

# 半球形殼의 挫屈現象에 對한 應力解析 및 影響因子에 關한 研究

金 永 守\* · 安 斗 星\*

## A Study on the Stress Analysis and Parameters of Buckling in Spherical Shell

Young-Soo KIM and Du-Seung AHN

In this paper, stress distributions were given in consideration of bending effects in hemi-spherical shell and a modified equation of buckling load was represented with implicating the effects of plastic deformations and shape parametrs.

Especialy, the distributions of shell near it's vertex were analyzed numerically, according to several cases of loading. For the sake of more good estimation of plastic dissipating energy, we used the yield-line method from plate theory.

The modified criterion of buckling,  $P_{cr}^*$ , that was suggested in this study, was applied to SUS 302 stain-less steel hemi-spherical shell which had it's Poisson's ratio and Young's modulus with 0.33 and 19700 kg/mm<sup>2</sup>.

From some experiments and comparisons with other results, we suggested the critical buckling-load-equation with  $P_{cr}^* = 2E^* \cdot (t^2/a^2) \cdot \{3(1-\nu^{*2})\}$  and computed the buckling initiation load with this equation. Because these result from modified criterion have more coincidence than previous one, we prospect this equation can be magnified it's utilities to the other materials.

### 緒 論

一般的으로 가스탱크, 보일러 등의 耐壓容器 및 冷凍施設의 冷却塔의 수조 등은 薄板을 成形하여 球形 또는 橢圓體形의 殼(shell)으로 製作하고 있으며, 이러한 殼의 內外面에 分布荷重 또는 集中荷重이 作用하여, 그 값이 臨界值를 초과 하게 되면 殼의 表面이 變形을 받아 굴곡을 갖게 된다. 이 現象을 殼의 挫屈(buckling of shell)現象이라 한다.

現在까지 殼의 挫屈에 關한 研究는 Kármán等<sup>1)</sup>의 外壓에 依한 殼의 挫屈에 대하여 단순해를 구한 것을 시작으로 하여 主로 大型構造物의 設計 및 製作에 應用하였다.

以後, Kaplan等<sup>2)</sup>의 彈性挫屈에 있어서 급힘효과를 고려한 理論解析과, Evan-Iwanowski<sup>3)</sup> 및 Homewood等<sup>4)</sup>에 依한 集中荷重과 分布荷重이 同時에 作用하는 경우에 대한 研究가 있으며, 最近, Rauch等<sup>5)</sup>의 흠 없는 完全球形 殼의 挫屈에 對한 研究와 아울러 挫屈에 있어서 塑性域과 크리프(creep)의 影響을 고려한 研究가 進行되고 있다.

一般的으로 殼이 集中 및 分布荷重을 받을때 일어나는 挫屈形態는 Fig. 1에 제시된 것과 같이, 그 形態에 따라 左右對稱形, 非對稱形 또는 完全 뒤집힘形(snapping)으로 구분되며, 이러한 挫屈形態는 애초의 殼의 幾何學的 形狀, 荷重作用點의 위치, 殼의 支持方式 및 材料의 力學的 性質 등에 影響을 받는다.

\* 釜山水產大學 : National Fisheries University of Pusan

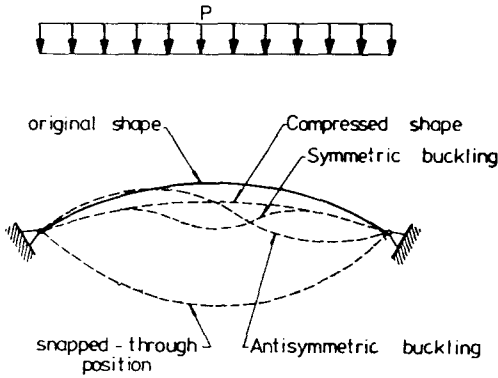


Fig. 1. Examples of buckling pattern in shell.

것으로 알려져 있다.

半球形殼이 挫屈을 일으키는 경우 荷重이 作用함에 따라 半球形殼이 最初와는 달리 점차 橢圓體形의 殼으로 그 모양이 變化하여, 나중 挫屈發生의 순간에 있어서 應力狀態는 初期의 것과는 相異하게 된다.

그러므로 本 研究에서는, 첫째로 이러한 形狀變化를 고려하여 挫屈發生時의 應力分布를 추정하며, 둘째로 一定두께 이상의 殼에서 發生하는 挫屈領域內的 塑性變形에 주목하여, 變形 에너지법에 의하여 非彈性的 挫屈에너지를 計算하고 材料의 變形係數를 殼의 形狀係數의 함수로 가정하므로써 挫屈發生 臨界荷重 判定式을 보완하고자 하며, 이를 實際로 材料에 適用하고, 다른 實驗値와 比較 하여 그 타당성을 밝히하고자 한다.

## 理論解析

### 1. 軸對稱形 殼의 應力解析

曲率半徑이 一定하지 아니한 一般의 軸對稱形의 殼은 橢圓體 形狀의 殼을 포함하여, 그 回轉 中心軸을 長軸, 短軸으로 나눌 수 있는 모든 回轉體 形狀의 殼을 말한다. 이와같은 一般의 回轉體 殼에 있어서 임의의 점 P를 포함하는 殼 表面上的 微小要素의 위치는 Fig. 2에 圖示한 바와같이 現在의 曲率半徑을  $r_1$ 이라 할경우  $P(r, \theta, \phi)$ 로 表示되며 殼의 幾何學的 條件으로부터 다음의 關係가 成立함을 알 수 있다.

$$r = r_2 \sin \phi \quad (1)$$

$$ds = r_1 \cdot d\phi \quad (2)$$

$$dr = ds \cdot \cos \phi, \quad dz = ds \cdot \sin \phi \quad (3)$$

$$dr/d\phi = r_1 \cos \phi, \quad dz/d\phi = r_1 \sin \phi \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\phi} = \frac{r_1}{r^2} \cot \phi \quad (5)$$

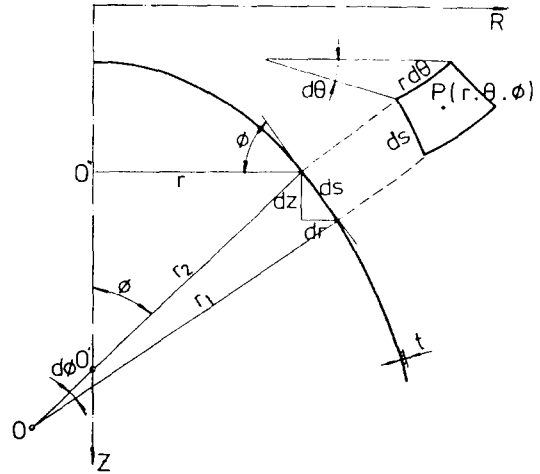


Fig. 2. A brief meridian element of ellipsoidal shell of revolution.

여기서,  $r$  및  $r_2$ 는 要素의 回轉軸과의 垂直거리 및 曲率을 따른 거리를 表示하며, 極座標  $r, \theta, \phi$ 는 各 各 半徑方向(Radial direction), 緯線方向(Hoop direction) 및 經線方向(Meridian direction)成分을 나타낸다.

두께가 曲率半徑에 比하여 충분히 작은 경우, 外力 P의 作用으로 殼에 發生되는 應力들은 Fig. 3에 圖示된 바와 같이  $N_\phi, N_\theta, N_{\phi\phi}, N_{\theta\theta}$ 로 表示되는 平面集合應力들과  $Q_\phi, Q_\theta$ 로 표시되는 表面垂直應力 및  $M_\phi, M_\theta, M_{\phi\phi}, M_{\theta\theta}$ 의 굽힘 모멘트가 發生되므로, 힘의 평형조건식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(r \cdot N_\phi) + r_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(N_{\theta\phi}) - r_1 N_\theta \cos \phi - r \cdot Q_\phi = -rr_1 P_\phi \quad (6 \cdot a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(r \cdot N_{\phi\theta}) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta}(N_\theta) + r_1 N_{\theta\phi} \cos \phi - r_1 Q_\theta \sin \phi = -rr_1 P_\theta \quad (6 \cdot b)$$

$$r_1 N_\theta \sin \phi + r N_\phi + r_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(Q_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r \cdot Q_\phi) = rr_1 \cdot Pr \quad (6 \cdot c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(r \cdot M_\phi) + r_1 \frac{\partial}{\partial \theta}(M_{\theta\phi}) - r_1 M_{\phi\theta} \cos \phi = rr_1 Q_\phi \quad (6 \cdot d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(r \cdot M_{\phi\theta}) + r_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(M_\theta) + r_1 M_{\theta\phi} \cos \phi = rr_1 Q_\theta \quad (6 \cdot e)$$

$$M_{\phi\theta}/r_1 - M_{\theta\phi}/r_2 = N_{\phi\theta} - N_{\theta\phi} \quad (6 \cdot f)$$

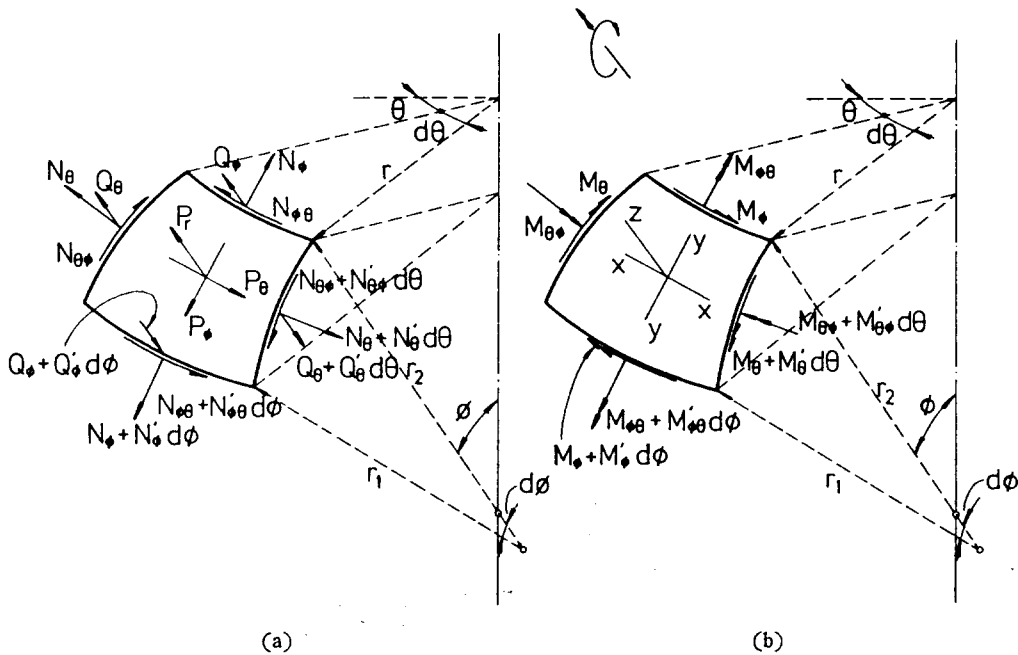


Fig. 3. Equilibrium of spherical shell element.

여기서,  $P_r, P_\theta, P_\phi$ 는 作用外力  $P$ 의 各方向成分이 되며, 이식(6)으로 해결하지 못한 미지응력은 殼의 變形과 變形率의 關係로부터 구할 수 있다.

지금 두께가  $t$ 인 殼의 中立面上的點  $A_0$ 와 또  $A_0$ 로부터 徑의거리  $z$ 만큼 떨어져 있는 점  $A$ 를 잇는 선분  $\overline{A_0A}$ 가 變形을 通하여 이동된 변위량을 同緯線面에 투영하고 그 값의 各方向成分은  $A_0$ 점에 관하여는  $U, V, W, A$ 점에 관하여는  $U_A, V_A, W_A$ 로 表示하면,

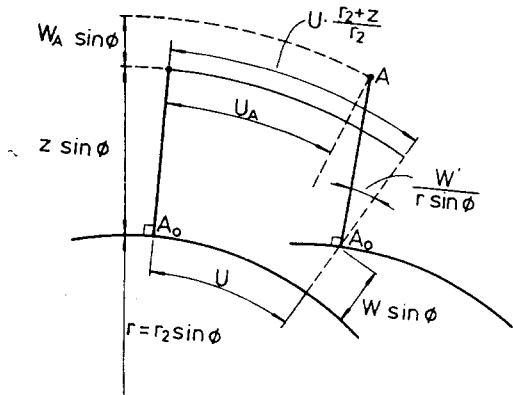


Fig. 4. Displacements of the  $\overline{A_0A}$  line which was projected on the plane of parallel circle.

변형과 변형율의 關係式은 다음의 식 (7)(8)과 같이 쓸 수 있다.

$$U_A = U(r_2 + z)/r_2 - (\partial W / \partial \theta) \cdot z / r \quad (7 \cdot a)$$

$$V_A = V(r_1 + z)/r_1 - (\partial W / \partial \phi) \cdot z / r_1 \quad (7 \cdot b)$$

$$W_A = W \quad (7 \cdot c)$$

$$\epsilon_\phi = \{(\partial V_A / \partial \phi) + W_A\} / (r_1 + z) \quad (8 \cdot a)$$

$$\epsilon_\theta = \{(\partial V_A / \partial \theta) + V_A \cos \phi + W_A \sin \phi\} / \{(r_2 + z) \cdot \sin \phi\} \quad (8 \cdot b)$$

$$\gamma_{\phi\theta} = \{(\partial U_A / \partial \phi) / (r_1 + z)\} - (U_A \cos \phi - \partial V_A / \partial \theta) / \{(r_2 + z) \cdot \sin \phi\} \quad (8 \cdot c)$$

以上에서 표시한 식 (6), (8) 및 殼이 軸對稱이고 荷重의 分布도 역시 軸對稱이라는 조건으로부터 軸對稱 殼에 軸對稱 荷重의 作用時의 構成方程式(constitutive equation)<sup>6)</sup>은 식 (9)로 表現되며 식 (9)에 나타난  $D$ 와  $K$ 는 각각 材料의 平面變形剛性 및 굽힘 變形剛性을 意味한다.

$$N_\phi = D \cdot [(\partial V / \partial \phi + W) / r_1 + \nu \cdot (V \cos \phi + W \sin \phi) / r] \quad (9 \cdot a)$$

$$N_\theta = D \cdot [(V \cos \phi + W \sin \phi) / r + \nu \cdot (\partial V / \partial \theta + W) / r_1] \quad (9 \cdot b)$$

$$M_\phi = (K / r_1) \cdot [\partial \{(\partial W / \partial \phi) / r_1\} / \partial \phi + \nu \cdot (\partial W / \partial \phi) \cdot \cos \phi / r] \quad (9 \cdot c)$$

$$M_\theta = (K / r_1) \cdot [(\partial W / \partial \phi) \cdot \cos \phi / r + \nu \cdot \partial \{(\partial W / \partial \phi) / r_1\} / \partial \phi] \quad (9 \cdot d)$$

半球形殼의 挫屈現象에 對한 應力解析 및 影響因子에 關한 研究

$$D = E \cdot t / (1 - \nu^2)$$

$$K = E \cdot t^3 / (12(1 - D^2))$$

2. 半球形殼의 應力

殼(Shell)이 長短軸을 갖는 橢圓體 形이 아닌 完全 半球形殼일 경우에는 曲率半徑이 一定하므로 다음 의 식 (10)을 식 (9)에 適用하면 半球形殼의 應力 과 變形度의 關係式은 식 (11)로 주어 진다.

$$r_1 = r_2 = a \quad (10)$$

$$N_\phi = (D/a) \cdot [(\partial V / \partial \phi + W) + \nu \cdot (V \cot \phi + W)] \quad (11 \cdot a)$$

$$N_\theta = (D/a) \cdot [(V \cot \phi + W) + \nu \cdot (\partial V / \partial \phi + W)] \quad (11 \cdot b)$$

$$M_\phi = (K/a^2) \cdot [\partial(\partial W / \partial \phi - V) / \partial \phi + \nu \cdot (\partial W / \partial \phi - V) \cdot \cot \phi] \quad (11 \cdot c)$$

$$M_\theta = (K/a^2) \cdot [(\partial W / \partial \phi - V) \cdot \cot \phi + \nu \cdot \partial(\partial W / \partial \phi - V) / \partial \phi] \quad (11 \cdot d)$$

式 (6·a), (6·b) 및 式 (11·a), (11·b)에서 式 (11)의 모든 조건을 충족시키는 一般式은 다음의 式(12)로 표시되며, 여기서  $\chi$ 는 變形要素의 徑線方向의 回轉角 成分을 意味한다.

$$\begin{aligned} \partial^2 \chi / \partial \phi^2 + (\partial \chi / \partial \phi) \cdot \cot \phi - \chi (\cot^2 \phi + \nu) \\ = (a^2 / K) Q_\phi \end{aligned} \quad (12)$$

$$\chi = \{(\partial W / \partial \phi) - V\} / a \quad (13)$$

또한 式(12)를 式 (6·a) 및 (6·b)의 조건을 적용 하면 式 (14)로 쓸수있으며, 다시  $N_\theta$ 와  $Q_\phi$ 의 關係를

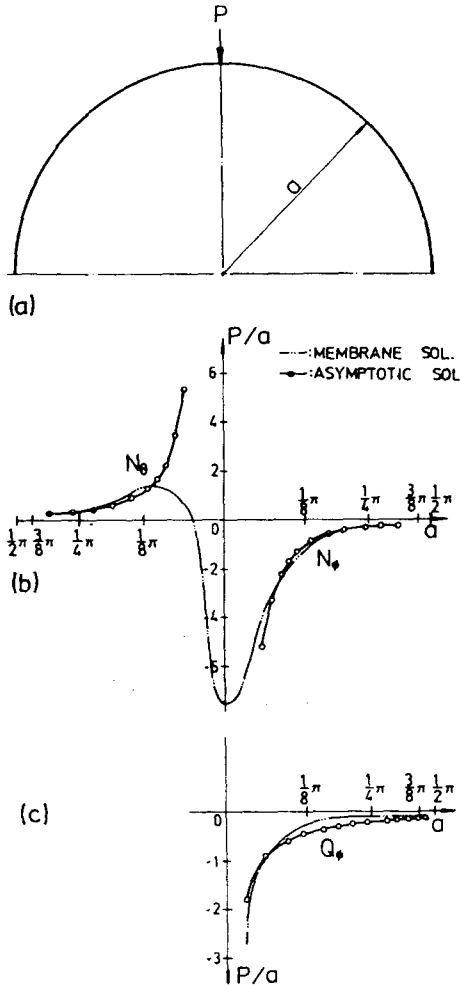


Fig. 5. Stress distribution of spherical shell with concentrated load.

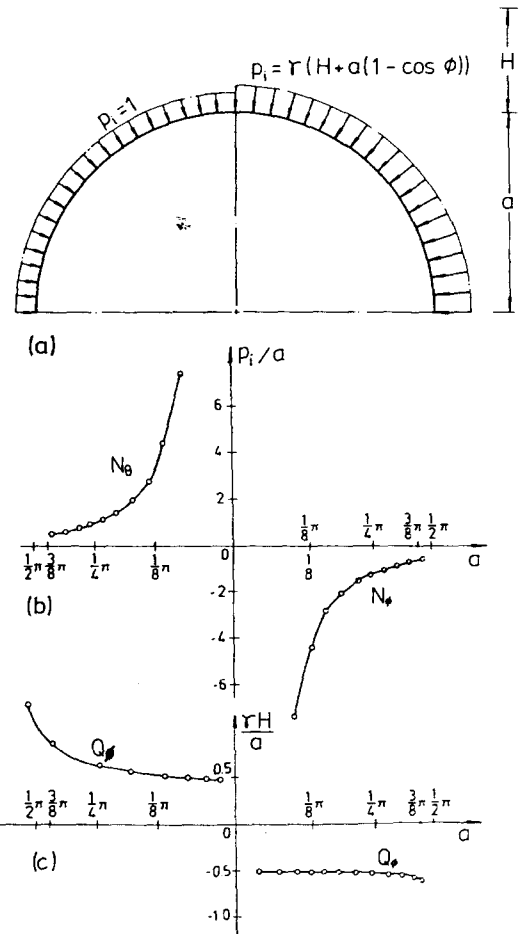
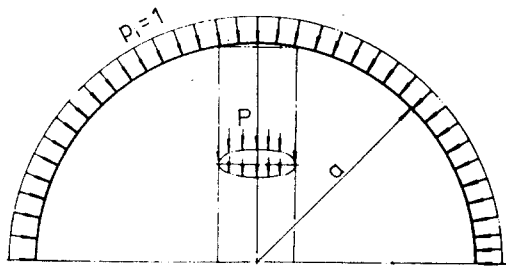
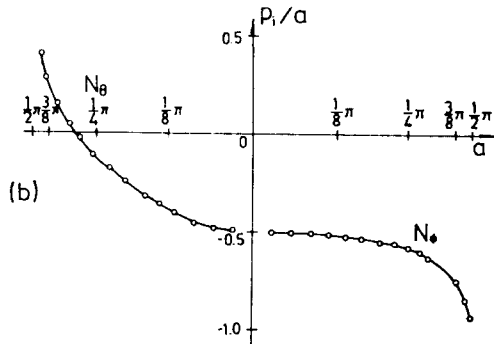


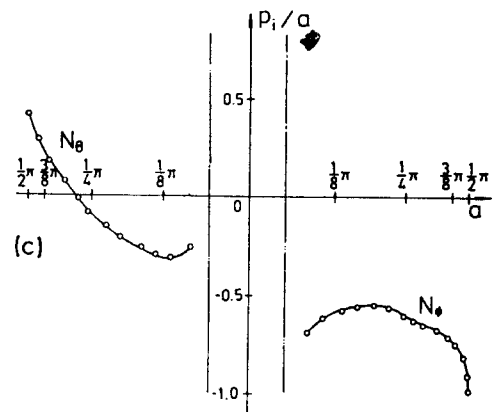
Fig. 6. Stress distribution of spherical shell with equi-distributed or hydrostatic load.



(a)



(b)



(c)

Fig. 7. Stress distribution of small skylighted-shell with equi-distributed vertical load.

利用하면 식 (15)로 표현된다.

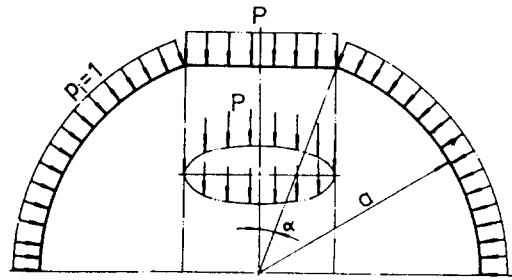
$$a \cdot \chi = a[\partial N_\theta / \partial \phi - \nu \cdot (\partial N_\theta / \partial \phi)] + (1 + \nu) (N_\theta - N_\phi) \cot \phi / \{D(1 - \nu^2)\} \quad (14)$$

$$\partial^2 Q_\phi / \partial \phi^2 + (\partial Q_\phi / \partial \phi) \cot \phi - (\cot^2 \phi - \nu) \cdot Q_\phi = -D(1 - \nu^2) \chi \quad (15)$$

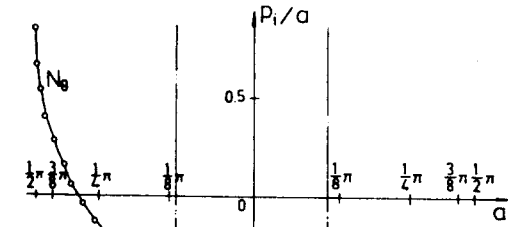
다음과 같은 微分演算子를 導入하면,

$$L(f) = \partial^2 f / \partial \phi^2 + (\partial f / \partial \phi) \cdot \cot \phi - f \cdot \cot^2 \phi \quad (16)$$

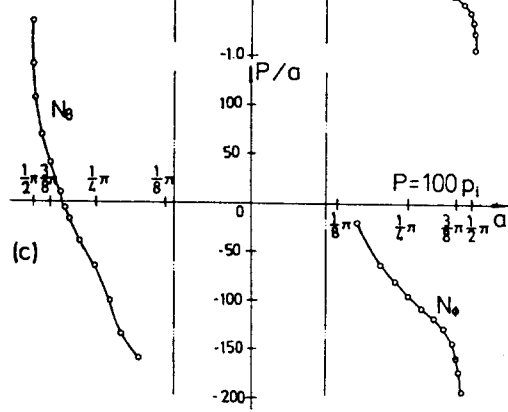
식 (15)는 식 (16)과 또한 形狀因子인  $\Lambda$ 와 外力을 意味하는 함수  $\Phi(\phi)$ 를 도입하면 다음과 같이 식 (18)로 表示된다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8. Stress distribution of large skylighted-shell with equi-distributed vertical load.

$$\Lambda = \left\{ 3(1 - \nu^2) \cdot \frac{a^2}{z^2} - \frac{\nu}{4} \right\}^{1/4} \quad (17)$$

$$LL(Q_\phi) + 4\Lambda^4 \cdot Q_\phi = \Phi(\phi) \quad (18)$$

外力函数  $\Phi(\phi)$ 는 荷重成分  $P_r$ ,  $P_\phi$ 가 存在할 경우에 是 式 (19)와 같으며 外力이 없을 경우에는 0이 된다.

$$\Phi(\phi) = (1 + \nu) \cdot a \cdot L(P_\phi) + a \cdot L(\partial P_r / \partial \phi) - \nu(1 + \nu) \cdot P_r \cdot a - \nu(\partial P_r / \partial \phi) \cdot a \quad (19)$$

上述한 式 (18)은 半球形 殼의 軸對稱 荷重에 對한 完全한 構成方程式 이며 그 解는 角度  $\phi$ 에 따라 몇

가지의 근사해법으로 풀려질 수 있다.

먼저, 半球形殼의 頂點 附近에서의 應力解析을 위해서 角度  $\phi=0$ 인, 극히 미소한 값에 對하여  $\cot \phi$  를 급수전개 하면,

$$\cot \phi = \frac{1}{\phi} - \frac{\phi}{3} - \frac{\phi^3}{45} \quad (20)$$

로 되어 식 (18)은 外力이 없을 경우,

$$\xi^2 \cdot d^2 Q_\phi / d\xi^2 + \xi(dQ_\phi / d\xi) + (\xi^2 - 1) \cdot Q_\phi = 0 \quad (21)$$

$$\xi = \Lambda \cdot \sqrt{2i} \cdot \phi \quad (22)$$

위 식 (21)은 베셀함수(Bessel function)로서 그해는  $\xi$  값에 따라 결정되며 급수해로 주어진다<sup>7)</sup>.

한편, 殼의 頂點을 輻선 벗어난 部分, 즉  $\phi$  값이 클 경우는 식 (16)의 微分 演算子를 다음의 식 (23) 과 같이 간단화 시킬 수 있으므로 식 (18)은 식 (24) 와 같이 表示된다.

$$L(f) = \partial^2 f / \partial \phi^2 \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 Q_\phi}{\partial^2 \phi} \pm 2i\Lambda^2 \cdot Q_\phi = 0 \quad (24)$$

이 경우의 解는 식 (25)와 같이 주어지며 나머지 應力들은 식 (6)에서 구할 수 있다.

$$Q_\phi = C_1 e^{-\Lambda \omega_1 \sin(\Lambda \omega_1 + \psi_1)} + C_2 e^{-\Lambda \omega_2 \sin(\Lambda \omega_2 + \psi_2)} \quad (25)$$

以上과 같이 식 (21) 및 식 (24)로 주어지는 應力의 一般解를 근거로 半球形殼의 各種 軸對稱 荷重에 대한 應力分布를 數值的 근사해법으로 구한것을 Fig. 5~8에 圖示 하였다.

### 3. 彈塑性 挫屈과 그 判定式

Fig. 9는 分布荷重  $P_i$ 를 받는 半球形殼의 挫屈發

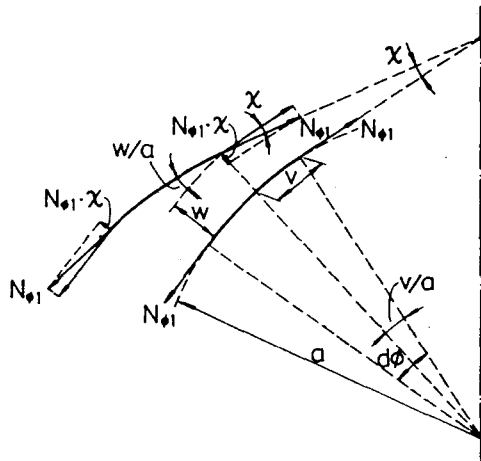


Fig. 9. Displacement of a spherical shell through buckling.

生 前後의 경우에 對하여 圖示한 그림이다. 殼의 微小要素  $A_0, B_0$ 는 挫屈 發生後  $A' B'$ 으로 變形 되며, 이때의 應力  $N_{\phi I}$ 는 前述한 식 (6)과 同一하지만, 단지 挫屈發生時의 것을 意味하며 그 값은 다음과 같다.

$$N_{\phi I} = N_{\theta I} = -\frac{1}{2} P_i \cdot a \quad (26)$$

이 식을 半球形殼의 應力과 變形度 關係式인 식 (11)에 적용하면,

$$\begin{aligned} \partial(N_\phi \sin \phi) / \partial \phi - N_\theta \cos \phi - Q_\phi \sin \phi \\ + \frac{P_i}{2} (\partial W / \partial \phi - V) \sin \phi = 0 \end{aligned} \quad (27 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} N_\phi \sin \phi + N_\theta \sin \phi + \partial(Q_\phi \sin \phi) / \partial \phi \\ + \frac{P_i}{2} (\partial V / \partial \phi \cdot \sin \phi + V \cos \phi) + (\partial^2 W / \partial \phi^2) \cdot \sin \phi \\ + \partial W / \partial \phi \cdot \cos \phi + 4W \sin \phi = 0 \end{aligned} \quad (27 \cdot b)$$

$$\partial(M_\phi \sin \phi) / \partial \phi - M_\theta \cos \phi = a \cdot Q_\phi \cdot \sin \phi \quad (27 \cdot c)$$

로 되며, 이것을 前과 同一하게 解析하고 무차원 常數  $q$ 와  $k$ 를 도입하면 다음과 같다.

$$q = \frac{1-\nu^2}{\lambda_n} + k \cdot \left\{ \lambda_n + 2 + \frac{(1+\nu^2)}{\lambda_n} \right\} = P_i \cdot a / 2D \quad (28)$$

$$\lambda_n^2 = \frac{1-\nu^2}{k} + (1-\nu^2) \quad (29)$$

$$k = K/D \cdot a^2 \quad (30)$$

한편, 에너지법에 의하여 長柱의 彈性挫屈 에서와 동일한 方法으로 半球形殼의 彈性挫屈에서 利用되는 臨界挫屈 荷重을  $P_{cr}$ 로 表示하면<sup>8)</sup>,

$$P_{cr} = \frac{2 \cdot E \cdot t^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot a^2} \quad (31)$$

이 되며, 위식은 臨界荷重在 반경  $a$  및 두께  $t$  등의 形狀因子들과 有關한것으로 表現 하고 있지만, 彈性 領域 内에서는 材料常數  $\nu$ 와  $E$ 는 一定하므로 臨界荷重  $P_{cr}$ 에 影響을 미치지 못한다.

그러나 挫屈이 彈塑性的일 경우에는 形狀因子들은 물론 材料常數들도 變化하므로  $P_{cr}$ 에 影響을 주게 된다. 즉, 彈塑性挫屈에 있어서 材料의 塑性變形 에너지와 크리이프 효과는 고려되어야 마땅한 것이다.

Fig. 10은 殼이 挫屈을 가질때 殼의 材料가 塑性變形을 갖게되는 形狀因子의 범위를 보여주고 있으며, 이 소성영역은 材料에 따라 變하게 된다.

이와같이 彈塑性 挫屈의 發生時 材料가 받는 총 변형에너지는 彈性挫屈을 發生케 하는데 쓰이는, 회복가능한 에너지와 材料의 永久變形을 發生시키는 소모되는, 塑性變形 에너지와의 합으로 쓸 수 있다. 즉, 탄성과열 에너지를  $W_{BE}$ , 塑性挫屈 에너지를  $W_{BP}$ 라 할때, 총 과열에너지  $W_T$ 는 식 (35)로 나타낼 수 있다.

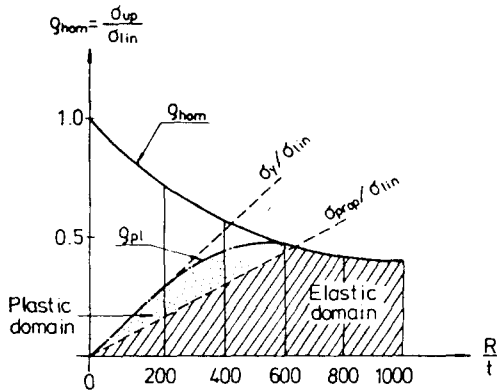


Fig. 10. A figure of plastic domain in spherical shell buckling.

$$W_T = W_{BE} + W_{BP} \quad (35)$$

이식에 나타난 塑性變形 에너지는 平板解析에서 利用되는 塑性降伏線(yield line)을 따른 에너지의 積分法에 依하여 그 量을 추정할 수 있다.

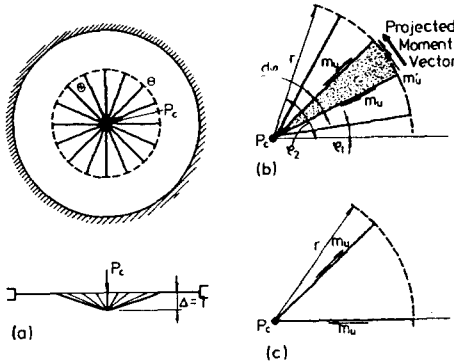


Fig. 11. Yield lines under concentrated load in plate and shell.

위 Fig. 11에서와 같이 고정된 平板에 集中荷重이 作用하여  $\Delta=1$  만큼의 永久變形이 發生 하였다면, 그 에너지는 다음과

$$W_{BP} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (m_u + m_u') \cdot \frac{\delta p}{r} \cdot \Delta = P_c' \cdot \Delta = P_c' \quad (36)$$

같이 계산될 수 있다<sup>9)</sup>. 그러므로 彈塑性性屈에 있어서 臨界性屈荷重式은 식 (31)을 그대로 쓸 수 없으므로 수정되어야 한다. Fig. 10에서 나타난 것에 依하면  $a/t < 800$ 의 범위에서 修正될 必要가 있음을 알 수 있으며, 본 研究에서는 이러한 범위에서 材料常數  $\nu$ 와  $E$ 를 形狀因子  $a$ 와  $t$ 의 함수로 고려하여 다음과 같이 식 (31)을 식 (37)과 같이 수정하였다<sup>10)</sup>.

$$P_{cr}^* = -\frac{2E^*}{\sqrt{3(1-\nu^*{}^2)}} \cdot \frac{t^2}{a^2} \quad (37)$$

$$\nu^* = \nu_P - \left(\frac{a}{t}\right)^{n_1} \quad (38)$$

$$E^* = E_0 - \left(\frac{a}{t} + \eta\right)^{n_2} \quad (39)$$

이식에서  $\nu_P$ 와  $E_0$ 는 소성상태의 프와송비 및 彈性狀態일때의 종탄성계수 이며,  $n_1$   $n_2$  및  $\eta$ 는 材質에 따르는 常數이다.

이와같은 彈塑性 性屈에 있어, 修正된 性屈臨界荷重  $P_{cr}^*$ 값의 실제적 適用의 타당성을 밝히기 위하여, SUS 302 스테레스鋼에 對하여 計算하고, 그 값을 여타의 實驗結果와 比較하였다. 사용된 材質은 다음과 같은 材料常數를 가졌으며,  $\nu^*$  및  $E^*$ 는 식 (38') 및 식 (39')과 같다.

$$\nu : 0.33, E : 19700 \text{ kg/mm}^2, \nu_P : 0.5, n_1 : -0.265, n_2 : 1.25, \eta : 800$$

$$\nu^* = 0.5 - \left(\frac{a}{t}\right)^{-0.265} \quad (38')$$

$$E^* = 1.97 \times 10^4 - \left(\frac{a}{t} + 8 \times 10^2\right)^{1.25} \quad (39')$$

### 比較 및 考察

半球形 殼이 各種 軸對稱 荷重에 依하여 變形될 때 殼에 發生하는 應力을 통하여 그 變化를 추측할 수 있다.

Fig. 5는 半球形 殼이 그 頂點에 集中荷重을 가지는 경우에 平面應力 및 表面剪斷應力을 나타내었다. 이 그림에서 보는 바와 같이 단순막이론(simple membrane theory)에 의한 解는 頂點附近에서 발산함에 비하여 본 결과는 정점부위에서 임의의 값을 나타낼 수 있으며, 이 결과에 따라 변형을 용이하게 추적할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 6의 (a)는 靜水壓荷重(hydrostatic pressure)이 作用한 경우의 平面應力을, Fig. 7의 (b)는 수직 등분포 하중이 作用한 경우의 그것을 表示하고 있으며, 이를 比較하면 等分布 荷重의 경우가 平面應력에 있어 좀 더 安定된 變化를 보임을 알 수 있다. 또한 Fig. 6의 (c)그림은 위 두 경우의 表面垂直 剪斷應力을 比較한 것으로 큰 차이는 없으나, 靜水壓荷重의 경우가 더 安定됨을 보여주고 있다. 특히, 頂點이 편평하게 절단되는 경우에 그 절단원주 半径의 확장에 따른 應力의 變化를 等分布 荷重을 고려하여, Fig. 7의 (c)와 Fig. 8에 나타 내었다. 절단부의 半徑이 커질수록 平面應力들은 급속한 증가를 보이며,

半球形殼의 挫屈現象에 對한 應力解析 및 影響因子에 關한 研究

Fig. 8의 (c)에서 처럼 편경부 원주위에 과다한 荷重을 첨가 하였을 경우의 應力變化는 더욱 加速的으로 증가함을 알 수 있다. 이런 이런 사실로 미루어 半球形殼이 荷重의 作用으로 점차 橢圓體形으로 變形함을 알 수 있으며, 결국, 挫屈 發生時에는 半球形殼의 臨界荷重은 橢圓體殼의 그것으로 대체 되어야 옳은 結果를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

한편, 半球形殼의 彈塑性 挫屈領域에 있어서 기존의 彈性挫屈 臨界荷重式인 식 (31)로 부터 修正된 식 (37)을 適用한 結果는, Fig. 12에 보여진 것처럼 材料常數의 影響을 고려하게 되므로 형상인자가 비교적 작은 범위에서 기존 관정치 보다 實驗値와 더 양호한 一致를 나타 내고있다. Fig. 13은 同一한 式을  $\lambda$ 值에 대하여 표시한 것이며, Fig. 12에서는

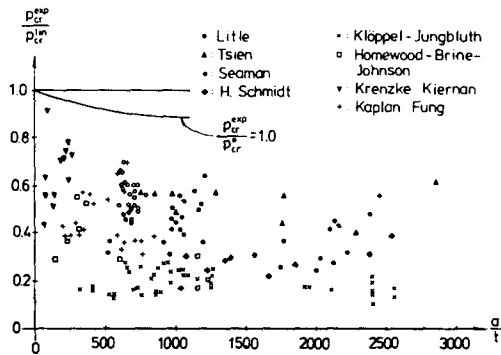


Fig. 12. Experimental results and modified critical buckling load in shell buckling versus  $a/t$ .

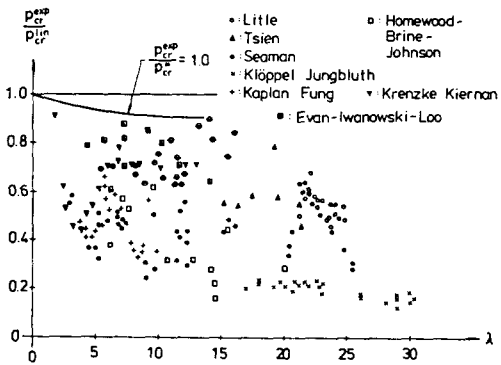


Fig. 13. Experimental results and modified critical buckling load in shell buckling versus  $\lambda$ .

Little<sup>11)</sup> 및 Kaplan<sup>2)</sup>의 결과에 접근함을 알 수 있고, 또, Fig. 13은 Krenzke 등<sup>12)</sup>의 결과와 Evan-Wano-

wski<sup>3)</sup>의 結果에 근사함을 보여주고 있다. 挫屈에서 彈塑性 領域이 共存할때 마땅히 고려되어야 할 部分的 塑性變形 및 크리이프 효과는 앞으로 더 많은 實驗을 통한 研究가 必要하며, 挫屈發生時의 應力의 變化를 예측함에 있어 殼의 頂點附近의 應力分布를 해석하므로써, 더욱 確실한 예측을 할 수 있는 근거를 확보 하였다.

結 論

1. 半球形殼의 分布 및 集中荷重에 依한 挫屈應力解析은 變形된 殼의 形狀에 따라 橢圓體殼의 應力으로 解析함이 타당하다.
2. 一定 限界以下의 形狀係數를 갖는 半球形殼에 對하여서는 材料常數를 形狀係數의 函數로 고려한 수정된 臨界挫屈 荷重으로 彈塑性 挫屈을 判定함이 더 양호한 結果를 준다.
3. 彈塑性 挫屈에 있어서 소모된 塑性變形 에너지를 計算하기 위하여 降伏線을 따르는 에너지법을 利用하면 양호한 結果를 얻을 수 있다.

文 獻

- 1) Kármán, Th. von and H.S. Tsien (1939): The buckling of sperical shells by external pressure. Journ. Aer. Sci., 7, 43-52.
- 2) Kaplan, A. and Y.C. Fung (1954): A nonlinear theory of bending and buckling of thin elastic shallow shells. NACA. TN 3212.
- 3) Evan-Iwanowski, R. M. and T. C. Loo, (1962): Deformation and stability of spherical shells under action of concentrated and uniform load. Tech. Report, Syracuse Univ. Res. Inst. NO. 4, 834-835.
- 4) Homewood, R.H. and A. E. Jr. Johnson (1961): Experimental investigations for the buckling instability of monocoque shells. Proc. Soc. Eexp. Stress Analy. 18, 88-96.
- 5) Rauch, H.E., N. H. Jacobs, and J. L. Marz (1978): Buckling of complete spherical shell and uniform external pressure. Studies in App. Math. 58, 141-158.
- 6) Flügge, W. (1973): Stresses in shells 2nd ed. Springer-Verlag, 324-326.



- 7) Mathews, J. and R.L. Walker (1970): Mathematical methods of Physics, 178-187.
- 8) Kollár, L. and E. Dulácska (1984): Buckling of shells for engineers, 209-219.
- 9) Szilard, R. (1974): Theory and analysis of plates with classical and numerical methods, 571-612.
- 10) Hill, R. (1971): The mathematical theory of plasticity, Oxford Univ. Press, 262-282.
- 11) Litle, W.A. (1964): Reliability of shell buckling predictions, Res. Mono. Cambridge, Mass., M. I. T. press, 60-85.
- 12) Krenzke, M. A. and T. J. Kiernan (1963): Elastic stability of near perfect shallow. Spherical shells. AIAA, J. 1, 2855-2857.