

論 文

大韓造船學會誌
第22卷第2號 1985年6月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 22, No. 2, June 1985

有限깊이의 물에 떠있는 柱狀體에 作用하는 時間平均漂流力

—直接壓力 積分法—

李 起 杓* · 李 甲 薰**

Time Mean Drifting Forces on a Cylinder in Water of Finite Depths —Direct Pressure Integration Method—

K.P. Rhee* K.K. Lee**

Abstract

In this paper, the second order time mean forces acting on the circular cylinder floating on the free surface of a finite water depth are calculated.

Under the assumption that the fluid is ideal and the wave the linear gravity wave, the velocity potential is calculated by the source distribution method, and the second order time mean lateral and vertical drifting forces are calculated by the direct integration of fluid pressures over the immersed body surface.

The comparison of the lateral drifting forces with Rhee's results by momentum theorem shows good agreements. And it is shown that the second order time sinkage forces of a floating circular cylinder cross zero for all water depths.

1. 序 論

최근에 이르러 해양산업의 발달로 반잠수식 해양 구조물의 중요성이 증대됨에 따라 해양 구조물의 운동, 계류력 등에 관한 많은 연구가 진행되고 있다.

반잠수식 해양구조물의 계류시나 선박의 항구 정박시에 비선형적인 2차차수의 시간평균력을 계류력의 정확한 측정에 중요한 입력자료로 알려져 있다.

Maruo[1]는 무한 깊이의 물에 떠있는 2차원 주상체가 받는 2차차수의 시간 평균력중 수평방향의 표류력을 운동량이론을 사용하여 구한 바 있으며, Söding[2]

은 단면 표면에서의 직접압력적분법에 의해 2차차수의 힘을 구하였다. Ogawa[3]는 Maruo의 방법과 Strip 이론을 이용하여 선박에 작용하는 표류력을 구하고 실험에 의해 이론결과와 비교하였다. Rhee[5]는 유한깊이의 물에 떠있는 2차원주상체가 받는 표류력을 운동량이론을 사용하여 구하고 Kyojuka[6]의 무한수심의 결과와 비교하였다.

2차원 부유체에 작용하는 2차차수의 시간평균력을 계산할 경우 Strip이론을 사용하여 선체나 반잠수식 해양구조물 같은 3차원 물체에 작용하는 힘도 구할 수 있으므로 본 논문에서는 유한 수심에서 2차원주상체에 작용하는 2차차수의 시간평균력을 계산하였다.

接受日字: 1986年 1月 16日, 再接受日字: 1985年 3月 20日

* 正會員, 서울大學校 工科大学 造船工學科

** 正會員, 서울大學校 大學院, 現代重工業 船舶海洋研究所(現)

이를 위해 산란파와 방사파의 포텐셜을 특이점 분포 방식에 의해 계산하였으며, 단면표면의 직접압력적분 방식에 의해 2차차수의 시간평균력을 계산하였다.

그리고 그값을 운동량이론에 의해 계산된 Rhee의 결과와 비교하였으며, 중심의 변화에 따른 값의 변화도 고찰하였다.

2. 2次次數의 時間平均力의 計算

Fig. 1에서와 같이 부유체가 유한깊이의 물에서 파랑중에 운동하고 있을 때, 2차차수의 시간 평균 표류력을 구하기 위해 공간 고정 좌표계 0-xy와 물체고정 좌표계 0-x̄ȳ의 두좌표계를 채용한다. 0-x̄ȳ는 정지상태에서 0-xy와 일치한다.

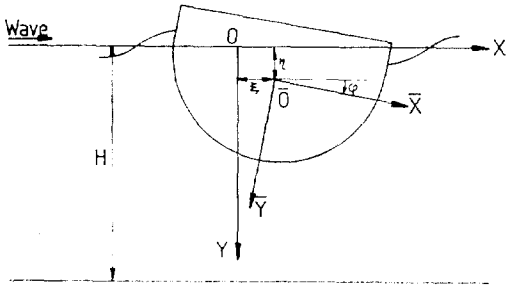


Fig. 1 Coordinate system

유체는 이상유체이며 비회전성으로 가정하며, 이에 의해 속도포텐셜이 존재하게 되고, 2차차수의 시간 평균 표류력을 구할 때 2차차수의 포텐셜에 의한 기여도는 작다고 가정하여 포텐셜을 1차차수의 포텐셜만을 사용한다. 이와 같은 가정 하에 2차차수의 시간평균표류력의 식을 아래와 같이 유도할 수 있다.

우선 두 좌표계간의 관계를 나타내면

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi + \xi \\ y &= \bar{y} \cos \varphi + \bar{x} \sin \varphi + \eta \end{aligned} \quad (1)$$

sin φ와 cos φ를 Taylor 급수로 전개하여 2차항 까지를 윗식에 대입하면

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} - \bar{y} \varphi + \xi - \frac{1}{2} \bar{x} \varphi^2 \\ y &= \bar{y} + \bar{x} \varphi + \eta - \frac{1}{2} \bar{y} \varphi^2 \end{aligned} \quad (2)$$

이 된다. 그리고 상하, 좌우동요와 횡동요응답인 η, ξ, φ와 속도포텐셜 φ를 아래와 같이 섭동전개로 표시한다.

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 \\ \eta &= \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 \\ \varphi &= \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\phi = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 \quad (3)$$

식 (3)을 식 (2)에 대입하면

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon(-\bar{y} \varphi_1 + \xi_1) + \varepsilon^2 \left(-\bar{y} \varphi_2 + \xi_2 - \frac{1}{2} \bar{x} \varphi_1^2 \right) + O(\varepsilon^3) \\ y &= \bar{y} + \varepsilon(\bar{x} \varphi_1 + \eta_1) + \varepsilon^2 \left(\bar{x} \varphi_2 + \eta_2 - \frac{1}{2} \bar{y} \varphi_1^2 \right) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 물체에 미치는 유체력을 고려하면

$$F = \begin{Bmatrix} F_H \\ F_V \\ M \end{Bmatrix} = \int_B (p - p_0) \begin{Bmatrix} -y' \\ x' \\ xx' + yy' \end{Bmatrix} d\lambda \quad (5)$$

이 된다. 윗식에서 p-p₀는 베르누이 방정식으로부터

$$p - p_0 = \rho \left(g y - \frac{1}{2} \rho (\phi_x^2 + \phi_y^2) \right) - \rho \phi_t \quad (6)$$

속도 포텐셜 φ를 물체에 고정된 좌표계 x, y에 대하여 Taylor급수로 전개하면

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= \varepsilon \phi_1(\bar{x}, y, t) + (x - \bar{x}) \varepsilon \phi_{1x} + (y - \bar{y}) \varepsilon \phi_{1y} \\ &\quad + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7)$$

이 되고, 이식에 식 (4)의 관계를 사용한후 x, y, t에 관한 미분을 수행하면 아래와 같이 적을 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_x^2 + \phi_y^2 &= \varepsilon^2 (\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2) + O(\varepsilon^3) \\ \phi_t &= \varepsilon \phi_{1t} + \varepsilon^2 \{ (-\bar{y} \varphi_1 + \xi_1) \phi_{1x} + (\bar{x} \varphi_1 + \eta_1) \phi_{1y} \} \\ &\quad + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (8)$$

따라서 식 (6)을 식 (8)에 대입한 후 정리하면 유체압 p-p₀는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} p - p_0 &= -\frac{1}{2} \rho \varepsilon^2 (\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2) - \rho \varepsilon \phi_{1t} - \rho \varepsilon^2 \xi_1 \phi_{1x} \\ &\quad + \rho \varepsilon^2 \bar{y} \varphi_1 \phi_{1x} - \rho \varepsilon^2 \eta_1 \phi_{1y} - \rho \varepsilon^2 \bar{x} \varphi_1 \phi_{1y} \\ &\quad + \rho g \bar{y} + \rho g \bar{x} \varphi_1 + \rho g \varepsilon \eta_1 - \frac{1}{2} \rho g \varepsilon^2 \bar{y} \varphi_1^2 \end{aligned} \quad (9)$$

유체력을 구하는 식 (5)로부터 2차차수의 힘을 구하면

$$\begin{aligned} F &= \int_B (1^{st} + 2^{nd} \text{ order of } (p - p_0)) \begin{Bmatrix} -y' \\ x' \\ xx' + yy' \end{Bmatrix} d\lambda \\ &\quad + \int_B (1^{st} \text{ order of } (p - p_0)) \begin{Bmatrix} -y' \\ x' \\ xx' + yy' \end{Bmatrix} d\lambda \\ &= F_B + F_B \end{aligned} \quad (10)$$

그리고

$$\begin{aligned} -dy &= -d\bar{y} + \varepsilon \varphi_1 d\bar{x} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \varphi_1^2 d\bar{y} \\ dy &= d\bar{x} - \varepsilon \varphi_1 d\bar{y} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \varphi_1^2 d\bar{x} \\ x dx + y dy &= \bar{x} d\bar{x} + \bar{y} d\bar{y} \\ &\quad + \varepsilon (\xi_1 d\bar{x} + \eta_1 d\bar{y}) \\ &\quad + \varepsilon^2 (-\xi_1 \varphi_1 d\bar{y} + \eta_1 \varphi_1 d\bar{x}) \end{aligned} \quad (11)$$

그러므로 2차차수의 힘을 구하는 식 (10)의 첫번째 항 F_B는 물체가 y축에 대해서 내침이라고 생각하면,

$$\begin{aligned}
 F_B = \rho g \left\{ \begin{array}{c} \eta_1 \varphi_1 B \\ 0 \\ -\eta_1 \xi_1 B \end{array} \right\} \\
 - \rho \int_B \phi_{1t} \left\{ \begin{array}{c} -\varphi_1 \bar{x}' \\ -\varphi_1 \bar{y}' \\ \xi_1 \bar{x}' + \eta_1 \bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \\
 - \rho \int_B (\xi_1 - \varphi_1 \bar{y}) \phi_{xt} \left\{ \begin{array}{c} -\bar{y}' \\ \bar{x}' \\ \bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \\
 - \rho \int_B (\eta_1 + \varphi_1 \bar{x}) \phi_{yt} \left\{ \begin{array}{c} -\bar{y}' \\ \bar{x}' \\ \bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \\
 - \frac{1}{2} \rho \int_B (\phi_{1\bar{x}}^2 + \phi_{1\bar{y}}^2) \left\{ \begin{array}{c} -\bar{y}' \\ \bar{x}' \\ \bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \quad (12)
 \end{aligned}$$

이코 또 식 (10) 의 두번째항 F_B 는

$$\begin{aligned}
 F_B = -\rho \int_B (\phi_{1t} - gy) \left\{ \begin{array}{c} -y' \\ x' \\ xx' + yy' \end{array} \right\} d\lambda \\
 = -\rho g \int_B \left(y - \frac{1}{g} \phi_t \right) dy \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ x'/y' \\ (xx' + yy')/y' \end{array} \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서 $y - \frac{1}{g} \phi_t$ 는 상대좌표 y_r 을 나타내므로

$$\begin{aligned}
 F_B = \rho g \int_B y_r dy_r \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ x'/y' \\ (xx' + yy')/y' \end{array} \right\} \\
 = \rho g \int_{\eta_-}^{\eta_+} y_r dy_r - \int_{\eta_+}^{\eta_-} y_r dy_r \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ x'/y' \\ (xx' + yy')/y' \end{array} \right\} \\
 = \frac{1}{2} \rho g \left[\left(\eta_1 - \frac{B}{2} \varphi_1 - \frac{1}{g} \phi_{1t} \right)^2 \right. \\
 \left. - \left(\eta_1 + \frac{B}{2} \varphi_1 - \frac{1}{g} \phi_{1t} \right)^2 \right] \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ x'/y' \\ (xx' + yy')/y' \end{array} \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서 φ_{1t} 는 x 축의 $+$ 쪽과 물체의 표면이 만나는 곳의 속도포텐셜의 시간에 관한 미분율, φ_{1t} 는 x 축의

$-$ 쪽과 물체의 표면이 만나는 곳의 속도 포텐셜의 시간에 관한 미분율을 나타낸다. 또한 η_+ , η_- 는 역시 x 축의 $+$ 쪽과 $-$ 쪽이 각각 물체표면과 만나는 곳의 파고를 표시한다.

그러므로 2 차차수의 전 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} F = g \left\{ \begin{array}{c} \eta_1 \varphi_1 B \\ 0 \\ -\eta_1 \xi_1 B \end{array} \right\} \\
 - \int_B \phi_{1t} \left\{ \begin{array}{c} -\varphi_1 \bar{x}' \\ -\varphi_1 \bar{y}' \\ \xi_1 \bar{x}' + \eta_1 \bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \\
 - \int_B [(\xi_1 - \varphi_1 \bar{y}) \phi_{1\bar{x}t} + (\eta_1 + \varphi_1 \bar{x}) \phi_{1\bar{y}t}] \\
 \left\{ \begin{array}{c} -\bar{y}' \\ \bar{x}' \\ \bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \\
 - \frac{1}{2} \int_B (\varphi_{1\bar{x}}^2 + \varphi_{1\bar{y}}^2) \left\{ \begin{array}{c} -\bar{y}' \\ \bar{x}' \\ \bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \\
 + \frac{1}{2} g \left[\left(\eta_1 - \frac{B}{2} \varphi_1 - \frac{1}{g} \phi_{1t} \right)^2 \right. \\
 \left. - \left(\eta_1 + \frac{B}{2} \varphi_1 - \frac{1}{g} \phi_{1t} \right)^2 \right] \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ x'/y' \\ (xx' + yy')/y' \end{array} \right\} \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서 동요응답과 속도 포텐셜을 시간에대한 주기운동으로 생각하면

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= R_e \{ \bar{\xi}_1 e^{i\omega t} \} \\
 \eta_1 &= R_e \{ \bar{\eta}_1 e^{i\omega t} \} \\
 \varphi_1 &= R_e \{ \bar{\varphi}_1 e^{i\omega t} \} \\
 \phi_1 &= R_e \{ \bar{\phi}_1 e^{i\omega t} \} \quad (16)
 \end{aligned}$$

으로 표시할 수 있으며, 또

$$\alpha = R_e \{ \bar{\alpha} e^{i\omega t} \}, \quad \beta = R_e \{ \bar{\beta} e^{i\omega t} \} \quad (17)$$

라고 하면

$$\gamma = \alpha\beta = \frac{1}{2} R_e \{ \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} e^{2i\omega t} \} + \frac{1}{2} R_e \{ \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}^* \} = \gamma_2 + \gamma_0 \quad (18)$$

이므로, γ 의 시간평균은 γ_0 이다.

따라서 시간평균 표류력은 아래와 같은 형태로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \bar{F}_0 = R_e \left\{ \frac{1}{2} g \left[\begin{array}{c} \eta_1 \bar{\varphi}_1^* B \\ 0 \\ -\eta_1 \bar{\xi}_1^* B \end{array} \right] - \frac{1}{2} \int_B \bar{\phi}_{1t} \left\{ \begin{array}{c} -\bar{\varphi}_1^* \bar{x}' \\ -\bar{\varphi}_1^* \bar{y}' \\ \bar{\xi}_1^* \bar{x}' + \eta_1^* \bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \int_B [(\bar{\xi}_1 - \bar{\varphi}_1 \bar{y}) \bar{\phi}_{1\bar{x}t}^* + (\eta_1 + \bar{\varphi}_1 \bar{x}) \bar{\phi}_{1\bar{y}t}^*] \left\{ \begin{array}{c} -\bar{y}' \\ \bar{x}' \\ \bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda - \frac{1}{4} \int_B (\bar{\phi}_{1\bar{x}} \bar{\phi}_{1\bar{x}}^* + \bar{\phi}_{1\bar{y}} \bar{\phi}_{1\bar{y}}^*) \left\{ \begin{array}{c} -\bar{y}' \\ \bar{x}' \\ \bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' \end{array} \right\} d\lambda \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} g \left[\left(\eta_1 - \frac{B}{2} \bar{\phi}_1 - \frac{1}{g} \bar{\phi}_{1t-} \right) \left(\eta_1' - \frac{B}{2} \bar{\phi}_1 - \frac{1}{g} \bar{\phi}_{1t-} \right)^* - \left(\eta_1 + \frac{B}{2} \bar{\phi}_1 - \frac{1}{g} \bar{\phi}_{1t+} \right) \left(\eta_1 + \frac{B}{2} \bar{\phi}_1 - \frac{1}{g} \bar{\phi}_{1t+} \right)^* \right] \begin{Bmatrix} -1 \\ x'/y' \\ (xx' + yy')/y' \end{Bmatrix} \quad (19)$$

3. 計算結果 및 考察

본 방법에 의한 계산의 모형은 원형주상체를 사용하였으며 그 단면의 제원은 다음과 같다.

Table 1. Principal dimension of a model

Half-Beam/Draft	1.0
Center of Gravity: OG/b	0.031
Metacentric Height: GM/b	0.080
Radius of Gyration: k/b	1.182

Fig. 2~11에 도시된 값들은 단면의 반폭으로 무차원화된 파수 K_b 를 횡축으로 하여 도시하였다.

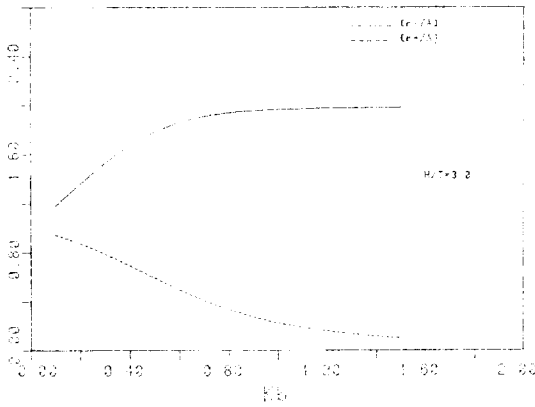


Fig. 2 Relative wave amplitude on fixed body

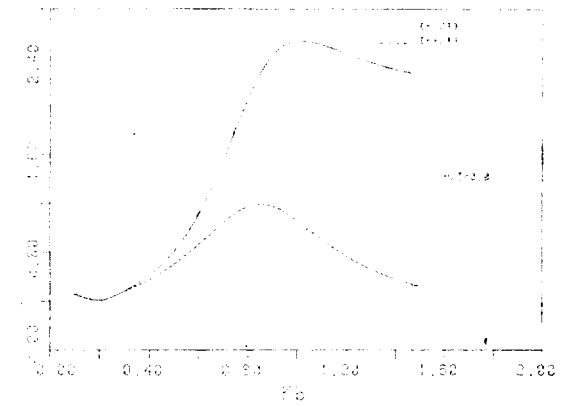


Fig. 3 Relative wave amplitude on freely floating body

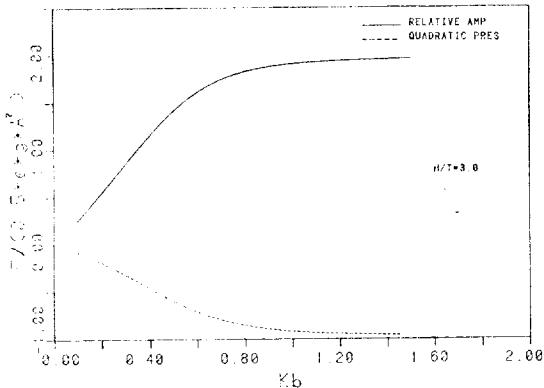


Fig. 4 Two components of mean drift force on fixed body

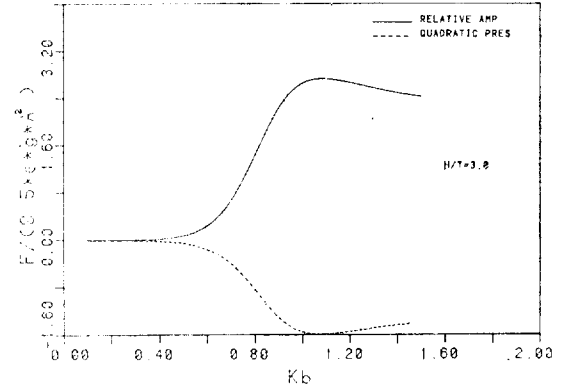


Fig. 5 Two components of mean drift force on freely floating body

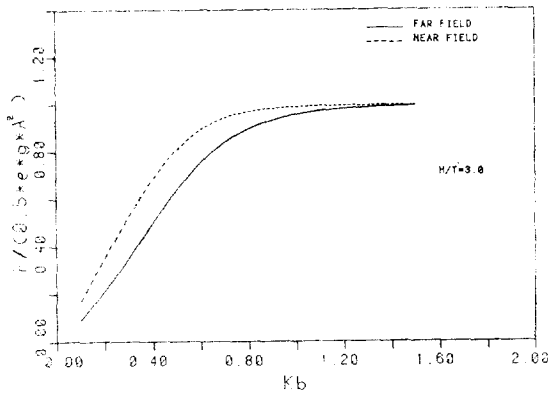


Fig. 6 Comparison of near field method and far field method on fixed body

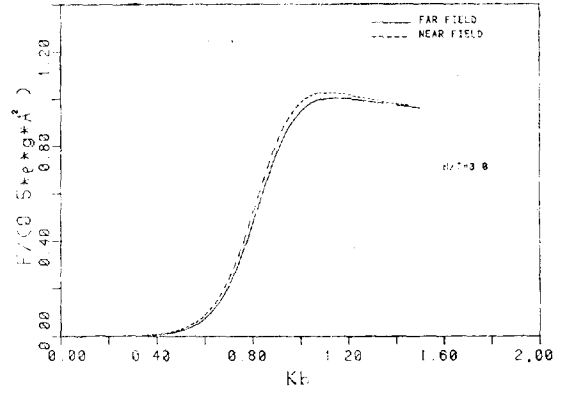


Fig. 7 Comparison of near field method and far field method on freely floating body

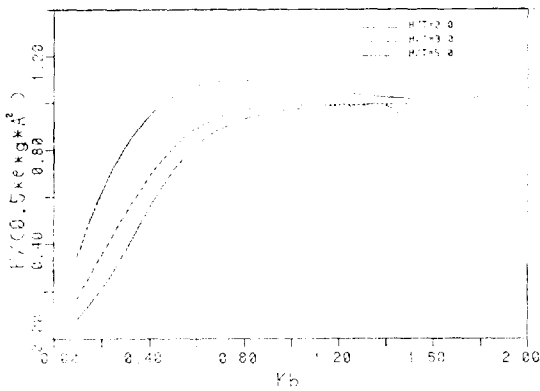


Fig. 8 Mean drift forces on fixed body in various water depth

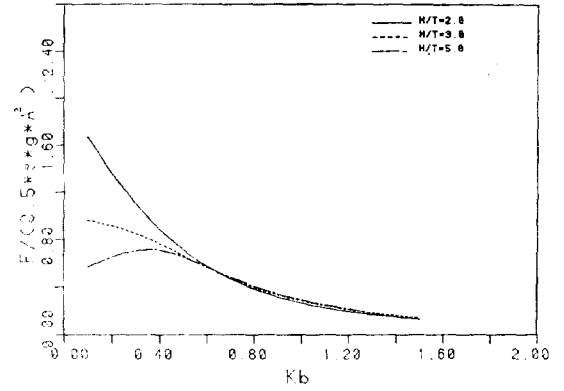


Fig. 9 Mean drift forces on freely floating body in various water depth

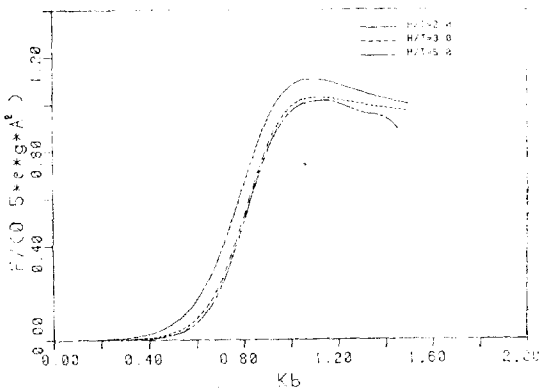


Fig. 10 Mean sinkage forces on fixed body in various water depth

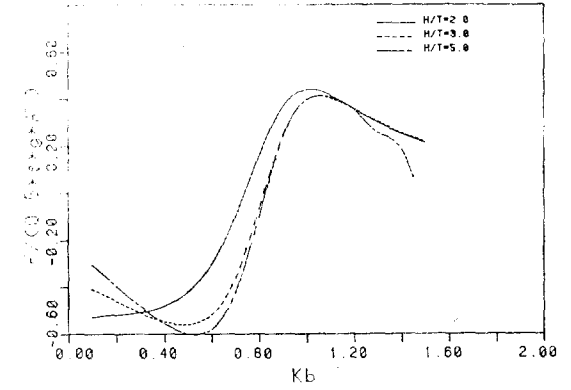


Fig. 11 Mean sinkage forces freely floating body in various water depth

pressure항을 계산하기 위해 필요한 유체입자의 속도를 구하기 위해 특이점 분포방법에 의해 계산된 속도포텐셜을 수치미분함으로써 구하였다.

Fig. 6과 Fig. 7은 운동량이론을 사용하여 구한 표류력의 값과 본 방법에 의해 구한 값을 비교하고 있다 두 경우 모두 Kb 의 전영역에 걸쳐 본 방법에 의한 값이 운동량이론에 의해 구한 값보다 크게 나타나고 있는 데 이는 계산방법의 차이에서 오는 수치계산의 오차로 생각된다.

Fig. 8과 Fig. 9는 수심의 변화에 따른 표류력의 변화를 나타내고 있다. 그림에서 보듯이 수심이 낮아질수록 표류력의 값은 같은 Kb 에서 큰 값을 갖는 것을 알 수 있다. 즉 H/T 가 5인 경우와 3인 경우는 거의 비슷하나 H/T 가 2인 경우는 앞의 경우에 비해 상당히 크게 나타나는 것을 알 수 있다.

Fig. 10과 Fig. 11은 수심의 변화에 따른 침하력을 도시하고 있다. 물체가 고정되어 있는 경우는 절 Kb 에 걸쳐서 (+) 값을 나타내고 있으나, 물체가 자유로이 운동하고 있는 경우는 Kb 가 0.8인 근처에서 (+), (-) 값이 교차되는 것을 알 수 있다. 그리고 두 경우 모두다 표류력의 경우와 마찬가지로 침하력도 Kb 가 작은 영역에서 수심이 낮아 질수록 그 절대값이 크다는 것을 알 수 있다.

Fig. 8, Fig. 9와 Fig. 11에서 H/T 일때 Kb 가 1, 2보다 큰 영역에서 이상현상을 나타내는데 이는 irregular frequency의 영향으로 생각된다.

4. 結 論

본 논문에서는 유한수심에서 2차원 부유체가 정상 운동을 하고 있을 때 그 부유체에 미치는 2차차수의 시간 평균력을 직접 압력적분법에 의해 계산하였으며, 이 계산결과로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 운동량 이론의 결과와 본 방법의 결과를 비교하여 본 방법에 의한 계산의 타당성을 입증하였다.

(2) 본 방법은 운동량이론에서는 구할 수 없는 2차차수의 침하력을 구할 수 있다.

(3) 계산결과에 따르면 2차차수의 시간평균 표류력은 파수가 작은 영역에서 수심이 낮을수록 큰 값을 갖는다.

(4) 2차 차수의 시간평균 침하력에서는 (+)와 (-) 값이 교차하는 무차원파수가 존재한다.

끝으로 본 논문은 서울대공대-현대연구기금의 지원을 받아 수행되었으며, 수치계산과정에서 도움을 주신

서울대공대 전자계산소의 여러분들과 한국기계검속연구소 태덕선박분소의 홍석원씨에게 감사를 드립니다.

5. 參 考 文 獻

- [1] Maruo, H., "The Drift of a Body Floating on Waves", *Journal of Ship Research*, Vol. 4, No. 3, Dec. 1960.
- [2] Söding, H., "Second Order Forces on Oscillating Cylinders in Waves", *Schiffstechnik*, Bd. 23, 1976.
- [3] Ogawa, A., "The Drifting Force and Moment on a Ship in Oblique Regular Waves", *International Shipbuilding Progress*, Vol. 14, No. 149, Jan. 1967.
- [4] Kim, C.H., and Dalzell, J.F., "Analysis of the Quadratic frequency Response for Lateral Drifting Force and Moment", *Journal of Ship Research*, Vol. 25, No. 2, June 1981.
- [5] Rhee, K.P., "On the Lateral Drifting Force of a Cylinder on Water of Finite Depths-Far Field Method", *Journal of Society of Naval Architects of Korea*, Vol. 20, No.2, June 1983.
- [6] Kyozyuka, Y., "Experimental Study on Second Order Forces Acting on a Cylindrical body in Waves", 14th Symposium on Naval Hydrodynamics, Aug. 1982.
- [7] Wehausen, J.V., and Laitone, E.V., "Surface Waves", *Handbuch der physik*, Vol. IX, 1960.
- [8] Rhee, K.P., "2-Dimensional Hydrodynamic Forces of Heaving, Swaying, and Rolling Cylinders on a Free Surface of a Water of finite Depth", *Journal of Society of Naval Architects of Korea*, Vol. 14, No. 3, Sep. 1977.
- [9] 한국기계연구원, "계류부유체의 운동특성연구(1)" Dec. 1983.

A. 付 錄

<속도 포텐셜의 계산>

유한수심에서 2차원부유체가 규칙파중 자유롭게 비서 동요를 하고 있을 때 부유체 주위의 전속도포텐셜을 Φ_T 로 놓으면 Φ_T 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Phi_T = R_c \left\{ \frac{igA}{\omega} \left(\Phi_I + \Phi_D + K \sum_{j=1}^3 \xi_j \Phi_R^{(j)} \right) \right\} \quad (A-1)$$

위 속도포텐셜은 아래와 같은 조건을 만족해야 하고
 그로부터 속도 포텐셜의 값을 구할 수 있다.

- i) Laplace equation
- ii) 선형 자유표면 경계조건
- iii) 해저조건
- iv) 방사조건
- v) 부유체 표면 경계 조건

여기서 i)~iv) 까지의 조건을 만족하는 함수 Green 함수를 도입하여 물체표면 소오스분포방법을 사용하여 각 포텐셜을 구한다. 각 포텐셜들을 고려하면

1) 입사파의 포텐셜

$$\begin{aligned} \phi_I &= \frac{\cosh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} e^{i(-k_0 X + \omega t)} \\ &= \phi_I e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (A-2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cosh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \cos k_0 X \\ &\quad -i \frac{\cosh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \sin k_0 X \\ &= \phi_I^{(4)} + i\phi_I^{(5)} \end{aligned} \quad (A-3)$$

2) 산란파의 포텐셜

$\phi_D = \phi_D e^{i\omega t}$ 로 놓을 수 있고,

$$\phi_D(x, y) = \int_c \sigma_D(a, b) \cdot G(x, y; a, b) d\lambda(a, b) \quad (A-4)$$

로 놓을 수 있다.

위에 사용된 Green 함수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} G(x, y; a, b) &= \log(r/r_1) \\ &+ 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{\cosh k(H-y) \cosh k(H-b)}{(K \cosh k H - k \sinh k H) \cosh k H} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-kH} \sinh k \sinh kb}{k \cosh k H} \right\} \cos k(x-a) dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}(x, y; a, b) &= \tan^{-1}\left(\frac{y-b}{x-a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y+b}{x-a}\right) + 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{\sinh k(H-y) \cosh k(H-b)}{(K \cosh k H - k \sinh k H) \cosh k H} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-kH} \cosh k \sinh kb}{k \cosh k H} \right\} \sin k(x-a) dk - i \frac{4\pi \sinh k_0(H-y) \cosh k_0(H-b)}{2k_0 H + \sinh^2 k_0 H} \sin k_0(x-a) \\ &= -\text{sign}(x-a) \left[4\pi \frac{\cosh k_0(H-b) \sinh k_0(H-y)}{2k_0 H + \sin 2k_0 H} \cos k_0(x-a) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^\infty 4\pi \frac{\cos k_n(H-b) \sin k_n(H-y)}{2k_n H + \sin 2k_n H} e^{-k_n |x-a|} - i \cdot 4\pi \frac{\cosh k_0(H-b) \sinh k_0(H-y)}{2k_0 H + \sinh 2k_0 H} \sin k_0(x-a) \right] \\ &= \bar{G}_c + i\bar{G}_s \end{aligned} \quad (A-8)$$

또한 (A-6) 은 다음과 같이 바뀐다.

$$\phi_D^{(4)} = \frac{\sinh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \sin k_0 x + c_4$$

$$\begin{aligned} &-i \frac{4\pi \cosh k_0(H-y) \cosh k_0(H-b)}{2k_0 H + \sin 2k_0 H} \cos k_0(x-a) \\ &= 4\pi \frac{\cosh k_0(H-b) \cosh k_0(H-y)}{2k_0 H + \sinh 2k_0 H} \sin k_0 |x-a| \\ &\quad - \sum_{n=1}^\infty 4\pi \frac{\cos k_n(H-b) \cos k_n(H-y)}{2k_n H + \sin 2k_n H} e^{-k_n |x-a|} \\ &\quad -i \frac{4\pi \cosh k_0(H-b) \cosh k_0(H-y)}{2k_0 H + \sinh 2k_0 H} \cos k_0(x-a) \\ &= G_c + iG_s \end{aligned} \quad (A-5)$$

식 (A-4) 로 부터 ϕ_D 를 구하기 위해서는 σ_D 의 값을 알아야하고 σ_D 를 알기 위해서는 경계조건 v) 를 사용한다.

경계조건 v) 를 식으로 표현하면

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V_n \text{ 이 된다.}$$

산란파의 문제의 경우에는 위 경계조건식은

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ 이 되고 이는}$$

$$\frac{\partial \phi_D^{(4)}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I^{(4)}}{\partial n} \text{ 와 } \frac{\partial \phi_D^{(5)}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I^{(5)}}{\partial n}$$

으로 나누어진다.

위 식에 (A-3) 을 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_D^{(4)}}{\partial n} &= k_0 y' \frac{\cosh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \sin k_0 X \\ &\quad - k_0 X' \frac{\sinh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \cos k_0 X \\ \frac{\partial \phi_D^{(5)}}{\partial n} &= k_0 y' \frac{\cosh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \cos k_0 X \\ &\quad + k_0 X' \frac{\sinh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \sin k_0 X \end{aligned} \quad (A-6)$$

여기서 계산의 편의를 위하여 유량함수 ψ 를 도입하면 식 (A-4), (A-5) 는 다음과 같이 바뀐다.

$$\phi_D(x, y) = \int_c \sigma_D(a, b) G(x, y; a, b) d\lambda(a, b) \quad (A-7)$$

$$\phi_D^{(5)} = \frac{\sinh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \cos k_0 x + c_5 \quad (A-9)$$

여기서 (A-7) 과 (A-9) 로부터 다음의 적분방정식

이 얻어진다.

$$\frac{\sinh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \sin k_0 x + c_{4c} = \int_c (\sigma_{DC}^{(4)} \bar{G}_c - \sigma_{DS}^{(4)} \bar{G}_s) d\lambda$$

$$c_{4s} = \int_c (\sigma_{DC}^{(4)} \bar{G}_s + \sigma_{DS}^{(4)} \bar{G}_c) d\lambda \quad (A-10)$$

$$\frac{\sinh k_0(H-y)}{\cosh k_0 H} \cos k_0 x + c_{5c} = \int_c (\sigma_{DC}^{(5)} \bar{G}_c - \sigma_{DS}^{(5)} \bar{G}_s) d\lambda$$

$$c_{5s} = \int_c (\sigma_{DC}^{(5)} \bar{G}_s + \sigma_{DS}^{(5)} \bar{G}_c) d\lambda \quad (A-11)$$

여기서 $\sigma_D^{(4)} = \sigma_{DC}^{(4)} + i\sigma_{DS}^{(4)}$

$\sigma_D^{(5)} = \sigma_{DC}^{(5)} + i\sigma_{DS}^{(5)}$

$c_4 = c_{4c} + iG_{4s}$

$c_5 = c_{5c} + iC_{5s}$

식 (A-10) 과 (A-11)로부터 source의 세기 σ_D 를 결정할 수 있고 식 (A-4)로부터 산란파의 속도 포텐셜을 구할 수 있다.

즉

$$\phi_D^{(j)} = \int_c \sigma_D^{(j)} \cdot G d\lambda \quad (j=4, 5)$$

다시말해

$$\phi_{DC}^{(j)} = \int_c (\sigma_{DC}^{(j)} G_c - \sigma_{DS}^{(j)} G_s) d\lambda \quad (j=4, 5) \quad (A-12)$$

$$\phi_{DS}^{(j)} = \int_c (\sigma_{DC}^{(j)} G_s + \sigma_{DS}^{(j)} G_c) d\lambda \quad (j=4, 5) \quad (A-13)$$

3) 방사파의 속도 포텐셜

$\Phi_R = \phi_R e^{i\omega t}$ 로 놓을 수 있고

$$\phi_R(x, y) = \int_c \sigma_R(a, b) \cdot G(x, y; a, b) d\lambda(a, b)$$

(A-14)

로 놓을 수 있다.

방사파의 경우 물체표면의 경계조건은

$$\frac{\partial \phi_R^{(1)}}{\partial n} = y', \quad \frac{\partial \phi_R^{(2)}}{\partial n} = -x',$$

$$\frac{\partial \phi_R^{(3)}}{\partial n} = -xx' - yy' \quad (A-15)$$

이 되고, 산란파의 속도포텐셜을 계산하는 경우와 같은 과정을 거쳐 다음의 적분방정식에 도달한다.

$$-y + C_{1c} = \int_c (\sigma_{RC}^{(1)} \bar{G}_c - \sigma_{RS}^{(1)} \bar{G}_s) d\lambda$$

$$C_{1s} = \int_c (\sigma_{RC}^{(1)} \bar{G}_s + \sigma_{RS}^{(1)} \bar{G}_c) d\lambda \quad (A-16)$$

$$x + C_{2c} = \int_c (\sigma_{RC}^{(2)} \bar{G}_s + \sigma_{RS}^{(2)} \bar{G}_c) d\lambda$$

$$C_{2s} = \int_c (\sigma_{RC}^{(2)} \bar{G}_c - \sigma_{RS}^{(2)} \bar{G}_s) d\lambda \quad (A-17)$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C_{3c} = \int_c (\sigma_{RC}^{(3)} \bar{G}_c - \sigma_{RS}^{(3)} \bar{G}_s) d\lambda$$

$$C_{3s} = \int_c (\sigma_{RC}^{(3)} \bar{G}_s + \sigma_{RS}^{(3)} \bar{G}_c) d\lambda \quad (A-18)$$

윗식 (A-16), (A-17) 과 (A-18)로부터 σ_R 을 구할 수 있고, 이로부터 방사파의 포텐셜을 구할 수 있다.

즉

$$\phi_R^{(j)} = \int_c \sigma_R^{(j)} \cdot G d\lambda \quad (j=1, 2, 3)$$

다시말해

$$\phi_{RC}^{(j)} = \int_c (\sigma_{RC}^{(j)} G_c - \sigma_{RS}^{(j)} G_s) d\lambda \quad (j=1, 2, 3) \quad (A-19)$$

$$\phi_{RS}^{(j)} = \int_c (\sigma_{RC}^{(j)} G_s + \sigma_{RS}^{(j)} G_c) d\lambda \quad (j=1, 2, 3) \quad (A-20)$$