—□ 技 術 動 向 □—

LQR과 LQG의 安定强度 特性

宋 澤 烈
(大田機械廠)

■ 차 례 ■

1 서 론

선형 2차 가우시안 (Linear Quadratic Gaussian; LQG) 의 원리는 비행조종장치와 같은 다변수 제어 시스템의 설계에 이용되거나 [1), 10)], Self Tuning Regulator (STR) 를 이용한 적응제어 [2)] 의 분야에 응용되어지는등 이를 활용하는 연구가 활발하게 진행되는 추세이다. LQG의 매력중의 하나는 이득및 위상여유가 보증된 선형 2차 레귤레이터 (Linear Quadratic Regulator ; LQR)의 특성을 회로전달함수 회복 (Loop Transfer Recovery; LTR) 기법으로 재생시킬 수 있는데 있다고 보아진다. 미국에서도 주파수 기법이나 根궤적을 이용하여 설계하는 실무진과 LQG를 주장하는 학계와의 논란이 계속되는 과도기의 상태인 것 처럼 보인다. 이 기술자료는 Singular Value (SV) 를 이용하여 LQR의 이득 및 위상여유의 성질을 살펴보고 LQG의 응용을 위한 LTR기법을 소개하고자 한다.

2 SV의 정의와 성질

이 장에서는 앞으로의 전개에 필요한 SV의 정의 및 그 특성들을 간단히 소개한다.

정의 1 ; $A \in C^{n \times m}$ 의 SV는 k개의 ($k = \min(m, n)$) 음이 아닌 $A^H A$의 고유치의 제곱근을 뜻하며 $\sigma_i(A)$ 로 표시한다. 여기서 A^H는 A의 공액복소수 전치행렬 (Complex Conjugate Transpose) 이다. 즉,

$$\sigma_i(A) = \lambda_i^{1/2}(A^H A), \quad i = 1, 2, \cdots, k \cdot$$

위의 k개의 SV중 최대치와 최소치를 아래와 같이 표시한다.

$$\bar{\sigma}(A) = \max_i \{ \sigma_i(A) \}$$
$$\underline{\sigma}(A) = \min_i \{ \sigma_i(A) \}$$

여기서 $\underline{\sigma}(A)$ 는 A가 정방행렬이라면 얼마만치 A가 Singular (det (A) = 0 또는 $\underline{\sigma}(A) = 0$) 에 가까이 있음을 나타내는 정도임을 알 수 있다.

정의 2 ; $(A+E) \in C^{n \times m}$, $(m \leq n)$ 이 $\| x \| = 1$ 인 벡타 x에 대해 $(A+E)x = 0$ 이면 (A+E) 가 랭크결함 (rank deficiency) 가 있다고 한다. (만약 A+E가 정방행렬이면 랭크결함은 singularity를 나타낸다)

따라서 랭크결함이 없는 행렬A에 대해 A+E가 랭크결함이 안될 충분조건은

$$\underline{\sigma}(A) > \bar{\sigma}(E) \qquad (1)$$

임을 보일 수 있다. 또한 SV는 아래와 같은 성질을 가진다.

$$\bar{\sigma}(A) = 1 / \underline{\sigma}(A^{-1}) \qquad (2)$$
$$\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\, \bar{\sigma}(B) \qquad (3)$$
$$\bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \qquad (4)$$
$$\underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(A+B) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \qquad (5)$$

3 보증된 LQR의 이득 및 위상여유

선형 시불변 시스템의 방정식이 아래와 같이 주어지고

$\dot{x} = Ax + Bu$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$

제어함수 u는 아래와 같은 적분치를 최소화 하도록 궤환제어 시스템을 얻는 방식을 LQR이라 한다.

$$J = \int_0^\infty x^T C^T C x + \rho u^T u \, dt, \quad C^T C \in \mathbf{R}^{n \times m},$$

상수 $\rho > 0$

최적제어 u는

$$u = -1/\rho B^T K x \triangleq -K_C x$$

이고 K_C는 제어이득이고 $K \in \mathbf{R}^{n \times n}$은 리카티 대수방정식 (Algebraic Riccati Equation ; ARE)

$$-A^T K - KA + 1/\rho KBB^T K = C^T C \qquad (6)$$

에서 주어진다. 만약에 (A, B)가 제어 가능(Controllable)하고 (A, C)가 관측가능(Observable)하면 설계된 궤환 시스템은 항상 점근적으로 안정 (Asymptotically stable)함을 보일 수 있다.[3] 설계된 궤환 시스템을 그림 1로 나타낼 수 있다.

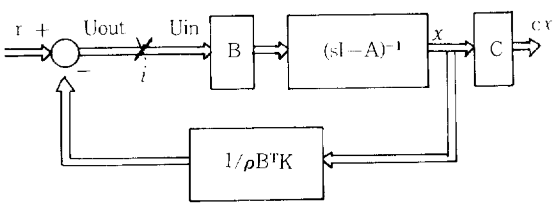

그림 1. LQR로 설계된 궤환시스템

LQR의 설계여유를 얻기위해 식(6)에 주어진 ARE를 변형시켜 그림 1에서 주어진 전달행렬(transfer matrix)의 식으로 나타내 보자. 먼저 식(6)의 좌변에 $-sK + sK$를 더하고 식(6)의 양변에 $B^T(-sI - A^T)^{-1}$와 $(sI - A)^{-1}B$를 앞과 뒤에 각각 곱한뒤 ρI를 양변에 더해주면

$$\rho [I + G_R(-s)]^T [I + G_R(s)] = \rho I + G^T(-s) G(s) \qquad (7)$$

를 구할 수 있다. 여기서 $G(s) \triangleq C(sI - A)^{-1}B$, $G_R(s) \triangleq K_C(sI - A)^{-1}B$로 $G(s)$는 프랜트의 전달행렬이며 $G_R(s)$는 그림 1의 開회로의 전달행렬임을 알 수 있다. s가 허수축상을 움직일때 식(7)의 양변의 SV를 구해보면

$$\sigma_i(I + G_R(s)) = (1 + 1/\rho \, \sigma_i^2(G(s)))^{1/2} \quad (8)$$

이 되어

$$\underline{\sigma}(I + G_R(s)) \geq 1 \qquad (9)$$

이 됨을 알 수 있고 이는 단일입출력 시스템의 경우[4]에서 구해진 LQR의 Circle Criteria의 일반화라 할 수 있다.

실제로 시스템을 설계하는데 있어 구동장치의 높은 주파수 부분을 모델링에서 제외하는등 모델링에서 고려되지않는 부분이 있다. 이러한 모델링의 오차를 그림 2와 같이 나타낼 수 있다.

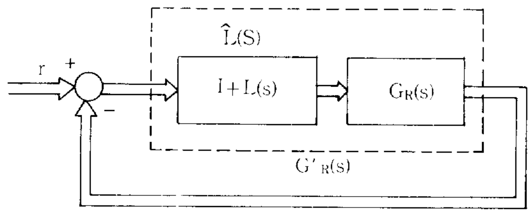

그림 2. 모델링의 오차를 고려한 그림 1의 변형

그림 2의 고려치 않은 오차는 다음의 간단한 예제와 같이 얻을 수 있다.

<u>예제 1)</u>) $G_R(s) = K_C \Phi B$, $(\Phi \triangleq (sI - A)^{-1})$에서 $\triangle A$의 파라메터 오차가 존재할 때 $G'_R(s) = K_C(\Phi^{-1} - \triangle A)^{-1}B$로서 $L(s)$를 구하는게 목적이다. 행렬의 역정리 (matrix inversion lemma)를 이용하여 $G'_R(s) = G_R(s)(I + L(s))$로 나타내면 $L(s) = G_R^{-1}(s) K_C \triangle A (I - \Phi \triangle A)^{-1} \Phi B$임을 알 수 있다.

이야기의 전개에 필요한 다음 정리를 참고문헌 5)에서 인용한다.

<u>정리 1</u>; $G'_R(s) = K_C(sI - A)^{-1}B(I + L(s))$에서 만약

a) 모델링의 오차를 고려치 않은 시스템과 고려한 시스템은 같은 수의 Right Half Plane(RHP) 開회로 根을 가지며

b) 허수축상의 $\det(sI - A) = 0$의 根은 모델링 오차가 있더라도 변치않으며

c) $\det(I + G_R(s)) = 0$의 根은 Left Half Plane (LHP) 상에만 존재하고

d) s가 그림 3의 D_R의 Contour 상을 움직일때 $\det(I + G'_R(s)) \neq 0$

이면 $\det(I + G'_R(s)) = 0$의 根은 RHP에 존재하지 않는다. (閉회로는 안정하다)

조건c)는 LQR에서 (A, B)가 제어가능하고 (A, C)가 관측가능 하다면 항상 만족되고 a)와 b)는 그다지 큰 제약이 되질 않는다. 여기서 조건 d)는 $\det(I + G_R(s)\hat{L}(s)) \neq 0$ $(\hat{L}(s) \triangleq I + L(s))$을 나타내고 $I + G_R L$을 다르게 표현하면 (독립변수 s를 생략)

$$I + G_R L = [(\hat{L} - I)(I + G_R)^{-1} + I](I + G_R)\hat{L} \quad (10)$$

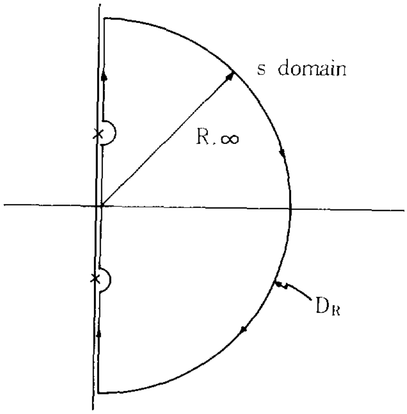

그림 3. D_R 의 정의

으로 나타낼 수 있다. $\hat{L}$ 과 G_R 은 정방행렬로서 역이 존재한다고 가정하면 식(10)에서 $(I+G_R)\hat{L}$ 은 singular 가 아니므로 $I+G_R\hat{L}$ 이 singular가 되지않을 필요충분조건은 $(\hat{L}-I)(I+G_R)^{-1}+I$ 가 singular 가 아니면 된다. 즉 식(1)을 이용하여

$$\bar{\sigma}((\hat{L}-I)(I+G_R)^{-1}) < \underline{\sigma}(I) = 1 \quad (11)$$

이면 조건 d) 가 성립한다. (11)식의 좌변에 (3)식을 이용하여 좀 보수적인 관계식을 구하자

$$\bar{\sigma}(\hat{L}-I)\,\bar{\delta}((I+G_R)^{-1}) < 1 \quad (12)$$

여기서 유의할 점은 식(12)→식(11), 식(11)⇏식(12). 식(12)은 (2)식을 이용하여

$$\bar{\sigma}(\hat{L}-I) < \underline{\sigma}(I+G_R) \quad (13)$$

로 표시할 수 있으며 한번 더 보수적인 관계식을 식(9)을 이용하여 얻으면

$$\bar{\sigma}(\hat{L}-I) < 1 \leq \underline{\sigma}(I+G_R) \quad (14)$$

이 된다. 식(14)이 뜻하는 바는 만약 모델링의 오차가 식(14)을 만족하면 정리 1의 조건 a) 와 b)를 만족하는 LQR로 설계된 궤환시스템은 항상 안정함

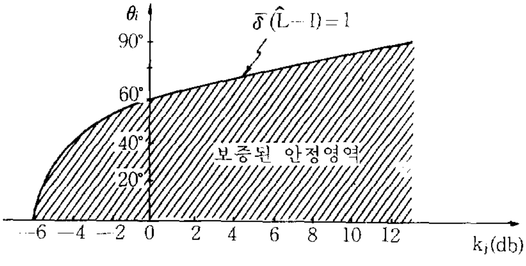

그림 4. 모델링 오차에 의한 LQR의 안정영역

을 나타낸다. 여기서 모델링 오차의 상호간섭(coupling)을 고려치 않고 즉,
$\hat{L} = \mathrm{diag}(k_1 e^{j\theta 1}, k_2 e^{j\theta 2}, \cdots, k_m e^{j\theta m})$, $k_i > 0$, 이라 두면[6)]

$$\bar{\sigma}(L^{-1}-I) = \max_i \{(1-1/k_i)^2 + 2/k_i (1-\cos\theta_i)\}^{1/2} \quad (15)$$

이 되며 식(14)의 $\bar{\sigma}(\hat{L}-I) < 1$ 의 영역을 k_i 와 θ_i 를 동시에 변화시켜 나타내 보면 그림 4의 빗금친 부분과 같다.

참고문헌 5)에서 LQR은 −6∼∞db의 이득여유와 ±60°의 위상여유를 갖는다 했으나 이는 k_i와 θ_i 를 동시에 변화시키지 않고 $\hat{L}$ 을 순전히 k_i 들이나 $e^{j\theta_i}$ 들로 고려했을 때의 결과임을 알 수 있다. 만약 $\hat{L}$ 의 위상변화가 40°이라면 그림 4에 의해 LQR은 −4∼∞db의 이득여유를 가짐으로 참고문헌 5)에서 보다 낙관적이 아님을 알 수 있다.

다음 장으로 넘어가기 전에 LQR의 안정강도(Robustness)를 증가시키는 방안을 고려해 보자. 여기서 그림 1의 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 가 최소위상 시스템이며 $\mathrm{rank}(C) \leq \mathrm{rank}(B)$라 가정하자. 그러면 참고문헌 7)에서 보인 바와 같이 식(6)의 K는

$$\lim_{\rho\to 0} K = 0 \text{ 또는 } \lim_{\rho\to 0} 1/\rho KBB^T K = C^T C \quad (16)$$

을 만족함을 알 수 있다. 식(6)에서 식(7)을 얻을 때와 비슷하게 전개하며 식(16)을 이용하면 $\rho \downarrow 0$ 일때

$$(I-2G_{CL}(-s))^T (I-2G_{CL}(s)) \leq I \quad (17)$$

을 얻는다. 여기서 $G_{CL}(s) = K_C(sI-A+BK_C)^{-1}B$ 이며 K_C 는 앞에서 정의된 제어이득을 나타낸다. 간편히 단일입출력 시스템에서 식(17)을 해석하여 보면 $G_{CL} = G_R/(1+G_R)$ 로 두면 식(17)을 만족하는 開회로 전달함수 G_R 의 Nyquist plot 은 G_R복소평면상의 1상한과 4상한에만 존재함을 알 수 있고 이는 $\rho \downarrow 0$ 일때 LQR은 Positivity의 특성을 갖는 Lyapunov 방정식을 이용하여 설계된 시스템과 마찬가지로 ∞db의 이득여유와 적어도 90° 이상의 위상여유를 가짐을 알 수 있다.

4 LTR을 갖춘 LQG

앞에서 본 바와 같이 LQR을 이용한 궤환제어는 모든 상태변수 x가 이용되어야 한다는 결점이 있다. LQG는 x를 그의 추정치 $\hat{x}$로 대치시켜 궤환제어에 이용하며 (Separation Principle) 그림 1의 시스템이 백색 가우시안 잡음들에 오염된 경우

$\hat{x}$을 정상상태 (steady state)의 칼만 필터로 얻는 방법을 뜻한다. 시스템의 방정식은

$$\dot{x}=Ax+Bu+w$$
$$y=Hx+v$$

이고 여기서 W는 프로세스 잡음으로 평균치가 0이고 $E\{w(t)w^T(\tau)\}=Q\delta(t-\tau)$, v는 측정잡음으로 평균치가 o이고

$E\{v(t)v^T(\tau)\}=V\sigma(t-\tau)$ 이며 operator E는 기대치를 뜻한다. 만약 (A, H) 가 관측가능하고 (A, $Q^{1/2}$) 가 제어가능하다면 x의 추정치 $\hat{x}$은

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+K_f(y-H\hat{x}) \tag{18}$$

에서 구해지며 $u=-K_C\hat{x}$ 이며 필터이득 K_f는 $K_f=PH^TV^{-1}$이고 P는 ARE

$$AP+PA^T+Q-PH^TV^{-1}HP=0 \tag{19}$$

에서 구해진다. 이상과 같은 전체 LQG를 그림으로 나타내면 그림 5와 같다.

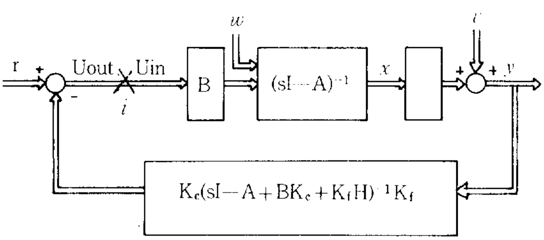

그림 5. LQG로 설계된 궤환시스템

그림 5의 r에 대한 x의 閉회로 전달행렬은 그림 1의 r에 대한 x의 閉회로 전달행렬과 같다.[8] 그러나 그림의 i점에서 회로를 분리시키면 그림 1의 i점에서 회로를 분리시켜서 얻은 U_{out} 의 U_{in}에 대한 開회로 전달행렬은 같지가 않다. 이 말은 LQG의 i점에 불확실성이나 외란이 존재한다면 LQG는 LQR의 안정강도를 가질 수 없음을 나타내고 LQR의 보증된 이득과 위상의 여유를 얻기위해 LQG의 U_{out} 의 U_{in}에 대한 開회로 전달행렬을 LQR의 그것과 같아지도록 하는 설계기법이 필요함을 나타낸다. 이것이 회로전달함수 회복 (LTR) 기법이다. 참고문헌 9) 에서 보인와 같이 식(19)의 ARE에 프로세스 잡음의 Power Spectral Density (PSD) Q를 대칭이며 陽인 Unitary 행렬 W를 이용하여

$$Q=Q_o+q^2BWB^T \tag{20}$$

라 두면 (여기서 Q_o은 실제 프로세스 잡음의 PSD이고 q^2BWB^T는 가상의 PSD) 식(16)이 유도된 참고문헌 7) 의 방법을 이용하면

$$\lim_{q\to\infty} q^2(P/q^2)H^TV^{-1}H(P/q^2)=BWB^T \tag{21}$$

임을 보일 수 있다. 식(21)을 얻는데 $H(sI-A)^{-1}B$가 최소위상 시스템이며 rank (H)≥rank (B)의 가정이 쓰여졌다.

$K_f=PH^TV^{-1}$ 이므로 식(21)을 이용하면

$$\lim_{q\to\infty} K_f=qBW^{1/2}V^{-1/2} \tag{22}$$

임을 얻는다. 식(22)의 K_f를 사용하면 그림 5의 U_o의 uin에 대한 전달행렬은

$$\lim_{q\to\infty}\{-K_C[sI-A+BK_C+K_fH]^{-1}K_f\}\{H(sI-A)^{-1}B\}=-K_C(sI-A)^{-1}B \tag{23}$$

따라서 q↑∞일때 LQG의 전달행렬이 점근적으로 LQR의 전달행렬로 회복되어짐을 알 수 있다.

5 결론 및 문제점

이상으로 LQG로 설계된 시스템이 LQR의 보증된 안정강도를 갖도록 K_f를 조정하는 한 LTR 기법을 살펴보았다. 식(20)에서 q가 0이라면 필터는 실제의 프로세스 잡음의 $Q=Q_o$라는 점에서 최적이다. 그러나 q의 값이 증가함에 따라 K_f는 증가되고 식(18)에서 보는 바와 같이 $\hat{x}$에 따라서 시스템의 동특성은 관측에 의해 수정되는 항보다 상대적으로 소홀히 취급되어진다. 따라서 출력 y에 포함되어 지지않는 x의 추정치 $\hat{x}$은 그 실제값과 차이가 많이 나타날 우려가 생긴다. 또한 관측잡음이 $\hat{x}$에 크게 영향을 미치므로 잡음을 배척하는 필터의 성질도 모호해질 우려가 있다. 그러나 안정강도의 관점에서는 크게 개선되어짐을 앞장에서 살펴보았다. 실제 설계에 있어서는 이 장점과 단점들을 잘 trade off 시키는 단계가 필요할 것이다. 또한 추정치 $\hat{x}$를 얻는데 정상상태의 칼만 필터를 이용하지 않고 극배치(Pole Placement)방법을 사용함도 고려할 수 있으며 이에 따른 LTR도 흥미있는 분야가 될 수 있을 것이다.

참고문헌

1) Speyer, J. L. et al ; "Mimo Controller Design for Longitudinal Decoupled Motion" AIAA G&C Conference Aug., 1983
2) Åström, K. J.; "Practical Aspects of Adaptive Control", IEEE CDC Workshop on Ada-

ptive Control Dec., 1983
3) Brockett, R. W.; Finite Dimensional Linear Systems, John Wiley & Sons 1970
4) Anderson, B. D. O. et al; Linear Optimal Control Prentice-Hall 1971
5) Lehtomaki, N. A. et al; "Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian based Multivariable Control Designs", IEEE Trans. on A. C. Vol. AC-26, No. 1 Feb., 1981
6) Mukhopadhyay, V. et al; "Application of Matrix Singular Value Properties for Evaluating Gain and Phase Margins of Multiloop Systems", AIAA G&C Conference Aug., 1982
7) Kwagernaak, H. et al; "The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters", IEEE Trans. on A. C. Vol AC-17, No. 1, Feb. 1972
8) Kailath, T.; Linear Systems, Prentice Hall 1980
9) Doyle, J. C. et al; "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical / Modern Synthesis", IEEE Trans. on A. C. Vol. AC-26, No. 1, Feb., 1981
10) Athans, M. et al; "Multivariable Control for the F-100 Engine Using the LQG/LTR Methodology", AIAA G&C Conference Aug., 1984

◆ 꼬 마 상 식 ◆

西獨은 Pebble-Bed形原子炉를 完成

西獨의 돌트몬트市近郊의 적은 마을인 Schmehausen에서는 発電開始를 위하여 原子爐建設이 最終段階에 들어갔다고 한다. 봉状燃料要素를 使用하고 있는 이 原子爐는 高温가스燈會社(HRB, 西獨 Manheim)에서 設計하고 建設한 것으로서 將來 発電用 原子爐의 主流를 이룰 것으로 내다 보고 있다.

페블-베드(pebble-Bed)形이라고 하는 이 原子爐는 固有의 安全性을 갖고 있는데 例을 들면 輕水冷却의 原子爐에서와 같이 事故時 爐心 熔融은 없다고 한다. 以外에 重要한 것으로서는 爐心에서 950℃의 熱에너지를 取出하기 때문에 石炭의 가스化등 化學프로세스에 利用될 수 있어 이 爐의 開発은 큰 意義가 있다고 한다.

한편 Juelich 原子力研究센서에서는 이미 研究를 進行하고 있으며 15MWe의 實験爐가 1967年부터 運轉되고 있으며 이런 種類의 原子爐 概念을 開発한 HRB社는 Brown Boveri社가 55% 그리고 General Atomic Technology社(California州 San Diego)가 45%을 出資해서 設立한 會社이라고 한다.

그런데 Schmehausen 原子爐는 THTR(thorium high-temperature reactor)-300이라고 부르며 電氣出力 300MWe, 93% 濃縮우라늄과 토리움을 燃料로 使用하고 있다. ^{233}Th는 原子爐中에서 ^{233}U로 變換되기 때문에 燃料의 增殖을 行할 수 있으며 봉状의 燃料要素는 Nukem 社(西獨 Hanau)에서 製造되고 있는데 直徑 6㎝의 黒鉛의 봉中에 炭素로서 被覆된 機燃料粒子가 30,000 個 収納되고 있다. 그런데 原子爐의 爐心은 봉状燃料要素를 675,000 個 쌓아서 페블베드状으로 構成하고 있다고 한다.

한편 HRB社의 E. Baust 氏에 의하면 이런 種類의 爐心은 熱容量이 크고 事故時에도 爐心의 温度上昇이 적으며 또한 爐心을 構成하는 黒鉛은 耐熱性이 良好하여 3,650℃까지 損傷을 받지 않는다고 한다.

그리고 西獨의 16個電力會社는 共同으로 HRB 社에 대해서 原子燈의 概念設計와 經濟性 評價를 発注하였는데 이 作業은 現在 終了하여 다음 3年에 걸쳐 細密한 設計에 들어갈 豫定이라고 한다. Baust氏는 또한 爐의 經濟性이 1,200 MWe의 輕水形原子爐와 같아서 90年代에는 運轉開始를 展望할 수 있다고 말하고 있다.