

Prewarping法을 이용한 SCF의 주파수 歪曲 補償에 관한 研究

(A Study on Compensation of Frequency Distortion of SCF by Using Prewarping Procedure)

崔 珉 鎬*, 金 道 鉉**

(Min Ho Choi and Do Hyun Kim)

要 約

本 論文에서는 먼저 Sensitivity가 가장 낮은 LC Ladder 필터로 부터 FDNR (frequency dependent negative resistor) 방식을 이용하여 5 차 Butterworth 저역 통과 능동 RC 필터를 設計하였으며 능동 RC 필터를 SCF (switched capacitor filter)로 變換하는 과정에서 Bilinear Z變換을 이용하였다.

Bilinear Z 變換으로 설계된 SCF에서 aliasing 현상은 피할수 있으나 周波數 歪曲이 發生한다.

아나로그 필터를 디지털 필터로 變換하면 이러한 영향으로 遮斷 周波數 영역이 일치하지 않으므로 이것을 적게 하기 위하여 Prewarping을 해준다.

그 결과 Prewarping된 SCF는 Bilinear Z 變換된 SCF보다 周波數 歪曲이 현저하게 개선됨을 확인하였다.

Abstract

In this paper five-order Butterworth Low pass active RC filter is designed by using FDNR (Frequency Dependent Negative Resistor) Method from LC ladder filter having the lowest sensitivity.

In process of Transformation to SCF (Switched Capacitor Filter) from active RC filter, Bilinear Z Transformation method is utilized. By the design of SCF using the bilinear Z transform method the problem of aliasing can be avoided, but the frequency distortion is generated. The transformation from analog filter to digital filter is not equal in the region of the cut off frequency caused by this effect. Avoiding the problem of this effect, we use prewarping method.

The result shows that the prewarped SCF makes more remarkable improvement in the frequency distortion than SCF which is transformed by using bilinear Z transform.

I. 序 論

*正會員, 明知大學校 電子工學科

(Dept. of Electronics Eng., Myung Ji Univ.)

**正會員, 國民大學校 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., Kook Min Univ.)

接受日字: 1985年 2月 11日

필터를 構現하는데 있어서 IC화 하려는 경향이 있는데 이를 실행하려면 抵抗값이 커진다. 이로 인하여 실리곤 면적을 크게 차지하고 線形特性이 불량해지는 등의 問題가 대두 되었다.

그러한 관계로 1960年代 末부터 1970年代初에 이르기까지 抵抗을 커패시터로 代置하려는 研究가 進行되어서 抵抗을 캐패시터로 代置 가능하게 되었다.¹¹⁾

그 후 1970年代 후반에 스위치 (switch)와 커패시터 (capacitor)의 조합으로 抵抗을 실현할 수 있음이 실험적으로 고찰된 후 電荷量의 전달을 이용한 회로 해석으로 스위치드 커패시터 (SC : switched capacitor)가 回路網내에서 하나의 회로소자로서의 역할이 가능함이 밝혀졌으며 모노리딕 (monolithic) 집적화에 적합한 能動 RC필터에 의한 能動 스위치드 커패시터 필터 (SCF : switched capacitor filter)의 실현이 가능해졌다.¹²⁾

本 論文에서는 5차 아나로그 受動 필터를 가지고 FDNR¹⁴⁾ 방식을 이용하여 能動 RC 필터를 Bilinear Z 變換을^{13,6,7)} 이용하여서 5차 butterworth SCF를 설계 하였다. 그리고 Bilinear Z 變換에 의하여 생긴 周波數 歪曲을 줄이기 위하여 Prewarping을 하였으며 그때의 特性을 能動 RC 필터와 비교 고찰하여 보았다.

II. 5차 Butterworth 저역 통과 能動 RC 필터의 構成

高次 필터에 대해 passive doubly terminated RLC ladder 필터는 매우 낮은 sensitivity를 얻을 수 있고 電力 傳達이 Source와 load사이에서 정합될 때 sensitivity가 "0"이 된다는 것은 최신 필터 理論에서 증명된다.¹⁵⁾

낮은 sensitivity와 최대 電力 傳達은 能動 ladder 필터에서도 유지할 수 있으며 그것은 FDNR (frequency dependent negative resistor) 방식을 이용하여 能動 RC 필터를 설계한 다음 Bilinear Z 變換을 이용하여 抵抗을 스위치와 커패시터로 代치하여 能動 SCF를 實現할 수 있다.

먼저 5차 受動 (passive) RLC ladder 필터를 그림 1과 같이 구성하여 보자.

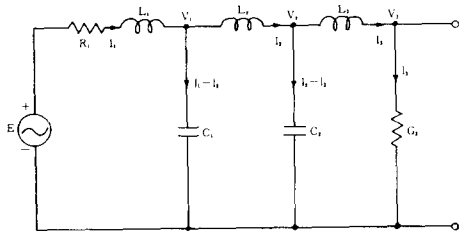


그림 1. 5차 Butterworth 수동 저역 통과 필터
Fig. 1. Five-order butterworth passive low pass filter.

그림 1의 回路로 부터 傳達函數 H(s)는

$$H(s) = \frac{V_3}{E} = \frac{1}{S^5 C_1 C_2 L_1 L_2 L_3 G_2 + S^4 (C_1 C_2 L_2 L_3 R_1 G_2 + C_1 C_2 L_1 L_2) + S^3 (C_1 L_2 C_2 R_1 + C_2 L_1 L_3 G_2 + C_2 L_2 L_3 G_2 + C_1 L_1 L_3 G_2 + C_1 L_1 L_2 G_2) + S^2 (C_1 L_2 R_1 G_2 + C_1 R_1 L_3 G_2 + C_2 R_1 L_3 G_2 + C_2 L_1 + C_2 L_2 + C_1 L_1) + S (C_1 R_1 + C_2 R_1 + L_1 G_2 + L_2 G_2 + L_3 G_2) + R_1 G_2 + 1} \quad (1)$$

이다.

그림 1에서 $R_1 = G_2 = 1(\Omega)$ 이라 하면 다음과 같은 각각의 素子값들을 구할 수 있다.

$$L_1 = 0.618[H], L_2 = 2[H], L_3 = 0.618[H]$$

$$C_1 = 1.618[F], C_2 = 1.618[F]$$

위의 소자값들을 식(1)에 대입하면 $\omega_c = 10^4$ rad/s로 normalize된 5차 maximally flat approximation의 전달함수 H(s)가 얻어진다.

$$H(s) = \frac{1}{S^5 + 3.236S^4 + 5.236S^3 + 5.236S^2 + 5.236S + 1} \quad (2)$$

受動 ladder network를 能動 ladder network로 變換하는 방식으로 FDNR를 이용한다.¹⁴⁾ FDNR 필터 회

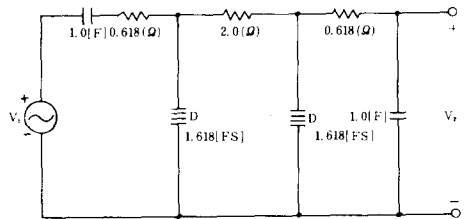


그림 2. 그림 1의 1/S 변환회로

Fig. 2. The 1/S transformation circuit from.

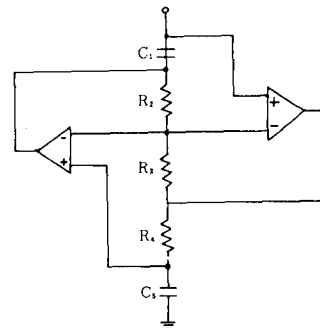


그림 3. FDNR 소자
Fig. 3. FDNR element.

路로 얻기 위해서는 그림 1의 素子들을 $\frac{1}{S}$ 變換하면 그림 2와 같은 FDNR로 변환된 회로를 얻을 수 있다.

그림 2에서 FDNR 소자 D를 만족하는 回路는 그림 3으로 주어지며 그림 2의 FDNR素子를 그림 3으로 대치하여 그림 4와 같은 Denormalize된 5차 Butterworth 저역 통과 필터를 구성할 수가 있다.

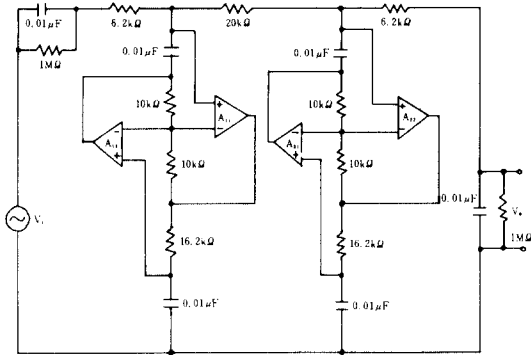


그림 4. Denormalize된 5차 butterworth 저역 통과 필터

Fig. 4. Denormalized five-order butterworth low pass filter.

III. Bilinear Z 變換할 때 周波數 歪曲^[6]

Bilinear Z 變換을 이용하면 안정한 아나로그 필터를 안정한 디지털 필터로 實現할 수 있으며 시스템은 S 平面的 LHF의 모든근이 Z 平面的 單位圓內에 존재하기 때문에 안정하다. 또한 S 平面的 허축은 Z 平面的 단위원으로 주어지므로 Bilinear Z 變換된 디지털信號는 bandlimit 되어서 aliasing¹⁾ 現象이 제거되지만 周波數 歪曲이 發生한다.

結論的으로 Bilinear Z 變換을 이용하여 디지털 필터를 設計하는데는 이 歪曲을 무시하거나 보상해줘야 한다.

周波數 歪曲 現象은 그림 5로 說明할 수 있으며 이러한 歪曲을 줄이기 위해서는 아나로그 信號에 prewarping²⁾ 을 해주므로서 가능하다.

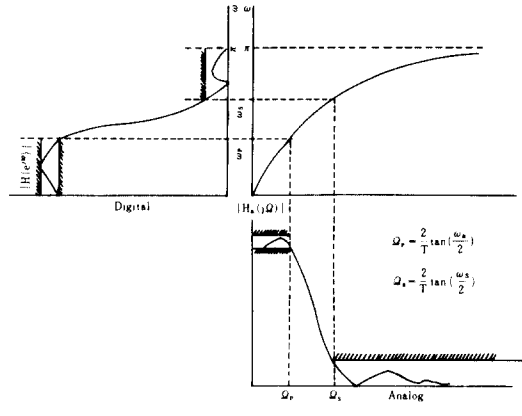


그림 5. 디지털 필터의 주파수 왜곡
Fig. 5. Frequency distortion of the digital filter.

IV. Prewarping에 의한 SCF 構成

Prewarping을 하는데는 傳達函數 자체를 prewarping 시키는 방법^[8]과 傳達函數의 pole과 zero를 개별적으로 prewarping 시키는 방법^[9]들이 있다.

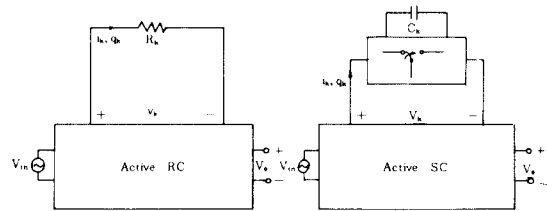


그림 6. 등가 필터 회로
(a) 능동 RC 필터 (b) 능동 SC 필터

Fig. 6. Equivalent filter circuit.
(a) Active RC filter. (b) Active SC filter.

本 論文에서는 傳達函數 자체를 prewarping 하기로 하자.

Bilinear Z 變換 관계를 살펴보면 그림 6 (a)로 부터 시간 t에 대하여 k번째 branch抵抗 R_k를 통과하는 총 전하량 g_k(t)는 다음과 같다.

$$g_k(t) = \int_{-\infty}^t i_k(t) dt = G_k \int_{-\infty}^t V_k(t) dt \quad (3)$$

여기서 $G_k = \frac{1}{R_k}$, $i_k(t)$ 는 R_k 에 흐르는 전류이며 V_k 는 R_k 양단에 걸리는 전압이다. 식(3)을 라플라스 變換하면

$$Q_k(s) = G_k \frac{1}{S} V_k(s) = \frac{G_k(s)}{S} V_k(s) \quad (4)$$

註 (1) Aliasing : 混成

(2) Prewarping : 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하는 경우 Bilinear Z 변환은 그림 5와 같이 $\tan(\omega/2)$ 의 곡선에 의하여 Mapping 된다. 이때 변환된 디지털 신호와 아날로그 신호의 차단주파수와 stopband 영역 주파수는 같지 않기 때문에 이러한 오차를 줄이기 위해 Bilinear Z 변환 과정에서 system 변수를 변형시키어 이 오차를 줄이는 法

이다.

電荷 g_k 와 branch 電壓 V_k 의 標本값 사이의 관계는 모든 스위치가 그림 6 (b)와 같이 동작하는 회로의 경우 다음과 같은 1계 차분 방정식으로 주어진다.

$$a_1 g_k(nT) + a_2 g_k(nT - T) = (C_k [b_1 V_k(nT) + b_2 V_k(nT - T)] \tag{5}$$

여기서 a_i 와 $b_i(i=1, 2)$ 는 스위치 배열(arrangement)에 따라 변화한다.

만약 이런 계수가 모든 branch에서 같은 스위치 배열을 갖고 있다면 branch 지수 k 에 獨立의이다.

위의 식(5)를 Z 變換하면

$$Q_k(z) = C_k \frac{zb_1 + b_2}{za_1 + a_2} V_k(z) = \frac{C_k}{F(z)} V_k(z) \tag{6}$$

이다.

여기서 Z는 sampled-data 주파수이고 $F(z)$ 는 Z의 Bilinear 函數로 다음식으로 주어진다.

$$F(z) = \frac{2z-1}{Tz+1} \tag{7}$$

여기서 $b_1 = b_2 = a_1 = -a_2 = 1$ 이다.

式(8)과 같은 Bilinear Z 變換된 傳達函數 $H_b(z)$ 에 대하여 考察하여 보자.¹⁸⁾

$$H_b(z) = \frac{a}{\frac{2}{T} [(z-1)/(z+1)] + a} \tag{8}$$

$z = e^{j\omega_1 T}$ 를 식(8)에 代入하면

$$H_b(z) = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega_1 T} - 1}{e^{j\omega_1 T} + 1} + a} = \frac{a}{\frac{2}{T} j \tan \frac{\omega_1 T}{2} + a} \tag{9}$$

그러므로 式(9)을 보면 $H_b(z)$ 의 應答 曲線은

$$\frac{2}{T} \tan \frac{\omega_1 T}{2} = a \text{ 또는 } \tan \frac{\omega_1 T}{2} = \frac{aT}{2} \tag{10}$$

일때 3dB點(cut off frequency)에 해당한다.

式(10)으로부터 Bilinear Z 變換에 의해서 發生되는 周波數 歪曲이나 warping을 구할 수 있다.

Bilinear Z 變換을 이용한 설계에서 ω_1 일때 3dB점을 가진다면 式(10)으로부터 $\frac{2}{T}$ 가 구해진다.

$$\frac{2}{T} = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \tag{11}$$

따라서 prewarping에 의한 Bilinear Z 變換函數는 式(7)에다 式(11)을 代入하면

$$F_p(z) = \frac{\omega_1}{\tan \frac{\omega_1 T}{2}} \frac{z-1}{z+1} \tag{12}$$

여기서 ω_1 는 아나로그 cut off frequency이다.

결과적으로 Prewarping된 傳達函數는 式(12)를 S로 놓은 후 式(2)에 代入하여 구한다.

$$H_p(z) = 8.023148742 \times 10^{-5} \frac{Z^5 + 5Z^4 + 10Z^3 + 10Z^2}{Z^5 - 3.917014175Z^4 + 5Z + 1} + 6.231615532Z^2 - 5.019742139Z^2 + 2.043673726Z - 0.335965537 \tag{13}$$

또한 傳達函數 $H_p(z)$ 의 應答 函數 $|H_p(m)|^2$ 는¹⁷⁾

$$|H_p(m)|^2 = 6.4370915 \times 10^{-9} \frac{252 + 420 \cos(m\pi)}{83.66331845 - 141. + 240 \operatorname{cosec}(2m\pi) + 90 \cos(3m\pi) - 141.1055253 \cos(m\pi) + 80.63173187 + 20 \cos(5m\pi) + 2 \cos(5m\pi)}{\cos(2m\pi) - 30.2368983 \cos(3m\pi)} + 6.719310993 \cos(4m\pi) - 0.671931074 \cos(5m\pi) \tag{14}$$

이다. 여기서 $m\pi = \omega T$ 이다.

式(12)를 式(6)에 代入하면 $a_1 = -a_2 = 1$ 일 경우에 다음 식이 얻어진다.

$$C_k b_1 = C_k b_2 = \frac{\tan \frac{\omega_1 T}{2}}{\omega_1} G_k \tag{15}$$

또한 式(15)를 式(5)에 代入하면

$$g_k(nT) - g_k(nT - T) = \frac{\tan \frac{\omega_1 T}{2}}{\omega_1} G_k [V_k(nT) + V_k(nT - T)] \tag{16}$$

이다.

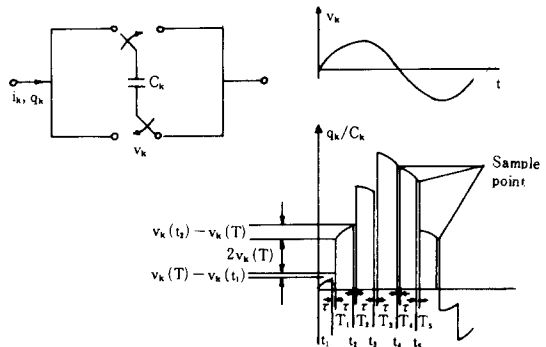


그림 7. Bilinear Z 변환에 의한 저항 SC 등가회로 (a) 회로 (b) Branch 전압과 전하 파형

Fig. 7. SC equivalent circuit of a resistor which corresponds to the bilinear Z-transform. (a) Circuit. (b) Branch voltage and charge waveforms.

따라서 그림 7(a)로 부한 標準化 주기 T동안 k번째 branch에 흐르는 電荷는 $V_k(nT)$ 와 $V_k(nT-T)$ 의 합에 비례하므로 $(n-1)T \leq t \leq nT$ 구간동안 branch를 통과하는 총 전하는

$$g_k(nT) - g_k(nT-T) = C_k [V_k(nT) + V_k(nT-T)] \quad (17)$$

이 된다. 여기서 모든 스위치들은 매 T_c 초마다 두번씩 位置가 바뀌므로 標本化 주기 T는

$$T = \frac{T_c}{2} = \frac{1}{2f_c} \quad (18)$$

이며 이것은 Nyquist 法則에 의거한다. T_c 는 clock 주기이다.

식(16)과 식(17)를 비교하여 보면 두식을 等價로 놓은 뒤 prewarping된 C_k 값을 구하면

$$C_k = \frac{\tan \frac{\omega_1 T}{2} G_k}{\omega_1} \quad (19)$$

이다. 여기서 식(18)과 같은 조건이 만족되므로 prewarping된 Bilinear mapping이 얻어진다. 여기서 T는 標本化 주기이며 식(19)를 이용하여 얻어진 각 素子에 대한 C_k 값과 設計된 SCF는 그림 8에 주어졌다.

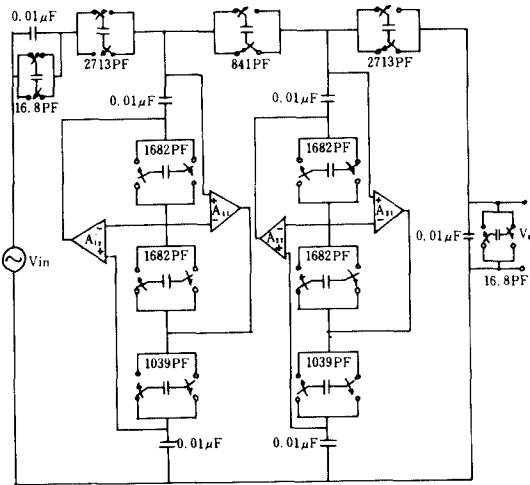


그림 8. Prewarping된 능동 저역 통과 SCF
Fig. 8. Active low pass SCF with prewarping.

V. 實驗 및 考察

SCF의 전체적인 實驗 블록 다이어그램은 그림 9에 나타냈으며 實驗에 사용된 스위치 素子는 CD4016 AE를 OP. Amp는 $\mu A741$ 을 커패시터는 세라믹을 사용했다. 그림 9의 블록다이어그램을 보면 SCF에 필요 한 클럭 신호는 NE555를 사용하여 astable multivibrator로 펄스를 발생시킨다음 30KHz의 펄스를 S/H

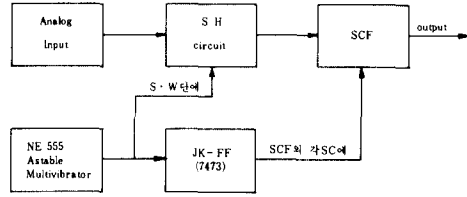


그림 9. 實驗 계통도
Fig. 9. Block diagram for experiment.

brator로 펄스를 발생시킨다음 30KHz의 펄스를 S/H (sample and hold) 회로에 標本化 周波數로 가해주고 JK-FF(7473)을 사용하여 duty cycle 50%인 15KHz의 phaseoverlap이 되지 않는 클럭 신호 ϕ_1 과 ϕ_2 를 만들어서 SCF의 모든 SC에 스위칭 동작을 시킨다.

이상과 같이 측정된 실험값을 고찰하여 보면 그림 10과 같은 응답 곡선을 얻을 수 있다.

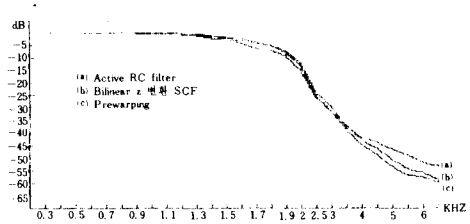


그림 10. 필터의 응답 곡선
Fig. 10. The filter response curve.

먼저 Bilinear Z 變換된 SCF는 임펄스 불변(impulse invariant)을 이용할 때 생기는 aliasing 現象이 제거되지만 cut off frequency 영역에서 周波數 歪曲이 發生한다. 반면에 prewarping된 SCF는 aliasing 現象도 제거가 되고 능동 RC 필터와 正確히 교차되지는 못하지만 周波數 歪曲이 Bilinear Z 變換한 경우보다 훨씬 적어 개선된 周波數 應答 特性을 볼 수가 있다.

VI. 結 論

Bilinear Z 變換을 實現할 수 있는 SC회로를 이용하여 능동 RC 필터를 능동 SCF로 변환할 수 있으며 임펄스 불변(impulse invariant)을 이용할 때 생기는 aliasing 現象을 피할 수 있다.

Bilinear Z 變換으로 부터 設計된 SCF의 C_k 값을 變化시켜서 prewarping을 할 수 있으며 Bilinear Z 변환된 SCF보다 周波數 歪曲이 현저하게 개선됨을 확인하였다.

參 考 文 獻

- [1] D.L. Fried *Analog Sampled Data Filter*. IEEE J. Solid State Circuit SC-7 pp. 302-304, 8, 1972.
 - [2] NE Van Valkenburg, B.K. Kithariwala *Linear Circuit*. New York Bell Laboratory PP. 404-421, 1982.
 - [3] G.C. Temes, H.J. Orchard, M. Tahambegloo, "Switched Capacitor Filter Design Using the Bilinear Z Transform" *IEEE Transaction on Circuits and Systems (AS-25)* no. 12 pp. 1039-1044, 12, 1978.
 - [4] GoBi Paryanani, *Principles of Active Network Synthesis and Design*. Bell Laboratories Inc. pp. 100-380, 1976.
 - [5] E.A. Guillemin *Synthesis of Passive Network*. New York Wesley 1957.
 - [6] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer *Digital Signal Processing*. Prentice Hall Inc. PP. 206-218, 1975.
 - [7] S.M. Bozic *Digital and Kalman Filtering*. Edward Arnold pp. 51-56, 1979.
 - [8] Gene. F. Franklin, J. David. Powell *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley Publishing Company Inc. pp. 54-61 1980.
 - [9] C.R.W. Compbell, K.M. Reineck "A pole/zero prewarping procedure in SCF design" *IEEE Transaction on Circuit and Systems CAS-31* no. 9, pp. 821-825, 9, 1984.
-