

線型變斷面部材의 剛度매트릭스들의 計算上 誤差

Computational Errors in the Elements of Stiffness Matrix for Tapered Members

李 庸 友*
Lee, Yong Woo

Abstract

The closed form of the stiffness matrix is derived in terms of closed forms of integrals for analyses of plane frame members containing linerly tapered members with the cross section of thin-walled tube. The series expansion forms of these are also developed to study the errors in the closed form of the stiffness matrix. The useful limits of the closed form of integrals are defined in terms of the relative taper.

要 旨

얇은 管形斷面을 갖는 線型變斷面部材를 包含하는 構造物의 解析에 利用되는 剛度매트릭스를 定積分을 使用하여 誘導하였다. “整形積分式”으로 表現된 매트릭스 要素에 數值的 不安定을 주는 要因을 發見하고, 그 誤差를 살펴 보기 위하여 定積分의 級數解도 求하였다. “整形積分式”으로 表現된 定積分의 使用範圍는 相對傾斜에 依하여 規定하였다.

1. 序 論

部材의 길이에 따라 分布하는 應力의 形態와 一致하도록 部材의 模樣을 決定하는 것이 材料의 效果的 使用方法일 것이다. 그러나, 이러한 것은 實際의 施工에서 部材의 加工이 複雜하여 非經濟性을 띄게 되므로 部材의 길이 方向으로 直徑 또는 斷面의 높이가 一次方程式으로 表現되는 線型變斷面部材(linerly tapered member or wedge member)가 構造物의 最適設計를 위하여 흔히 使用된다.

變斷面部材를 包含하는 構造物에 對한 應力, 變形 및 安全性의 解析은 均一斷面部材(prisma-

tic member)에 對한 경우보다 根本적으로 어려우므로, 오직 간단한 幾何學的 形狀, 境界條件과 荷重狀態에 한하여 다만 소수의 正確한 解가 알려져 있다^(1~5). 複雜한 構造物의 解析은 有限要素法^(6,7), 有限差分法⁽⁸⁾, 또는 均一斷面部材의 剛性要素를 使用하는 近似解法이 使用되어 왔다. 근래에는 變斷面部材를 위한 剛度매트릭스 要素들의 表現이 誘導되어 있다⁽⁹⁾.

一般的으로 實際의 構造物에 使用되는 部材의 斷面傾斜는 대체로 매우 적은 값이 使用되며, 傾斜가 어떤 限界 이하로 적어지면 線型變斷面部材를 위하여 얻어진 剛性要素들은 數值的으로 正確性を 잃게 된다. 그러므로, 變斷面部材를 包含하는 構造物의 解析은 매트릭스解法으로 電算機를 使用하여 解析할 때, 實數 計算에 使用되는

*正會員·檀國大學校 工科大學 副教授

電算機의 有效數字 소지능력에 따르는 斷面傾斜와 剛性要素들의 數值的 安全性이 檢討되어야 할 것이다.

2. 剛度 매트릭스

線型變斷面部材의 剛性要素의 表現들은 均一斷面部材와 같은 方法으로 誘導할 수 있을 것이다. 그러나, 이 剛性要素들은 모든 斷面形狀에 對하여 一般의인 式으로 表現할 수 없으며, 各各의 斷面 모양에 따라 求하여야 한다.

數學的 모델로 理想化하기 위하여 보의 理論에 適用하는 假定들과 모든 荷重은 部材要素의 端部에만 作用한다고 假定한다. 部材要素의 內部에 作用하는 分布荷重들은 要素의 端部에서 等價荷重으로 바꾸어 作用시킨다. 要素의 端部に 作用하는 굽힘 모우멘트는 S_1 과 S_4 , 軸力은 S_2 와 S_5 , 그리고 剪斷力은 S_3 과 S_6 로 부르기로 한다. 이에 해당하는 端部の 變形은 $A_1 \dots A_6$ 이다. 이 힘들과 變形들의 陽의 方向은 그림 1에 보는 것과 같다.

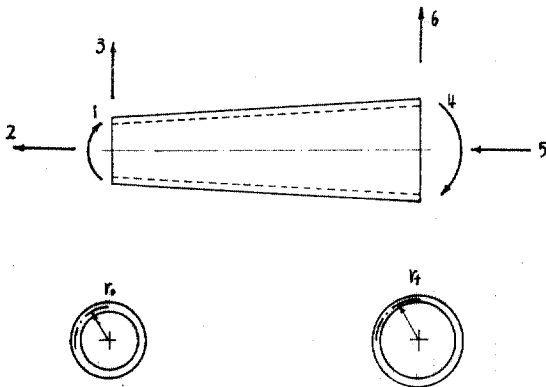


그림 1. 線型變斷面部材

外部로부터 荷重을 받는 部材要素의 變形曲線에 關聯된 微分方程式⁽¹⁰⁾을 세우고 部材 兩端의 境界條件에 對하여 풀면 各各의 剛性要素들은 求하여 질 것이다. 軸力에 對한 微分方程式은

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{EA_x} \quad (1)$$

剪斷과 굽힘 모우멘트에 對하여는

$$\frac{d}{dx} \left(EI_x \frac{d^2v}{dx^2} \right) = -F, \quad (2)$$

表 1. 剛度 매트릭스 要素

$K_{1,1} = \frac{EI_0}{L} \cdot \frac{V}{\text{Det}}$
$K_{1,3} = \frac{EI_0}{L^2} \cdot \frac{U}{\text{Det}}$
$K_{1,4} = \frac{EI_0}{L} \cdot \frac{U-V}{\text{Det}}$
$K_{1,6} = -\frac{EI_0}{L} \cdot \frac{U}{\text{Det}}$
$K_{2,2} = -K_{2,5} = K_{5,5} = \frac{EA_0}{L} \cdot \frac{1}{S}$
$K_{3,3} = -K_{3,6} = K_{6,6} = \frac{EI_0}{L^3} \cdot \frac{T}{\text{Det}}$
$K_{3,4} = -K_{4,6} = \frac{EI_0}{L^2} \cdot \frac{T-U}{\text{Det}}$
$K_{4,4} = \frac{EI_0}{L} \cdot \frac{T-2U+V}{\text{Det}}$

$$S = \int_0^1 \frac{d\xi}{(1+a\xi)}, \quad T = \int_0^1 \frac{d\xi}{(1+a\xi)^2}, \quad U = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{(1+a\xi)^3}$$

$$V = \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1+a\xi)^3}, \quad \text{Det} = TV - U^2$$

$$EI_x \frac{d^2v}{dx^2} = -M. \quad (3)$$

윗 式에서 E 는 彈性係數이며, u 와 v 는 各各 軸方向의 變形과 部材의 처짐이고, M 과 F 는 各各 굽힘 모우멘트와 剪斷力이다. A_x 와 I_x 는 部材의 原點으로부터 x 거리에 있는 임의의 面積과 斷面二次모우멘트이다.

두께가 얇은 管의 경우, 面積과 斷面二次모우멘트는 다음과 같이 表現된다⁽¹¹⁾.

$$A_x = A_0(1+a\xi), \quad (4)$$

$$I_x = I_0(1+a\xi)^2, \quad (5)$$

$$a = \frac{r_1 - r_0}{r_0}, \quad \xi = \frac{x}{L}$$

原點에서의 面積과 斷面二次모우멘트가 各各 A_0 와 I_0 로 나타냈으며, 部材의 길이는 L 로 表示하였다. r_0 와 r_1 는 各各 原點과 終點에서 部材의 平均半徑이다. 그리고, a 는 無單位化(dimensionless form)한 部材의 相對傾斜이다.

斷面의 性質, (4)와 (5)를 變形의 微分方程式 (1)~(3)에 代入하고 各各의 自由度(degree of freedom)에 해당하는 境界條件을 適用하면 表 1에서 보는 바와 같은 剛度 매트릭스가 얻어질 것이다. 여기서 기호로 使用된 定積分들(S, T, \dots, X)의 表現은 一般化하고 普遍性을 갖게 하기 위

表 2. “整形積分式”에 의한 計算값

	CYBER 170				ECLIPSE-M600			
	S	V	W	X	S	V	W	X
.1D-5	.10000D+01	.33333D+00	.25007D+00	-.14750D+03	.10000D+01	-.81934D+02	.24680D+09	-.49360D+15
.2D-5	.10000D+01	.33333D+00	.25000D+00	-.42981D+01	.10000D+01	-.20234D+02	.30850D+08	-.30850D+14
.3D-5	.10000D+01	.33333D+00	.25000D+00	-.37687D+00	.10000D+01	-.58360D+01	.91694D+06	-.61129D+12
.4D-5	.10000D+01	.33333D+00	.25000D+00	.66779D-01	.10000D+01	-.13389D+01	.12542D+07	-.62709D+12
.5D-5	.10000D+01	.33333D+00	<u>.25000D+00</u>	.15755D+00	.10000D+01	-.11810D+01	.90860D+06	-.36344D+12
.6D-5	.10000D+01	.33333D+00	.25000D+00	.18342D+00	.10000D+01	.10409D+00	.11462D+06	-.38206D+11
.7D-5	.10000D+01	.33333D+00	.25000D+00	.19255D+00	.10000D+01	-.50872D-01	.16466D+06	-.47045D+11
.8D-5	.10000D+01	.33333D+00	.25000D+00	.19629D+00	.10000D+01	-.84737D-01	.15677D+06	-.39194D+11
.9D-5	.10000D+01	.33333D+00	.24999D+00	.19800D+00	.10000D+01	.23145D+00	.33961D+05	-.75468D+10
.1D-4	.10000D+01	.33333D+00	.24999D+00	.19886D+00	.10000D+01	.17679D+00	.46962D+05	-.93923D+10
.2D-4	.99999D+00	.33332D+00	.24999D+00	.19997D+00	.99999D+00	.32194D+00	.17071D+04	-.17069D+09
.3D-4	.99999D+00	.33333D+00	.24998D+00	.19998D+00	.99999D+00	.33237D+00	.94801D+02	-.62034D+07
.4D-4	.99998D+00	.33330D+00	.24998D+00	.19998D+00	.99998D+00	.33046D+00	.21362D+03	-.10668D+08
.5D-4	.99998D+00	.33330D+00	.24997D+00	.19997D+00	.99998D+00	.33236D+00	.56200D+02	-.22380D+07
.6D-4	.99997D+00	.33329D+00	.24996D+00	<u>.19997D+00</u>	.99997D+00	.33305D+00	.12067D+02	-.39391D+06
.7D-4	.99997D+00	.33328D+00	.24996D+00	.19996D+00	.99997D+00	.33268D+00	.26186D+02	-.74104D+06
.8D-4	.99996D+00	.33327D+00	.24995D+00	.19996D+00	.99996D+00	.33300D+00	<u>.10656D+02</u>	-.26015D+06

하여 無單位로 求하였으며 附錄에 실려 있다.

3. “整形積分式”(Integral in Closed Form)의 不定數值的 不正確性

定積分을 積分한 후에 等符號의 오른편에 나타나는 表現을 “整形積分式”이라고 부르기로 한다. 定積分 S, T, U와 V는 剛性要素의 表現에 사용되고 W와 X는 等價荷重의 表現에 나타나게 되므로, 이것들의 正確性은 線型變斷面材를 包含하는 構造物의 解析에 매우 重要하다.

定積分들 중에서 “整形積分式”의 表現에 自然對數가 나타나는 것들은 計算에서 問題點을 안고 있다. 이것을 提示하기 위하여 剛性要素의 表現에 사용된 S와 V를 例로서 이곳에 적어보면,

$$S = \int_0^1 \frac{d\xi}{(1+a\xi)} = \frac{1}{a} L_n(1+a),$$

$$V = \int_0^1 \frac{d}{(1+a\xi)^3} = \frac{L_n(1+a)}{a^3} - \frac{2+3a}{2a^2(1+a)^2}.$$

整形積分式들은 相對傾斜 a를 變數로 하는 函數로 나타난다. 만일, a=0 이라면, S=1 이고 V=1/3이 되는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 均一斷面材의 경우가 되므로 積分하기 전의 分母가 1이 된다. 그러나, 위의 式에서 自然對數를 包含하는 項들은 數學적으로 不定이 되며, 그 외의 다른 項들은 無限大가 되는 것을 쉽게 알 수 있다. 이러한 것들은 電算機를 사용한 實際의 計算에서 無限大에 의한 Error Message로 計算不可能의

悲劇으로 나타난다.

적은 相對傾斜에서 “整形積分式”의 數值的 舉動을 살펴 보기 위하여 Double precision의 FORTRAN program을 作成하였다. 電算機의 有效數字(Significant digit)의 所持能力에 따르는 “整形積分式”의 使用 可能限界를 相對傾斜로서 規定하기 위하여 CYBER 170/185(最大有效數字 29 자리), IBM 370/158(16 자리), ECLIPSE M-600(15 자리)와 Micro computer인 SAGE-II(16 자리)를 使用하여 計算을 施行하였다. 이 計算 結果를 表 2에서 찾아 볼 수 있다. 相對傾斜, a의 값이 1×10⁻⁵에서 S의 計算된 값은 0.999995이며 이것을 여섯째 자리에서 반올림한 값이 나타나 있다. 다른 定積分인 경우 CYBER에서 거의 正確한 값을 얻었으나 有效數字가 15자리 내외의 機種으로는 傾斜가 적은 값에서 예상밖의 값을 얻었다.

定積分의 級數解를 求하여 “整形積分式”의 計算된 값의 正確度를 考察한 바에 의하면, “整形積分式”의 表現이 복잡해 질 수록 적은 斷面傾斜에서 計算誤差는 크게 나타난다. 이것은 中斷誤差(truncation error)와 局所 끝처리 誤差(local round-off error)의 복합으로 誘發되는 것으로 電算機의 有效數字의 所技能力에 직결된 것이다. 또한 自然對數를 산출하는 方法도 FORTRAN의 종류에 따라 그 값은 다르게 나타나므로 이 定積分들은 ill-conditioned problem⁽¹²⁾을 안고 있다.

“整形積分式”을 사용하여 그림 2에서 보는 것과 같은 캔틸레버 기둥을 解析하였을 경우, 적은 斷面傾斜에서 正確한 값을 얻을 수 있었다. 自由度 2와 3에 荷重을 加하였을 때 變形에 對한 計算된 값은 正確하게 나타났으나, 自由度 1에 荷重을 加하면 斷面傾斜이 적어 질 수록 誤差는 크게 나타났다. Frame 構造物에서는 剛度 매트릭스를 Assemble 하는 過程으로 인하여 部材力과 變形量의 모두에서 誤差가 發見되었다.

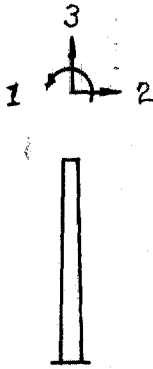


그림 2. 캔틸레버 기둥

4. 結 論

構造物의 解析을 剛度매트릭스법으로 電算機를 使用하여 結果를 얻었을 때에 그 解를 盲信하는 것이 一般의 傾向이다. 그러나, 이 研究結果에서 電算機의 有效數字 所技能力과 電算言語의 種類에 따라 그 解의 正確도가 달라지는 것을 確認할 수 있었다.

慎重하고 安全性있는 線型變斷面部材의 應力과 變形을 解析하기 위하여 有效數字 15자리 내의 機種을 기준으로 한다면, 相對傾斜의 絕對值이 6×10^{-4} 보다 큰 경우에 剛度매트릭스 要素들의 表現에 쓰이는 定積分들은 “整形積分式”으로 計算할 수 있는 것으로 나타났다.

等價荷重을 表現하는 定積分들은 相對傾斜의 絕對值이 0.1 보다 큰 경우에 整形積分式을 使用하여야 構造物 解析에 正確도를 높일 수 있는 것으로 나타났다.

謝 辭

本 研究은 1983年度 韓國科學財團의 研究費 支援으로 이루어졌음을 밝히며, 本 財團에 深甚한 感謝의 뜻을 표한다.

參 考 文 獻

1. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity, 3rd ed.*, 1970, pp.109~113, pp.341~346, McGraw-Hill, New York, N.Y.
2. Schreyer, Howard, L., 'Elementary Theory for Linearly Tapered Beams,' *Journal of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol. 104, No. EM3, June, 1978, pp.515~527.*
3. Dinnik, Dr. A., 'Design of Columns of Varying Cross-Section, *Transactions of ASME, Vol. 51, 1929, pp.105~114.*
4. 中川元, '薄い等邊梯形板, 薄い變厚矩形板 截頭圓錐のかかまり', *機械學會論文集, 第2卷, 第8號, 昭和11年8月, pp.305~315, 日本.*
5. Lee, L.H.N., 'On the Lateral Buckling of a Tapered Narrow Rectangular Beam,' *Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 26, Sep., 1959, pp.457~458.*
6. Resend, L. and Doyle, W.S., "NONPRI"—An Effective Non-Prismatic Three Dimensional Beam Finite Element." *Computers & Structures, Vol. 14, No. 1~2, 1981, pp.71~77.*
7. Kayum, Mohammed Naim, *Instability Analysis of Tapered Members Using Finite Element Method*, Ph. D. Dissertation, Case Western Reserve University, Jan. 1981.
8. Salvadori, Mario G., 'Numerical Computation of Buckling Loads by Finite Difference,' *Transaction of the American Society of Civil Society of Civil Engineers, Vol. 116, pp.590~624.*
9. Lee, Yong-Woo, *New Elements for Analysis of Space Frames with Tapered Members*, Ph. D. Dissertation, University of Nebraska, Jan., 1983.
10. Timoshenko, S.P. and Gere, James, M., *Mechanics of Material*, 1972, pp.8~10, pp.167~170, D. Van Nostrand, London.
11. Roark, Raymond J. and Young, Warren, C.,

Formulas for Stress and Strain, 5th ed., 1978, MacGraw-Hill, New York, N.Y.

12. Dahlquist, Germund and Ake, Bjöck, *Numerical Methods*, 1974, pp. 53~56, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

附 錄

“整形積分式”

$$S = \int_0^1 \frac{d\xi}{1+a\xi} = \frac{1}{a} \cdot \text{Ln}(1+a)$$

$$T = \int_0^1 \frac{d\xi}{(1+a\xi)^3} = \frac{1}{2(1+a)} + \frac{1}{2(1+a)^2}$$

$$U = \int_0^1 \frac{\xi \cdot d\xi}{(1+a\xi)^3} = \frac{1}{2(1+a)^2}$$

$$V = \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1+a\xi)^3} = \frac{\text{Ln}(1+a)}{a^3} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2(1+a)^2} - \frac{1}{2(1+a)}$$

$$W = \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1+a\xi)^3} = \frac{3}{a^3} - \frac{3\text{Ln}(1+a)}{a^4} - \frac{3}{2a^2} + \frac{1}{a} + \frac{3}{2(1+a)^2} - \frac{1}{(1+a)}$$

$$X = \int_0^1 \frac{\xi^4}{(1+a\xi)^3} = \frac{6\text{Ln}(1+a)}{a^5} - \frac{6}{a^4} + \frac{3}{a^3} - \frac{2}{a^2} + \frac{3}{2a} + \frac{1}{2(1+a)^2} - \frac{3}{2(1+a)}$$

(接受：1985. 3. 14)