韓國數學教育學會誌<數學教育>
1985. 6, Vol. XXIII, No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1985, Vol. XXIII, No. 2

中學校의 確率教授法에 對한 小考

(教育的 側面을 고려해서)

東義大學校 孫 炳 圭

1. 目標의 設定

學生들은 定性的인 確率概念을 갖고 生活하고 있다. 따라서 우리 教師들은 그 定性的인 確率概念을 出發點으로 해서 確率의 概念을 심어주고 나아가서 이를 數値化하며 定量的 確率概念에 依해서 生活하겠끔 學生들로 하여금 指導하면 되겠다.

2. 人間生活과 確率

우리들은 우리가 살고 있는 世界, 自然界, 外界등에 관해서 具體的으로 보면 物體(예로서 岩石, 草木, 금수, 인간……)의 集合이라기 보다는 事件의 集合으로 가득차 있다. 이 事件 亦是 單純 事件이 아니고 서로 얽켜 있는 離合集散의 集合이다. 따라서 人間의 諸活動은 世界 또는 外界에 對해서 끊임없이 계속하고 있음을 알 수 있다.

즉 어떤 事件의 發生을 願하기 때문에 自身의 힘으로 實現시킬 수 있는 他의 事件을 일으키기도 한다. 그러나 그 結果 自身이 願한 事件이 반드시 일어난다고는 할 수 없는 것이 世上事다.

따라서 우리는 어떤 目的을 達成함에 두가지 以上의 方法이 있을 때 어느 方法이 有利하겠는가를 생각한 다음 行動하기 마련이다. 이는 成人의 社會는 勿論, 아이들 世界에서도 흔히 볼 수가 있다.

벌써 여기에 確率의 觀念이 있는 증거다. 單只 確率이란 用語를 使用하지 않고 數値로 表現된 確率을 안쓰고 있을 뿐이다.

3. 定性的 確率과 定量的 確率

A學生은 將來性이 있다(없다), B學生은 期待되는 바 크다(적다), 이 事業은 將來性이 있다(없다), 이 길을 가면 아마 그 사람을 만날 것이다(만날 수 없다) 등 定性的 確率은 數없이 많다. 여기서 말하는 定性的 確率은 數値化되어있지 않은 確率로 定義하겠다.

어떤 問題가 自身의 問題이거나 또는 어떤 일을 하고 아니하고의 決定을 自身을 위해서 하며, 이로 因한 結果(利害·得失)가 自己에게만 限定될 때 例로서 結婚問題, 住居問題, 就職問題 등 選擇如何에 따라 將來에 影響을 끼치는 問題에 對해서는 우리들은 그의 定性的 確率에 依支 한다.

그런데 이러한 確率概念이 어떻게 해서 생기며, 또한 이러한 確率의 比較가 되는 것은 오로지 各 個人의 經驗과 學問에서 오는 것이다. 過去 氣象臺가 없을 때도 漁夫들은 하늘의 模樣만 보고 그날의 日氣를 點칠 수 있는 것은 그들 나름대로의 經驗과, 經驗의 集積에서 얻은 知識이라고 생각된다.

그러나 問題가 自己에게만 局限되는 것이 아니고 他人에게 까지 利害關係가 미칠때는 自身의 主觀的인 確率, 定性的 確率만으로서는 일을 決定할 수 없다. 따라서 누구나가 수긍할 수 있는 數値化된 確率, 즉, 定量的 確率이 必要하게 된다.

4. 定量的 確率

確率을 數値로 나타내는 데는 普通 다음 4가지로 할 수 있겠다.

a) 도박을 걸어서 하는 方法
b) 비슷한 程度로 일어나는 경우의 數를 헤아려서 하는 方法

c) 어떤 集團에 있어서 特性, 性質을 갖는 사람의 數를 헤아려서하는 方法

d) 많은 試行에서 觀察된 頻度에 依한 方法

위의 4가지 중

a)는 A, B 두 team의 試合에서 甲은 A에 5, B에 3을 걸고, 乙은 A에 4, B에 6을 걸었다고 하자. 이때 甲은 A가 B에 이길 確率은 $\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$로 評價했고 乙은 B가 A에 이길 確率은 $\frac{6}{4+6}=\frac{6}{10}$으로 評價한 셈이다. 보다 中學生이 알기 쉬운 例로서.

「來日 日氣는 十中九는 비다」라고 했을 때, 來日 日氣는 비가 올 確率이 0.9라고 한 것과 다름이 없다. 다시 말해서 비에 9, 맑음 또는 흐림에 1을 건 셈이다. 그런데 指導하는 敎師의 立場에서 可能한 限 金錢에 도박을 거는 例는 避하는 것이 좋겠다. 왜냐하면 우리 주변에는 너무나 많은 요행심을 일으키는 일들이 많으며 이 또한 자라나는 어린 學生들에게 좋지 않는 影響을 미치기 때문이다.

b), d)는 自明한 일이고. c)는 바구니 안에 1에서 10까지의 番號票가 들어 있을때 한장을 집어낼때 素數番號일 確率은 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$이고 짝수 번호일 確率은 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$이다. 이러한 方法으로 確率을 數値化하면 統計的 問題를 다룰때 便利하다.

5. 確率의 一般性과 特殊性

例로서 "銅錢을 던져서 겉(表)이 나올 確率은 $\frac{1}{2}$이다"라고 할때 이는 어떤 銅錢을 던져도 같다는 뜻이다. 그렇다면 어떤 銅錢에 對해서도 이 命題가 참(眞)임을 證明하지 않으면 아니된다. 그러나 이것은 證明될 수 없고, 또한 證明할 心要도 없다. 單只 特定의 銅錢에 對한 確率일뿐이다. 위에서 말한 a), b), c), d)의 方法은 어느 하나도 이러한 特定의 具體的 事件에 對한 確率을 評價하는 것이 못된다.

다만 위에서 使用한 銅錢의 形狀이 均一하고 均質이라고 판단만 되면 우리는 겉(表)이 나올 確率은 $\frac{1}{2}$이다라고 할 수 있으므로 證明의 要不要는 問題되지 않는다.

6. 確率計算

確率問題는 單純한 事件의 確率을 評價(數値化)하는 問題와 複合事件의 確率을 計算하는 問題의 두 가지이다. 特히 中學校 課程에서는 前者에 注力하며 後者에 對해서는 敎師의 裁量과 學生의 能力에 期待할 수 밖에 없다고 본다. 現在의 敎科書도 대충 여기에 맞추어 編著되어 있다.

한 例로서 바구니 안에 같은 種類의 赤球 7個, 靑球 5個, 白球 8個가 있을때 여기서 任意로 한개 집었을 때 赤球일 確率, 靑球일 確率, 白球일 確率을 質問한 다음, 赤球 또는 白球일 確率을 答하게 하는 것은 그다지 어려운 일은 아닐 것이다. 여기서 한 걸음나아가서 처음에 赤球를 내고 다시 이것을 넣은 다음 또 다시 赤球를 뽑을 確率을 設問했을 때 $\frac{49}{400}$라고 個中에는 答하는 學生이 있겠지마는 $\frac{49}{400}=\frac{7}{20}\times\frac{7}{20}$의 곱으로 되어 있음을 理解시킴은 多少나마 힘드는 일이겠지만 容易한 例題를 써서 여기까지는 解決해 보는 것이 좋지 않나 생각된다.

7. 期待値

確率의 數値化에 그치면 確率學習의 보람이 적다. 여기에 期待値 槪念이 追加되므로 비로소 確率學習의 보람이 있다.

이 期待値 指導에는 敎育的 側面에서 볼 때 몇가지 어려운 點도 없지 않다. 내기(도박) 問題로서 期待値를 考慮하면 比較的 理解는 容易하나, 敎育的 側面에서 보아 권장할 바 못된다고 思慮되며 따라서 例의 選擇에 있어서 可能하면 도박성을 배제한 例題를 提示하면 좋겠다만 不得已 도박성 例를 使用 할때는 도박성이 社會惡을 造成함을 잘 納得시킨 후 處理함이 어떨까 생각된다. 期待値의 數學的 定義는 簡單明白하게 說明함도 必要하다.

變量 X가 取할 수 있는 값이 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 個이고 이 各各의 값에 對해서 確率이 各 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ $(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$일때 $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$를 變量 X의 期待値라고 한다. 이렇게

明하면 아마 理解하는 學生은 그다지 많지 않을 것이다. 그러나 이것을 具體的으로 數値의 보기로서 說明하면 쉽게 理解시키리라 믿는다. 例로서 商店에서 어느 特定商品의 팔리는 個數를 每日每日 觀察해서 다음 表를 얻었다고 하자 但, X는 하루에 팔려나간 個數.

X	0	1	2	3	4	5	計
確 率	0	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1	1

즉, $0\times0+1\times0.1+2\times0.4+3\times0.3+4\times0.1+5\times0.1=2.7$을 X의 期待値라고 說明하면 보다 容易하게 理解되리라 믿는다.

그런데 이 期待値 自體가 어디에 어떤 目的으로 使用되는가를 納得시킬 必要가 있다.

이때의 指導의 急所는 우리의 生活周邊에 期待値를 必要로 하는 일들이 적지않게 散在해 있다는 事實을 알릴 必要가 있으며, 이것 亦是 學生周邊의 問題를 다루면서 理解와 納得이 必要하다.

이때 注意할 것은 期待値의 定義에 依해서 確率은 모두 陽이고 合은 1임을 周知시켜야 한다.

8. 期待値를 必要로 하는 問題

學生들에게 期待値의 必要性을 認識시키는데는 다음과 같은 問題들이 있다.

(문 1) 지금 A, B 두장의 福券에 對해서 당첨確率은 A가 0.1, B는 0.2, 당첨금액은 둘다 1,000원 이라 하자. 이때 어느 福券을 가지겠는가?

(문 2) 위의 경우 A는 1,000원, B는 1,500원, 당첨 確率은 A, B 모두 0.05라고 할 때는 어떠할까?

(문 3) 위의 경우 A에는 2,000, B에는 5,000, 당첨 確率은 A는 0.1, B는 0.04라고 했을때 어느 쪽을 취하겠는가?

위의 諸問題에서 (문 1), (문 2)에 對해서는 大部分의 學生들은 金額이 같으므로 確率이 큰 쪽을 取한다.

確率이 같으므로 金額이 큰쪽을 取한다고 答할 것이다. 즉, 金額의 多少에 關心을 갖는 學生과 確率이 크고 적은데, 關心을 갖는 學生에 따라 差異를 發見할 수 있다. 그러나 다음과 같은 問題를 提示하면 學生들의 答은 모두 一致할 것이다.

(문 4) 金額은 같으나 確率이 다를때

(문 5) 確率은 같으나 金額이 다를때

앞의 (문 3)에서 金額과 確率의 곱을 만들어서

A는 $2,000\times0.1=200$원

B는 $5,000\times0.04=200$원

이 되므로 어느쪽을 擇해도 같다고 理解시킴도 좋을 것이다. 여기서 A에 對해서 $2,000\times0.1=200$원이 A를 뽑았을 때 받는 金額의 期待値라고 說明하는 것보다는 A福券에 당첨되면 2,000원을 받을 수 있으나, 당첨이 안되면 한푼도 받을 수 없으므로 A福券을 가질 때 2,000원이 들어올 確率은 0.1이고 한푼도 없을 確率은 0.9이므로 A福券을 가진 사람의 돈의 期待値는 定義에 따라서 $2,000\times0.1+0\times0.9=200$으로 計算해서 說明해줌이 보다 賢明한 方法이 아닌가 생각된다. 또 한가지 例로서

例. A, B 두바구니에

바 구 니	一 등	枚 數	二 등	枚 數
A	1,000원	3	300원	997
B	5,000원	2	200원	998

위 表와 같이 들어 있을때 어느 바구니에서 뽑을 것인가? 이때 學生中에는 A바구니에서 平均 302.1원

즉, $\dfrac{1,000\times3+300\times997}{1,000}=302.1$원, B바구니에는 平均 $209.6원=\dfrac{5,000\times2+200\times998}{1,000}$ 이므로 A바구니에서 뽑겠다고 答하는 사람이 있을 것이요 또한 (문 3)에 한 것과 같이 確率을 써서,

$$A\text{에는 } 1,000\times\frac{3}{1,000}+300\times\frac{997}{1,000}=302.1\text{원}$$

$$B\text{에는 } 5,000\times\frac{2}{1,000}+200\times\frac{998}{1,000}=209.6\text{원}$$

이므로 A에서 뽑겠다고 對答하는 學生도 있을 것이다. 비록 前者가 學生들에게 理解가 쉽게 納得 되더라도, 實際指導에 있어서는 後者를 擇

해서 指導함이 바람직하리라 믿는다.

이렇게 해서 結局은 期待値의 比較가 우리가 뽑을 심지의 좋고 나쁨을 決定하는 手段이 됨을 理解시킴도 또한 重要한 일이다.

이렇게 하므로서 學生들에게 確率에 對한 工夫 意慾을 북돋워 줌도 한가지 授業方法이 아닌가 思慮된다.