_r 를 표시한다. 위의 두개의 방정식을 풀어 벡타의 크기 b_a, b_b 를 결정하고 식 (7)에

대입하면 영역내의 점 z 에서 응력을 구할 수 있다.

$$\sigma_{nn}(z) = \sum_{j=1}^N [b_a \sigma_{nn}(z, z^{a_j}) + b_b \sigma_{nn}(z, z^{b_j})] \quad (13)$$

Fig. 4에 내반경 $r_a=a$, 외반경 $r_b=2a$ 의 경우에 계산된 결과가 등분수 $N=160$ 개와 800개에 대해 각각 나타나 있다. 이 경우 정답은 $\sigma_r = \frac{p}{3} [1 - 4(\frac{a}{r})^2]$ 와 $\sigma_\theta = \frac{p}{3} [1 + 4(\frac{a}{r})^2]$ 이다. Fig. 4에서 보듯이 내경면 근방의 x 축상에서 σ_r 의 분포가 진동현상을 나타내고 있다. 이는 외경면 부근에서도 마찬가지로 나타났다. 그렇지만 경계면에서 떨어진 곳에서는 예를들어 $N=800, r/a > 1.01$ 에서 오차는 무시될 수 있었다. 경계면 $r/a=1$ 에서의 응력값은 진동현상이 없는 부분의 곡선의 기울기를 이용하여 얻을 수 있을 것으로 판단된다. 또한 경계면에서 떨어진 곳에서 수치해의 수렴도를 조사함으로써 경계면의 등분수에 따른 오차를 판단할 수 있다. 예를들어 $r/a=1.1$ 에서 판단하면 $N=160$ 일때 오차는 1.19%이고 $N=800$ 일때 오차는 0.24%이었다. 계산요소는 동일한 N 의 앞문제에 비해 대략 2배이고 또한 이는 등분수에 비례해서 증가한다. 여기서도 각 구간점에 분포된 전위가 각 구간의 중간점에 분포시킨 경우보다 더 나은 결과를 가져왔다.

3.3. 일축인장을 받는 무한평판에 원형구멍이 있는 경우

이 문제는 부하형태와 응력분포가 x, y 축에 대해 대

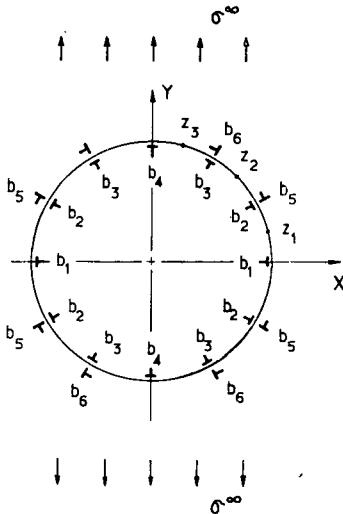


Fig. 5 A dislocation model ($N=3$) for a hole in an infinite plate under tension. The magnitudes of Burgers vectors are b 's and the boundary tractions are calculated at z 's

칭이므로 Fig. 5의 반경 a 의 원형경계상에 분포된대로 전위분포도 대칭이 된다. 따라서 1상한에 있는 경계면상의 전위벡터를 (b_x, b_y) 로 표시하면 이에 대응되는 2, 3, 4 상한에서의 벡터는 각각 $(b_x, -b_y), (-b_x, -b_y), (-b_x, b_y)$ 가 된다. 또한 앞의 문제와는 달리 경계면에 평행 수직인 벡터의 두 종류 전위가 존재하는 일반적인 경우에 해당된다. 계산절차는 기본적으로 앞의 문제와 같은 방식으로 수행될 수 있다. 먼저 1상한의 경계면을 N 등분 나누고 한 구간의 등분각을 $\Delta\theta = \pi/2N$ 라고 하면 j 번째 등분자리는 x 축과 각 $\theta = (j-1)\Delta\theta$ 를 이루므로 $z_{0j} = a \cos\theta + i a \sin\theta$ 가 된다. 이 점에 위치하고 경계면에 평행하는 벡터의 크기를 b_j 로 표시하면 그 벡터는 $(b_x, b_y) = (-b_j \sin\theta, b_j \cos\theta)$ 가 된다. 마찬가지로 여기서 경계면에 수직하는 벡터는 $(b_x, b_y) = (b_j \sin\theta, b_j \cos\theta)$ 가 된다. 이들에 대응하는 다른 상한에서의 벡터는 위에서의 관계를 이용하여 얻는다. 예로 z_{0j} 에 대응하여 \bar{z}_{0j} 에 위치하고 경계면에 평행하는 벡터는 $(b_x, b_y) = (b_j \sin\theta, b_j \cos\theta)$ 가 된다. 결과적으로 미지수 $(b_1, b_2, \dots, b_{2N})$ 는 모두 $2N$ 개이다. 이들 전위에 의한 응력은 각 전위간의 중간지점에서 계산되었다. 예로 k 번째 계산지점은 $z_k = (z_{0k} + z_{0k+1})/2$ 가 된다. 점 z_k 에서 경계응력 $\sigma_r(z_k), \tau_{r\theta}(z_k)$ 는 실제 경계면에서 경계응력(traction vector)이 없으므로 모두 영이 된다. 무한연속평판에 가해진 인장응력 $\sigma_r^\infty = \sigma^\infty$ 에 의한 점 z_k 에서 응력은 이 점이 x 축과 각 $\theta = (k-0.5)\Delta\theta$ 를 이루므로 좌표변환에 의해 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_r^\infty(z_k) &= \frac{1}{2} \sigma^\infty (1 - \cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta}^\infty(z_k) &= \frac{1}{2} \sigma^\infty \sin 2\theta \end{aligned} \quad (14)$$

평형관계식 (6)을 행렬식으로 표시하면

$$A_{kj} B_j = C_k \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} [B]^T &= [b_1, b_2, \dots, b_N, b_{N+1}, \dots, b_{2N}] \\ [C]^T &= [-\sigma_r^\infty(z_1), \dots, -\sigma_r^\infty(z_N), -\tau_{r\theta}^\infty(z_1), \dots, \\ &\quad -\tau_{r\theta}^\infty(z_N)] \end{aligned} \quad (16)$$

나머지항 A_{kj} 는 $(z_{0j}, -\bar{z}_{0j}, -z_{0j}, \bar{z}_{0j})$ 에 위치하는 단위벡터 전위에 의한 z_k 점에서 응력의 합이 된다. 따라서 $j \leq N$ 일 경우에 대해 $k \leq N$ 일때

$$\begin{aligned} A_{kj} &= \sigma_r(z_k, z_{0j}) + \sigma_r(z_k, -\bar{z}_{0j}) + \sigma_r(z_k, \bar{z}_{0j}) \\ &\quad + \sigma_r(z_k, \bar{z}_{0j}) \end{aligned} \quad (17-1)$$

각 항은 앞절에서 설명한대로 z_{0j} 에서 경계면에 평행한 단위벡터의 전위와 그에 대응되는 단위벡터의 전위들에 의한 z_k 점에서의 반경방향응력을 표시한다. 이와 유사하게 $j \leq N$ 이고 $k > N$ 일 때 식 (16)의 $[C]^T$ 에서

와 같이 예를들어 $z_{N+2} \equiv z_2$ 로 표시하면 각 항은 다음과 같다.

$$A_{kj} = \tau_{r\theta}(z_k, z_{0j}) + \tau_{r\theta}(z_k, -\bar{z}_{0j}) + \tau_{r\theta}(z_k, -z_{0j}) + \tau_{r\theta}(z_k, \bar{z}_{0j}) \quad (17-2)$$

또한 $j > N$ 일때는 z_{0j} 에 위치하고 경계면에 수직하는 벡타의 전위에 의한 성분이므로 식 (17)에서 $\sigma_r \rightarrow \sigma'_r, \tau_{r\theta} \rightarrow \tau'_{r\theta}$ 가 된다. 1상한에 대해 N 등분 구간점 $2N$ 개의 전위를 분포시킬 때 x 축상의 점 즉 z_{01} 에서 경계면에 수직한 벡타의 전위 b_{N+1} 는 x 축 대칭으로 존재할 수 없다. 따라서 이에 대신하여 y 축상의 경계면에 평행하는 벡타의 전위를 택해야 한다. 이와같이 전위가 x, y 축상에 있을때는 식 (17)에 예를들면 다음과 같이 된다.

$$A_{k1} = \sigma_r(z_k, z_{01}) + \sigma_r(z_k, -z_{01})$$

이상에서 세운 방정식을 Gauss 소거법을 이용하여 풀어 $2N$ 개의 전위벡타를 결정하고 이를 식 (7)에 대입하여 영역내의 점에서 응력을 구할 수 있다.

$N=50$ 과 60 일때 경계면 근방의 x 축상에서 σ_y 의 분포가 Fig. 6에 주어져 있다. 이때 정답은

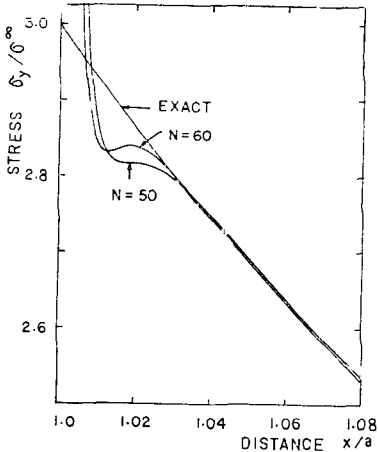


Fig. 6 For a hole in an infinite plate under tension, the stress distribution σ_y on the x -axis near the hole surface is compared between a dislocation model and exact solution

$$\sigma_x = \frac{3}{2} \sigma^\infty \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \sigma^\infty \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right)$$

경계면 근방($N=60$ 일 때 $r/a < 1.03$)에서 수치해의 진동현상이 이 경우에도 나타났다. 따라서 이 구간에서는 앞에서 언급된 방법(extrapolation method)에 의해 응력값을 결정해야 할 것이다. 진동부분이 없는 구간($r/a > 1.03$)에서 수치해는 정답과 0.25%이하의 오차를 보

였다. 또한 앞서와 같이 전위를 구간점에 분포시키는 것이 오차를 줄이는 관점에서 필요하다. 이 문제에서는 이 1상한 내의 모든 전위의 벡타크기가 서로 같지 않으므로 이들에 대한 $2N$ 개의 선형대수방정식을 푸는데 대부분의 계산시간이 소모된다. 따라서 계산시간은 대략 전위수의 제곱에 비례한다. $N=60$ 일때 계산시간은 326초였다. 얻어진 해를 Zienkiewicz et al⁽¹¹⁾의 유한요소 계산결과와 비교할 수 있다. 원공주위의 전체 영역을 232개의 절점(변위에 대한 방정식 수는 461개)를 가진 유한요소법으로 계산하였으나 등방성 재료에 대해서는 대칭성으로 1/4영역만 취할 수 있으므로 방정식 수는 대략 115개에 해당된다. 이는 전위모델($N=60$)에서 방정식 수 120개와 비슷하다. 유한요소 계산에 의해 원공주위에서 얻어진 최대응력값은 $r/a = 1.11$ 에서 $\sigma_y/\sigma_\infty = 2.68$ 이고 이는 정답과 약 10%의 오차가 있다. 따라서 이 문제에 대해서는 전위분포에 의한 방법이 유한요소법에 비해 계산능률면에서 우수하다고 판단된다.

3.4. 인장을 받는 V-노치 시편

계산에 사용된 대칭의 V-노치 시편 모양이 Fig. 7에 주어져 있다. 계산순서는 먼저 인장을 받는 무한평판 위에 그려진 시편의 경계를 따라 전위를 분포시키되

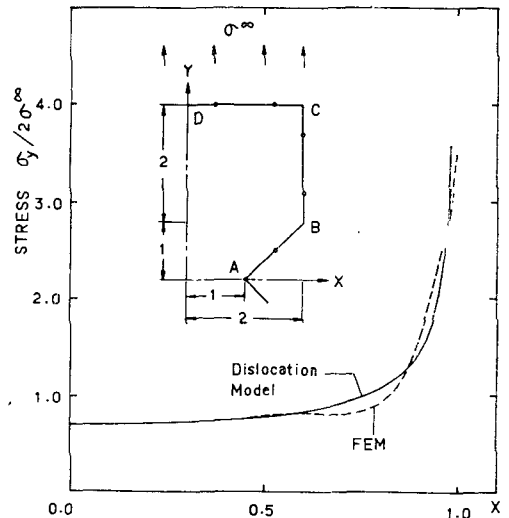


Fig. 7 A dislocation model ($N=6$) for a V-notched specimen under tension. The dark circles on the boundary are dislocation positions. The stress distribution on the x -axis is compared between a dislocation model ($N=60$) and a FEM solution with quadrilateral parabolic elements and 176 degree-of-freedom

부하방법과 경계모양이 x, y 축에 대칭이므로 응력분포도 대칭이 될 것이므로 앞서와 같이 전위분포도 대칭이 된다. 따라서 1상한 내의 경계면에 대해 고려하면 A 점이 응력의 특이점이고 대칭의 x 축상에 놓여 있으므로 y 방향 벡터를 가진 전위 한개만 이점에 위치시킨다. 그리고 AB 구간의 등분점에서 경계면에 평행 수직하는 두 종류의 전위벡터를 각각 분포시킨다. 구간 BC 에서 B 점은 실제로 무응력점이고 경계면에 평행 수직한 벡타가 정의되지 않으므로 이 점에 전위를 위치시키지 않는다. 따라서 구간 BC 에서는 각 등분의 중간점에 두 종류의 전위를 분포시킨다. 이는 구간 CD 에 대해서도 마찬가지다. 이와같이 A 점을 제외한 경계면상의 점에 경계면에 평행 및 수직한 두개의 전위벡터 존재는 다음과 같이 생각될 수 있다. 먼저 인장부하(σ^{∞})에 의한 경계면 AB 에 수직 및 전단응력이 영이 아니므로 전위분포가 이들을 상쇄시켜 자유경계면이 되게하려면 두 벡타가 공존해야 한다. 또한 이들 벡타의 전위로 인해 BC 면에 전단 및 수직응력이 생기므로 이들을 상쇄시키기 위한 두 벡타의 전위가 존재해야 한다. 구간 CD 에 대해서도 마찬가지 방식이다. 응력계산점 z_k 는 이웃하는 두 전위간의 중간점이 된다. 이때 B 점과 C 점은 실제 위치로부터 약간 이동하게 되나 구간 등분수가 많은 경우 이것으로 인한 차이는 무시될 수 있다. 평형방정식 (6)에서 경계응력항은 구간 AB 에서 경계면에 수직선이 x 축과 $\theta = -45^\circ$ 를 이루므로 이를 식 (14)에 대입하여 $\sigma_{n,n}(z_k)$ 와 $\tau_{n,t}(z_k)$ 를 결정할 수 있다. 구간 CD 에서 $\sigma_{n,n}(z_k) = \sigma^{\infty}$ 이고 $\sigma_{t,t}(z_k) = \sigma^{\infty}$ 이다. 이밖의 경계응력성분은 모두 영이 된다. 이로써 식 (15)의 $[C]$ 를 결정하면 $[A]$ 항은 앞에서 설명된 인장을 받는 원공의 경우와 같은 방식이 된다. 다만 D 점에서 전위에 의한 전단응력이 대칭에 의해 모두 영이 되므로 이에 대한 방정식은 존재할 수 없다. 따라서 1상한의 경계면을 N 등분하면 전체 미지수는 $2N-1$ 개가 되고 방정식도 마찬가지 갯수가 된다.

실제 계산시간은 각 구간을 20 등분하였고 결정해야 할 벡타의 크기는 119 개이며 계산시간은 약 5 분이었다. x 축상에서 σ 의 분포에 대해 전위모델에 의한 계산결과와 유한요소법(Zienkiewicz, dof^{*}=176)에 의한 결과⁽¹²⁾가 그림 7에 비교되어 있다. 여기서 두 해가 비교적 좋은 일치를 보여주고 있으나 계산절차시간면에서 전위모델에 의한 방법이 유한요소법보다 경제적인을 쉽게 판단할 수 있다. 유한요소망을 작성하고 그 절점의 좌표를 입력시켜야 하나 여기서는 등분된 경계면

의 좌표만 입력된다. 따라서 유사한 문제를 푸는데 편리하다. 예를들면 이 경우와 유사한 원형노치의 경우나 임의의 노치각에 대해 등분된 노치면의 좌표와 각을 다시 읽어주면 프로그램의 수정없이 유사한 문제를 풀 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서 평면탄성응력해석을 위한 전위모델의 이용이 제안되어 네가지 예를 통해 얻은 수치해의 특성과 계산능률이 검토되었다. 이 방법은 경계응력과 평형을 이루는 전위분포를 얻고 개별적인 전위에 의한 응력의 중첩을 통해 해를 구하는 것이다. 이렇게 얻은 해는 기본적으로 식 (4)의 중첩에 의해 얻은 결과이고 식 (4)가 전위자리를 제외한 전체영역에서 완전한 해이므로, 우리는 이 방법에 의한 수치적 해석이 응력에 대한 평형조건과 기하학적 적합관계가 전체영역에서 만족되는 완전한 해가 됨을 기대할 수 있다. 단지 실제에서의 연속적인 경계응력분포를 절편적인 분포로 대체하면서 발생하는 오차(discretization error)가 있으나 경계면에서 멀어질수록 이는 무시될 수 있었다. 또한 응력의 특이점을 포함하지 않는 문제의 경계면 근방에서 얻어진 수치해는 진동현상을 보이고 있으나 이러한 현상은 대체로 경계면에 아주 근접한 부분에 국한되어 있으므로 진동현상이 나타나지 않는 부분의 곡선기술기를 이용한 단순 연장선이 경계면에서 대단히 정확한 해답을 제공할 수 있다(extrapolation method). 유한요소법과 비교해서 이 방법의 장점은 먼저 평형방정식이 전체 영역내의 점에 대해서가 아니고 경계면상의 점에 관해 세워짐으로써 방정식의 수를 줄일 수 있다. 따라서 계산기 입력자료가 훨씬 간단해진다. 계산능률은 전위분포에 의한 방법이 더 나을 것으로 판단되나 이 방법이 일반적인 평가를 위해 더 많은 시험이 필요한 것으로 생각된다. 이 방법의 직접적인 확장으로서 탄성학의 제 2경계치 문제를 들 수 있다. 이는 응력에 대한 식 (1)을 사용하는 대신 식 (2)의 변위에 대한 식을 사용하고 경계면에서 주어진 변위값을 만족시키도록하는 적합관계식을 식 (6) 대신에 사용함으로써 얻어질 수 있을 것이다.

References

- (1) B.A. Bilby, A.H. Cottrell and K.H. Swinden, Proc. Roy. Soc. London A272, 304, 1963

- (2) A.H. Cottrell, Proc. Roy. Soc. A., 285, 10, 1965
- (3) V. Vitek, Int. J. Fracture 13, 481, 1977
- (4) J.T. Evans, J. Mech. Phys. Solids, 27, 73, 1979
- (5) K. Fujino, H. Sekine and H. Abe, Int. J. Fracture, 25, 81, 1984
- (6) L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Theory of Elasticity (2nd ed.), Pergamon Press, Oxford, Chap. IV, 1970
- (7) F. Erdogan and G.D. Gupta, Quarterly of Applied Mathematics, 32, 525, 1972
- (8) K.K. Lo, Int. J. Fracture, 15, 583, 1979
- (9) V. Vitek, J. Mech. Phys. Solids 24, 263, 1975
- (10) N.I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Moscow, 1966 (English translation by J.R.M. Radok, Noordhoff, Leyden, 1975)
- (11) O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung and K.G. Stagg, J. Strain Analysis, 2, 172, 1966
- (12) O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method (3rd ed.) McGraw-Hill, UK, 473, 1977