

조파저항에서 Neumann-Kelvin 문제에 대한 연구

김 인 철*

A Study on the Neumann-Kelvin Problem of the Wave Resistance

In-Chull Kim*

The calculation of the resulting fluid motion is an important problem of ship hydrodynamics. For a partially immersed body the condition of constant pressure at the free surface can be linearized. The resulting linear boundary-value problem for the velocity potential is the Neumann-Kelvin problem.

The two-dimensional Neumann-Kelvin problem is studied for the half-immersed circular cylinder by Ursell. Maruo introduced a slender body approach to simplify the Neumann-Kelvin problem in such a way that the integral equation which determines the singularity distribution over the hull surface can be solved by a marching procedure of step by step integration starting at bow.

In the present paper for the two-dimensional Neumann-Kelvin problem, it has been suggested that any solution of the problem must have singularities in the corners between the body surface and the free surface. There can be infinitely many solutions depending on the singularities in the corners.

서 론

선체의 이론모형에 대한 포텐셜 흐름의 해석은 완전한 선체경계조건과 자유표면경계조건을 만족시키려고 하는데 있다. 이러한 것에 대하여 단일한 해석방법이 없다는 것은 명백하다. 그러나 저속이론과 Neumann-Kelvin 문제의 해에 기초를 둔 방법들은 앞으로의 조파저항 해석방법에 밝은 전망을 주고 있다^{1,2)}. 조파저항 문제에서 비선형 근사에 대한 연구는 계속 연구되어 오고 있는데, 몇몇의 연구에서는 선체표면에 대한 정확한 조건과 선형화된 자유표면조건을 함께 사용하고 있다. 이 문제의 결과가 소위 Neumann-Kelvin 문제이다. 2차원 Neumann-Kelvin 문제에 대해서는 문제의 해가 물체표면과 자유표면 사이의 코너에서 특이점을 가져야만 한다는 것이 제안되었다. 코너에서는 특이점을 따르는 무한히 많은 해가 있을 수 있다. Ursell은 반잠수한 원형 실린더에 대하여 코너에서 유한속도를 가지는 유일한 최소특이해가 있다고 증명하였다³⁾. 그리고 Suzuki는 선형화된 자유표면조건에 대하여 에너지보존을

취하여 유일하게 해를 확정시키는 부가적인 조건을 제시하였다. 3차원 Neumann-Kelvin 문제에 대해서는 적분방정식 안의 복잡한 Kernel 함수 때문에 많은 컴퓨터의 시간이 필요하게 된다. Maruo는 Neumann-Kelvin 문제를 단순화 하는 데에 접근하는 세장선 이론을 발표하였다⁴⁾. 본 연구에서는 Ursell에 의한 2차원 Neumann-Kelvin 문제에 대하여 코너에서의 최소특이해와 소스에 의한 최소특이포텐셜을 어떻게 적분방정식에 의하여 구성할 수 있는가 등을 해석하고 Maruo에 의한 세장체근사가 Neumann-Kelvin 문제의 Kernel 함수에 대한 근사와 근본적으로 같다는 것을 보인다.

이론해석

1. 소스포텐셜에 의한 표현

일정한 속도 U 로 흐르는 흐름 중에 반원의 실린더를 고정시킨다. 계에 대한 좌표는 Fig. 1과 같이 x 축은 수평방향으로, y 축은 연직방향으로 취한다. 실린더에 대한 운동은 정상운동이다. 플레의 존재로

*부산수산대학 : National Fisheries University of Pusan

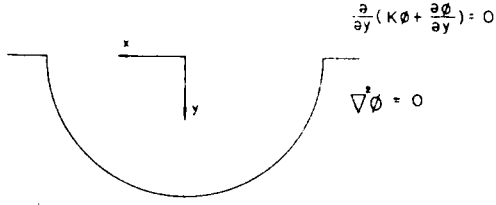


Fig. 1. Coordinate System.

인한 포텐셜 ϕ 를 생각하면 x 축방향의 속도포텐셜은 $U_x + \phi(x, y)$ 이다.

비점성, 비압축성 유체의 비회전운동을 고려하므로 유동장은 Laplace의 방정식을 만족한다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x, y) = 0 \quad (1)$$

실린더의 경계 C 를 통과하는 유량은 없으므로, 물체표면의 경계조건은

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -U \frac{\partial x}{\partial n} = -U_{nx} \quad (2)$$

이다. 여기서 n 은 물체표면에 대하여 외향법선이다. 실린더의 상류에서는 파가 없으므로

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow 0; \quad x \rightarrow -\infty \quad (3)$$

이 된다. 곡선 C 는 $y=0$ 의 수평선과 직각으로 교차한다고 가정한다. 코너 근처에서 선형화는 정당화할 수 없다.

그럼에도 불구하고 자유표면 전체에 걸쳐 선형화시킨다. 그러면 Neumann-Kelvin의 자유표면조건은⁷⁾

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0; \quad y=0, \quad C \text{의 외부} \quad (4)$$

이다. 여기서 $K=g/U^2$ 이다. 임의점 (ξ, η) 에서 소스에 의한 포텐셜은 Green 함수 $G(x, y; \xi, \eta)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) = & \log\{K\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\} \\ & + \log\{K\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\} \\ & + 2PV \int_0^\infty \frac{e^{-ky}}{k-K} \cos k(x-\xi) dk \\ & - 2\pi e^{-K(y+\eta)} \sin K(x-\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 기호 $PV \int$ 는 적분의 Cauchy 주치를 나타내며

$$PV \int_0^\infty \frac{e^{-ky}}{k-K} \cos kx dk = C(Kx, Ky) \quad (6)$$

이다. $C(Kx, Ky)$ 는 우함수이므로, $C(K(x-\xi), K(y+\eta)) - \pi e^{-K(y+\eta)} \sin K(x-\xi) \rightarrow 0; x-\xi \rightarrow -\infty$ 이다.

그래서 $x-\xi \rightarrow -\infty$ 일 때 (5)에는 파의 항이 없다. 따라서 $G(x, y; \xi, \eta)$ 는 방사조건을 만족한다. 이것은 소스포텐셜이 무한대에서는 로그적적으로 무한하다는 것을 나타낸다. 표면특이점은 $\eta \rightarrow 0$ 일 때 Weak 특이점에 의하여 대치될 수 있고, 포텐셜 $G(x, y;$

$\xi, 0)$ 를 Weak 표면특이점(weak surface singularity)으로 나타낸다.

2. 반잠수 반원에 대한 최소특이해

multipole의 전개에 의하여 주어진 포텐셜 $\phi(x, y) = \phi(r \sin \theta, r \cos \theta)$ 를 고려하면,

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x, y)}{U_x} = & AP(Kx, Ky) + BQ(Kx, Ky) \\ & + \alpha_0 a \left(\frac{\cos \theta}{r} - K \log Kr \right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m a^{2m+1} \left(\frac{\cos(2m+1)\theta}{r^{2m+1}} + \frac{K \cos 2m\theta}{2m r^{2m}} \right) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m a^{2m+2} \left(\frac{\sin(2m+2)\theta}{r^{m+1}} \right. \\ & \left. + \frac{K \sin(2m+1)\theta}{2m+1 r^{2m+1}} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned} P(Kx, Ky) = & \left\{ \log Kr + PV \int_0^\infty e^{-ky} \cos kx \frac{dk}{k-K} \right\} \\ & + \left\{ -\pi e^{-ky} \sin Kx \right\} \\ = & \left\{ P_1(Kx, Ky) \right\} + \left\{ P_2(Kx, Ky) \right\}, \\ Q(Kx, Ky) = & \left\{ PV \int_0^\infty e^{-ky} \sin kx \frac{dk}{k-K} \right\} + \left\{ \pi e^{-ky} \cos kx \right\} \\ = & \left\{ Q_1(Kx, Ky) \right\} + \left\{ Q_2(Kx, Ky) \right\} \end{aligned}$$

이고, Cauchy 주치는 $k=K$ 에서 취한다. (7)의 오른쪽 항들은 Laplace 방정식(1)과 자유표면조건 (4)와 방사조건 (3)을 만족한다.

경계조건

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_{r=a} = -U \sin \theta, \quad -\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi \quad (8)$$

은 계수 A, B, α_m, β_m 등이 결정되면 반원 C 위에서 또한 만족되며, 구간 $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ 에서

$$\begin{aligned} A \left[a \frac{\partial P_1}{\partial r} \right] + B \left[a \frac{\partial Q_2}{\partial r} \right] - \alpha_0 (\cos \theta + Ka) \\ - \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) \alpha_m \left(\cos(2m+1)\theta + \frac{Ka}{2m+1} \cos 2m\theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A \left[a \frac{\partial P_2}{\partial r} \right] + B \left[a \frac{\partial Q_1}{\partial r} \right] \sin \theta \\ - \sum_{m=0}^{\infty} (2m+2) \beta_m \left(\sin(2m+2)\theta \right. \\ \left. + \frac{Ka}{2m+2} \sin(2m+1)\theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

을 만족한다. (9)와 (10)은 Fourier 급수와 닮은 급수전개이다. A 와 B 가 임의로 선택될 때 이 방정식들은 Ka 의 불규칙 값들의 불연속 집합에서의 가능성을 제외하고는, 유일한 해를 가지는 것으로 볼 수 있

다. 그리고 이것은 계수 A 와 B 를 유일하게 선택할 수 있으므로 $\alpha_m=0, \beta_m=0$ 로 둘 수 있다. 따라서, 다음의 정리를 얻는다.

[정리 1] 방정식 (7)에서 계수 A 와 B 는 유일하게 선택할 수 있고, 그래서 $\alpha_m=0, \beta_m=0$ 이다. 상응하는 최소특이해는 코너에서 연속이고 유제인 속도를 가진다.

multipole의 방법은 반잠수 반원에 대하여 적합하다. 다른 단면에 대한 것은 등각사상에 의해 일반화할 수 있다. 따라서 반잠수한 반원에 대하여 다음의 정리를 얻는다.

[정리 2] 정리 1)에 의한 최소특이해는 다음의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & U \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\pi} \mu(\theta) G(x, y; a \sin \theta, a \cos \theta) a d\theta \\ & - \frac{U\mu(\frac{1}{2}\pi)}{K} G(x, y; a, 0) - \frac{U\mu(-\frac{1}{2}\pi)}{K} \\ & \times G(x, y; -a, 0) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 계수 $\mu(\frac{1}{2}\pi)$ 와 $\mu(-\frac{1}{2}\pi)$ 는 $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ 에서 소스의 밀도함수 $\mu(\theta)$ 의 극한값이다.

[증명] 곡선 C 와 큰 반원 $S(R)$ 그리고 C 와 $S(R)$ 사이의 x 축의 두 개의 선분에 의하여 경계지워진 영역 안에서 최소특이해 $\phi(x, y)$ 와 역소스함수 $G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$ 에 대하여 Green 정리를 적용한다. 점 (ξ, η) 가 이 영역안에 놓여 있다고 하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} -2\pi\phi(\xi, \eta) = & \int_C \left\{ \phi(x, y) \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} (x, y; \xi, \eta) \right. \\ & \left. - \bar{G}(x, y; \xi, \eta) \frac{\partial \phi}{\partial n} (x, y) \right\} ds(x, y) \\ & + \int_{S(R)} \left\{ \phi \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \right. \\ & + \int_a^R \left(\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=0} dx \\ & \left. + \int_{-R}^{-a} \left(\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=0} dx \right. \end{aligned} \quad (12)$$

또한

$$\begin{aligned} & \int_a^R \left(\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx \\ = & -\frac{1}{K} \int_a^R \left(\phi \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial y^2} - \bar{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dx \\ = & \frac{1}{K} \int_a^R \left(\phi \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} - \bar{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) dx \\ = & \frac{1}{K} \left[\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{(a, 0)}^{(R, 0)} \end{aligned} \quad (13)$$

같은 방법으로

$$\int_{-R}^{-a} \left(\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx = \frac{1}{K} \left[\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{(-R, 0)}^{(-a, 0)}$$

이 된다. 따라서

$$\begin{aligned} -2\pi\phi(\xi, \eta) = & \int_C \left(\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \\ & + \frac{1}{K} \left[\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{(a, 0)}^{(-a, 0)} \\ & + \int_{S(R)} \left(\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds - \frac{1}{K} \left[\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{(R, 0)}^{(-R, 0)} \end{aligned} \quad (14)$$

이다. $\phi_{int}(x, y)$ 를 곡선 C 위에서 $\phi_{int} = \phi$ 를 만족하는 최소특이 내부포텐셜로 나타내고, 곡선 C 와 x 축에 의하여 경계지워진 내부영역 안에서 ϕ 와 G 에 대하여 Green 정리를 적용하면.

$$\begin{aligned} 0 = & \int_C \left(\phi_{int} \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial \phi_{int}}{\partial n} \right) ds \\ & - \int_{-a}^a \left(\phi_{int} \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} - \bar{G} \frac{\partial \phi_{int}}{\partial y} \right) dx \\ = & \int_C \left(\phi_{int} \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial \phi_{int}}{\partial n} \right) ds \\ & - \frac{1}{K} \left[\phi_{int} \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} - \bar{G} \frac{\partial \phi_{int}}{\partial x} \right]_{(-a, 0)}^{(a, 0)} \end{aligned} \quad (15)$$

가 된다. (14)와 (15)를 결합하면

$$\begin{aligned} -2\pi\phi(\xi, \eta) = & - \int_C \frac{\partial}{\partial n} (\phi - \phi_{int}) G(x, y; \xi, \eta) ds(x, y) \\ & + \frac{1}{K} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi - \phi_{int}) \bar{G} \right]_{(a, 0)}^{(-a, 0)} + \int_{S(R)} \left(\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial n} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \\ & - \frac{1}{K} \left[\phi \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} - \bar{G} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{(R, 0)}^{(-R, 0)} \end{aligned} \quad (16)$$

이 된다. 소스밀도는

$$\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi U} \frac{\partial}{\partial n} (\phi - \phi_{int}) \quad (17)$$

로 된다. 여기서 법선기울기는 $(x, y) = (a \sin \theta, a \cos \theta)$ 에서 계산되고 또한 $\bar{G}(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$ 이다.

그러면 (16)은 큰 반원에 의한 두 항을 제외하고 정리 2)와 같이 된다. 이제 어떻게 최소특이포텐셜을 적분방정식에 의하여 구성할 수 있는가를 살펴본다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & U \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\pi} \mu(\theta) G(x, y; a \sin \theta, a \cos \theta) a d\theta \\ & - UapG(x, y, a, 0) - UaqG(x, y, -a, 0) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 마지막 두 항은 실제로 weak 표현특이점이다. 함수 $\mu(\theta)$ 와 상수 p, q 를 정한다. 결정조건 (8)을 적용하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \pi\mu(a) + \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\pi} \mu(\theta) \left[a \frac{\partial}{\partial r} G(r \sin \alpha, r \cos \alpha; \right. \\ \left. a \sin \theta, a \cos \theta) \right] d\theta \\ = p \left[a \frac{\partial}{\partial r} G(r \sin \alpha, r \cos \alpha; a, 0) \right] \\ + q \left[a \frac{\partial}{\partial r} G(r \sin \alpha, r \cos \alpha; -a, 0) - \sin \alpha \right] \end{aligned} \quad (19)$$

이것은 Fredholm의 제 2종 적분방정식이다. 이것

에는 유일한 해가 있고, 결국

$$\mu(\theta) = p\mu_+(\theta) + q\mu_-(\theta) + \mu_0(\theta) \quad (20)$$

의 형태이다. 여기서 $\mu_+(\theta)$, $\mu_-(\theta)$, $\mu_0(\theta)$ 는 (19)의 오른쪽에 대하여, 세가지 알고 있는 함수에 상응하는 해들이다.

정리 2]로부터 $p = \mu(\frac{1}{2}\pi)/Ka$, $q = \mu(-\frac{1}{2}\pi)/Ka$ 이다. 따라서 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 와 $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ 를 (20)에 넣으면

$$\begin{aligned} Kap &= p\mu_+(\frac{1}{2}\pi) + q\mu_-(\frac{1}{2}\pi) + \mu_0(\frac{1}{2}\pi) \\ Kaq &= p\mu_+(-\frac{1}{2}\pi) + q\mu_-(-\frac{1}{2}\pi) + \mu_0(-\frac{1}{2}\pi) \end{aligned} \quad (21)$$

이 된다. 이 방정식들로부터 두 개의 상수 p 와 q 를 찾을 수 있다.

그러면 소스밀도는 (20)에 의하여 유일하게 주어진다.

3. 세장선에 대한 속도포텐셜

일정속도 U 의 흐름중에 세장선을 고정시킨다. 계의 좌표는 Fig. 2와 같이 취한다. 유체의 비회전운동을 고려하면 속도포텐셜은 $Ux + \phi$ 이다.

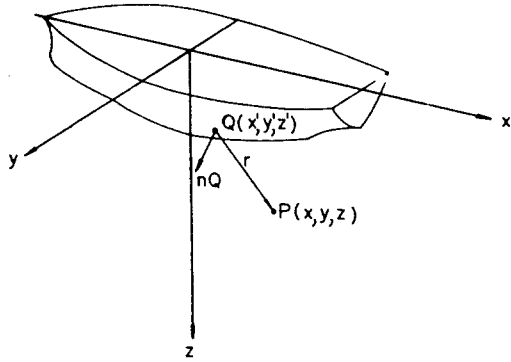


Fig. 2. Coordinate system.

유동장의 방정식은

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (22)$$

이고, 선체표면의 경계조건은

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \frac{\partial x}{\partial n} = -Un_x \quad (23)$$

이다. 여기서 n 는 선체표면에 대하여 외향법선 방향이다. $z = \zeta$ 에서 자유표면의 조건은

$$\left(U + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

$$U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - g\zeta = 0 \quad (25)$$

$z \rightarrow \infty$ 에서 $\partial \phi / \partial z$ 는 없애지고, 교란속도 포텐셜 ϕ 는 $x, y \rightarrow \infty$ 에서 없어진다.

(24)와 (25)에서 ζ 를 소거하면

$$U \left(+ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

여기서

$$A = U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - gz \quad (27)$$

이다. 선체주위의 유동의 속도포텐셜을 나타내기 위하여 Green함수 $G(P, Q)$, $P = (x, y, z)$, $Q = (x', y', z')$ 를 가정한다. 정수면 아래의 선체표면 S 와 S 를 둘러싼 이보다 더 큰표면 S_∞ , S 와 S_∞ 사이의 수평면 Σ_0 에 의하여 경계지워진 공간에 Green 정리를 적용하면

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{\partial \phi}{\partial n_Q} G(P, Q) - \phi \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS(Q) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n_Q} G(P, Q) - \phi \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS(Q) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_0} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} G(P, Q) - \phi \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dx' dy' \end{aligned} \quad (28)$$

이 된다. 여기서 n_Q 는 공간의 점 (x', y', z') 에서 물체표면에 대하여 내향법선 방향이다. 정수면 아래의 전 공간에 대하여 ϕ 가 정칙이라고 가정한다.

Green 함수로 Kelvin 소스를 도입하면, 수평면 $z = 0$ 에서 다음 식을 만족한다.

$$U^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - g \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

만약 S_∞ 를 무한하게 확장하면 (28)의 두번째항은 없어진다. 수평면 Σ_0 에 대하여, 자유표면조건 (26)으로부터 유도된 관계를 표시하면

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{U^2 \partial^2 \phi}{g \partial x^2} \Big|_{z=0} + \frac{1}{g} \Phi(x, y) \quad (30)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \left[2U \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) \right. \\ &+ 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right) \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]_{z=\zeta} \\ &+ \int_0^\zeta \left(U^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} - g \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) dz \end{aligned} \quad (31)$$

이다. (28)의 마지막 적분에서 (29)와 (30)의 관계를 사용하고, x' 에 대하여 부분 적분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{\partial \phi}{\partial n_Q} G(P, Q) - \phi \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS(Q) \\ &- \frac{U^2}{4\pi g} \int_{L_0} \left[G(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial x'} - \phi \frac{\partial G(P, Q)}{\partial x'} \right]_{z'=0} dy' \\ &+ \frac{1}{4\pi g} \iint_{\Sigma_0} \Phi(x', y') G(P, Q) dx' dy' \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 L_0 는 정수면과 선체표면과의 교선이다. 이제 선체는 아주 세장형이며, 선폭과 길이의 비는 아주 작은 분수로서 $\epsilon \ll 1$ 이라고 가정한다.

그러면 세로축에 대한 선체표면의 기울기는 작고 \mathcal{E} 의 차수이다.

그래서 선체경계조건 (23)의 법선속도는 $0(\mathcal{E})$ 이다. 선체표면적은 $0(\mathcal{E})$ 로 간주할 수 있으므로 (31)의 첫 번째 항은 교란속도 포텐셜이 $0(\mathcal{E}^2)$ 임을 가르킨다. 더우기 두 번째 항은 선적분과 세 번째 항의 수평교란은 모두 $0(\mathcal{E}^3)$ 이라고 가정할 수 있다. 고차항을 생략하면, 속도포텐셜을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{\partial \phi}{\partial n_Q} G(P, Q) - \phi \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS(Q) \quad (33)$$

Kelvin 소스로서 Green 함수를 취하면

$$G(P, Q) = -\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + G'(x-x', y-y', z+z') \quad (34)$$

이다. 다음과 같이 정의되는 속도 포텐셜의 일부를 고려한다.

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \phi}{\partial n_Q} - \phi \frac{\partial}{\partial n_Q} \right) \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) dS(Q) \quad (35)$$

$S+S^1$ 의 외부에 Green 정리를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n_Q} - \phi_1 \frac{\partial}{\partial n_Q} \right) \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) dS(Q) \quad (36)$$

만약 $\phi = \phi_1 + \phi_2$ 라 두면, ϕ_2 는 주어진 공간에서 조화함수이다. S 와 수평면 $z=0$ 에 의하여 경계지워진 선체내부에 Green 정리를 적용하면,

$$\begin{aligned} & - \iint_S \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n_Q} - \phi_2 \frac{\partial}{\partial n_Q} \right) G(P, Q) dS(Q) \\ & + \int_{L_0} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x'} - \phi_2 \frac{\partial}{\partial x'} \right) G(P, Q) dy' = 0 \end{aligned}$$

을 얻는다. 두 번째 항은 세장체의 가정때문에 생략할 수 있다. 고로 (33) 대신에 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial n_Q} G(P, Q) - \phi_1 \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS(Q) \quad (37)$$

세장체의 가정을 고려하면, 선체근처에서 속도포텐셜에 대한 표현을 간단히 할 수 있다. (36)을 x' 에 대하여 부분적분하고 고차항을 생략하면,

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{C(x)} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} - \phi_1 \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \ln \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{(y-y')^2 + (z+z')^2} dS(y', z') \quad (38)$$

이 된다. 여기서 $C(x)$ 는 x 에서 각 횡단면에 대한 선체표면의 Contour이다.

ν 는 횡단면에서 $C(x)$ 에 대하여 외향법선방향이며, $dS(y', z')$ 는 $C(x)$ 에서 길이요소다. 포텐셜 ϕ_2 는 (37)에서 (36)을 빼면 얻어지고

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial n_Q} G'(P, Q) - \phi_1 \frac{\partial G'(P, Q)}{\partial n_Q} \right] dS(Q) \quad (39)$$

이다. 세장체에 대한 표현을 얻기위하여, G' 에 대한

점근전개를 이용하면 ϕ_2 에 대하여,

$$\begin{aligned} \phi_2 = & \frac{1}{4\pi} \int dx' [\pi K_0 H_1(K_0|x-x'|) + \\ & \{ \pi K_0 Y_1(K_0|x-x'|) + 2|z-z'|^{-1} \} \\ & \{ 1 + 2Sgn(x-x') \} - 2K_0] \int_{C(x')} V_n dS \\ & + \frac{2\sqrt{K_0}}{\pi} \int dx' \int_{\delta(x')}^{\infty} V_z(x', y') E(x-x', \\ & y-y', z) dy' \end{aligned} \quad (40)$$

을 얻는다. 여기서 H_1 은 Struve함수이고 Y_1 은 제2종 Bessel 함수이다⁶⁾.

결론

코너에서의 특이점이 weak 표면 특이점이라면, 반감수 반원에 대한 Neumann-Kelvin 문제는 코너에서 속도가 유제인 한 개의 최소특이해를 가진다. 그러나 왜 유제인 조건이 코너에서 부과되어야 하는가 하는 명백한 물리적 이유는 없다. 코너는 정체점이 되고 여기서 섭동속도는 전진속도와 같다. 그리고 코너에서의 선형화는 타당하지 않다. 그러나 우리는 이러한 것을 무시하고 코너에서 이 점을 가져야만 한다고 제안한다. 따라서 이것이 코너에서 약하거나 강한 특이점을 가지는 섭동방정식의 해를 찾기 위한 적당한 이유이다.

그러나 어떤 특이점이 적당한가를 결정하는 명확한 방법은 없다. Ursell은 그의 연구에서 (19)식의 p 와 q 를 0으로 두어 유일해를 결정하기도 하였다.

Suzuki는 자유표면에 대하여 에너지보존을 취하여 유일해를 확정시키는 부가적인 조건을 제시하기도 하였다.

$G(\xi, \eta; z, y)$ 는 $y > 0$ 일 때 (x, y) 에서 소스를 나타내며, 실제로 $G(\xi, \eta; a, 0)$ 는 weak 표면특이점이다. 최소특이해에 대한 표현은 (11)로부터 추론할 수 있고 각각의 코너에서 불연속 weak 표면특이점과 함께 소스의 연속적인 분포로 구성된다. Maruo는 세장체 이론의 적용으로부터 유도된 근사방법을 소개하였는데 이것은 Neumann-Kelvin 문제의 Kernel 함수에 대한 근사와 기본적으로 같다.

비록 왜 최소특이해가 2차원에서 택해야 하는가에 대한 명확한 물리적인 이유는 없더라도, 어떻게 상응하는 유제조건을 3차원에도 적용할 수 있는가 하는 것이 최근 연구과제 중의 하나이다. Ursell의 연구에 의한 경험은 앞으로 완전한 비점성 3차원 문제의 취급에 사용될 것이고, Maruo의 세장선 근사와는 다른 방법으로 3차원 Neumann-Kelvin 문제를 해석할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Brard, R.(1972): The representation of a given ship form by singularity distibutions when the boundary condition on the free sruface is linearized. Journ. Ship Res., 16, 79.
2. Lamb, H.(1932): Hydrodynamics. 6th Ed. Cambridge Univ. Press.
3. Maruo, H.(1982): New approach to the theory of slender ships with forward velocity. Bull. of Yokohama National Univ. Vol.31.
4. Ursell, F.(1949): On the rolling motion of cylinders in the surface of a fluid. Quart. J. Mech. Appl. Math. Vol. 2.
5. Ursell, F.(1980): Mathematical notes on the two-dimensional Kelvin-Neumann problem. 13th Symposium on Naval Hydrodnamics. Vol.2.
6. Watson, G.N.(1966): A Treatise on the theory of Bessel Function. Cambridge Univ. Press. 2nd Ed., 804.
7. Wehausen, J.V. and E.V. Laitone (1960): Surface Waves. Handbuch der Physik. Vol. 9, Berlin: Springer.