

多重 近距離寫眞測定에 의한 被寫體의 3次元 精密解析에 관한 研究

A Study on the 3 Dimensional Precision Analysis of Objects by means
of Multiple Close Range Photogrammetry

姜 準 默*
Kang, Joon Mook

柳 福 模**
Yeu, Bock Mo

Abstract

This thesis is a study on multiple close range photogrammetry, and the purpose of this study is to develop the most accurate adjustment method of three dimensional object coordinates. This was achieved by comparing the standard errors of actual data to the computed values from 2 photos and multiple photos. The conventional methods for multiple photos have been analyzed by using geometric model formation. But in this study, the equation of collinearity condition which has been applied to aerial photogrammetry was derived to be a basic principle of close range photogrammetry, and the algorithm for analyzing multiple photos was developed using simultaneous bundle adjustment.

The method used in this study, showed more homogeneous accuracy in coordinate and more consistent variance of error than those of conventional methods. It was found that the cases using 3, 4, and 5 photos were more accurate than using 2 photos; the accuracies were improved to 15%, 35%, and 50%, for each case.

Thus this study is expected to be useful in measuring the geometry of historic monuments and other structures requiring high accuracy. Also the combined case of multiple photos is considered to be effective for the precise analysis of the objects which are difficult to measure for obstacles.

要 旨

本論文은 multiple close range photogrammetry에 의한 被寫體의 3次元 精密解析에 관한 研究로서 2枚의 寫眞과 多重寫眞에 대한 幾何學의 標準誤差와 觀測資料에 의한 標準誤차를 比較分析함으로써 보다 理想的인 3次元 位置解析의 한 技法을 提示하는 데 目的이 있다.

從來의 解析技法은 幾何學의 model 形成에 의해 多重寫眞을 解析한 데 비해, 本 研究는 共線條件을 地上寫眞에 맞는 基本理論으로 誘導하고, simultaneous bundle adjustment에 의한 多重寫眞의

*正會員·忠南大學校 工科大學 助教授

**正會員·延世大學校 工科大學 教授

解析 algorithm 을 開發하였다.

本 研究에 의한 技法은 均一한 正確度 및 일정한 誤差의 變化를 나타내었으며, 2枚의 寫眞에 비하여 3枚의 寫眞은 約 15%, 4枚의 寫眞은 35%, 5枚의 寫眞은 50%까지 精度가 向上되는 結果를 얻었다.

따라서 本 研究는 높은 正確度를 要하는 各種 構造物, 특히 文化財 등의 精密測定에 그 利用이 期待되며 또한 多重寫眞의 組合解析은 障礙物이 있는 施設物의 精密測定에도 널리 利用될 것으로 期待된다.

1. 序 論

地上寫眞測定은 카메라의 露出地點을 任意로 決定하여 카메라와 被寫體의 關係를 自由로 調整할 수 있으므로 一般測量이나 航空寫眞測定으로 不可能한 여러가지 精密測定에 널리 利用될 수 있다.

攝影距離 300 m 以內的 近距離寫眞測定은⁽⁸⁾ 各種 土木, 建築施設物의 精密解析, 움직이는 物體測定, 醫學, 考古學, 人間工學, 衣裳設計, 各種 產業分野에 널리 利用되고 있으며^(1,2,11), 특히 사라져가는 固有의 文化財를 永久히 保存, 復元하기 위하여 이 研究의 必要性이 높아져가고 있다.

本 研究는 室內에서 P31 카메라로 攝影距離와 基線를 多樣하게 變化시켜 얻은 陰畫를 MK-2 mono-comparator 로 모든 像點과 指標의 機械座標를 求하여 機械座標를 補正한 후, affine 變換에 의해 寫眞座標를 求하고 이를 렌즈의 放射方向에 대한 收差를 補正하여 2次元 寫眞座標를 正確히 求하였다.

一般測量에 의한 3次元 地上座標(X, Y, Z)와 標準誤差, 各 寫眞의 焦點距離, 主點의 寫眞座標(x_p, y_p), 모든 像點의 像座標(x, y) 및 標準誤差와 各 寫眞에 대한 回轉角(ω, φ, κ), 露出點의 地上座標(X_L, Y_L, Z_L)의 近似값을 利用하여 共線條件에 의한 bundle adjustment 의 正規方程式을 形成하고 Cholesky decomposition 에 의해 各 카메라의 回轉角과 카메라位置를 計算한 후 모든 測點의 殘差, 單位輕重率 標準誤差, 最終 標定點座標와 標準誤差를 計算하였다.

$S = S_0 \sqrt{N_{ii}^{-1}}$ 의 式으로부터 $\sqrt{N_{ii}^{-1}}$ 의 幾何學的 標準誤差를 求하여⁽⁴⁾ 2, 3, 4, 5枚의 寫眞 및 組合된 境遇의 觀測資料에 대한 標準誤差를 比較分析하였다.

地上寫眞에서 多重寫眞의 適用은 1981年 Okamoto에 의해 數學的인 model이 形成되었으며^(9,10), 1984年 El-Beik에 의해 研究結果가 發表되었다⁽¹⁵⁾. El-Beik의 研究는 UMK stereo 카메라를 利用하여 上下로 移動된 4枚의 寫眞에 대한 것으로 共面條件에 의해 解析하였다. 그 結果는 2枚의 立體寫眞으로 解析하는 것보다 攝影距離方向에서는 뚜렷한 正確度의 向上을 나타냈으나 基線方向의 正確度는 낮아졌으며, 攝影距離(D)에 대한 基線(B)의 變化에서도 一貫性이 없는 結果값을 나타내어 多重寫眞의 實際 適用에 問題가 되어 왔다.

2. 多重近距離寫眞의 3次元座標 解析技法

2.1 共線條件에 의한 一般解誘導

寫眞의 露出點과 標定點, 그리고 寫眞의 像點이 一直線에 놓여야 한다는 條件^(3,8,11,14)으로부터 一般解를 誘導한다.

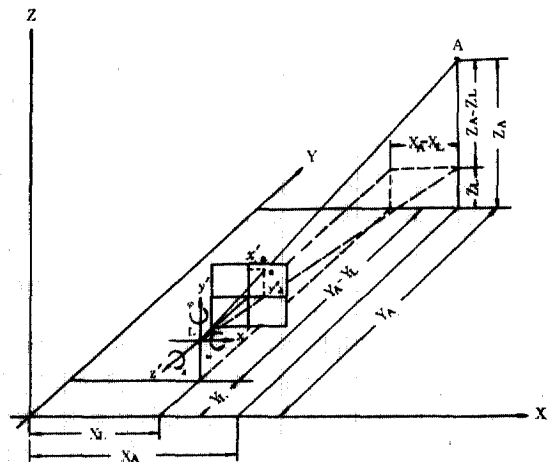


그림 2-1 Geometry of the terrestrial collinearity condition

그림 2-1에서 寫眞의 露出點 L은 地上座標

係 X, Y, Z 에 관하여 X_L, Y_L, Z_L 座標로 表示하고 標定點 A 의 像 a 를 x_a, y_a, z_a 로 表示하면 回轉된 像座標係 x', y', z' 는 地上座標係 X, Y, Z 에 平行하며 x_a, y_a, z_a 는 다음과 같다.

$$x_a = m_{11} \left(\frac{X_A - X_L}{Y_L - Y_A} \right) z_a' + m_{12} \left(\frac{Z_A - Z_L}{Y_L - Y_A} \right) z_a' + m_{13} \left(\frac{Y_L - Y_A}{Y_L - Y_A} \right) z_a'$$

$$y_a = m_{21} \left(\frac{X_A - X_L}{Y_L - Y_A} \right) z_a' + m_{22} \left(\frac{Z_A - Z_L}{Y_L - Y_A} \right) z_a'$$

$$x_a = -f \left[\frac{(\cos \varphi \cos \kappa)(X_A - X_L) + (\cos \omega \sin \varphi \cos \kappa - \sin \omega \sin \kappa)(Y_A - Y_L) + (\sin \omega \sin \varphi \cos \kappa + \cos \omega \sin \kappa)(Z_A - Z_L)}{(\sin \varphi)(X_A - X_L) + (-\cos \omega \cos \varphi)(Y_A - Y_L) + (-\sin \omega \cos \varphi)(Z_A - Z_L)} \right]$$

$$y_a = -f \left[\frac{(-\cos \varphi \sin \kappa)(X_A - X_L) + (-\cos \omega \sin \varphi \sin \kappa - \sin \omega \cos \kappa)(Y_A - Y_L) + (-\sin \omega \sin \varphi \sin \kappa + \cos \omega \cos \kappa)(Z_A - Z_L)}{(\sin \varphi)(X_A - X_L) + (-\cos \omega \cos \varphi)(Y_A - Y_L) + (-\sin \omega \cos \varphi)(Z_A - Z_L)} \right] \quad (2-2)$$

2.2 共線條件方程式의 線形化

식 (2-2)의 條件方程式에 觀測값을 代入하면 等式이 成立하지 않는다. 그러므로 여기에 觀測값의 殘差와 變數에 대한 補正값을 더해야 한다. 補正값 F 와 G 는 다음과 같이 表示할 수 있고, 觀測값에 誤差가 없다면 F 와 G 는 각각 0이 되어야 한다.

$$F = qx_a + tf$$

$$G = qy_a + sf \quad (2-3)$$

여기서 $q = (\sin \varphi)(X_A - X_L) + (-\cos \omega \cos \varphi)(Y_A - Y_L) + (-\sin \omega \cos \varphi)(Z_A - Z_L)$

$t = (\cos \varphi \cos \kappa)(X_A - X_L) + (\cos \omega \sin \varphi \cos \kappa - \sin \omega \sin \kappa)(Y_A - Y_L) + (\sin \omega \sin \varphi \cos \kappa + \cos \omega \sin \kappa)(Z_A - Z_L)$

$s = (-\cos \varphi \sin \kappa)(X_A - X_L) + (-\cos \omega \sin \varphi \sin \kappa - \sin \omega \cos \kappa)(Y_A - Y_L) + (-\sin \omega \sin \varphi \sin \kappa + \cos \omega \cos \kappa)(Z_A - Z_L)$

露出點의 座標(X_L, Y_L, Z_L), 回轉角(ω, φ, κ), 標定點座標(X_A, Y_A, Z_A) 등 9개의 未知數를 가진 非線形 條件方程式은 Taylor의 定理에 의해 展開할 수 있다. 이 때 F 와 G 는 매우 微小한 量이므로 Taylor 級數展開에서 2次 以下의 項은 무시하여 식 (2-3)을 식 (2-4), (2-5)와 같이 線形化할 수 있다.

$$z_a = m_{31} \left(\frac{X_A - X_L}{Y_L - Y_A} \right) z_a' + m_{32} \left(\frac{Z_A - Z_L}{Y_L - Y_A} \right) z_a' + m_{33} \left(\frac{Y_L - Y_A}{Y_L - Y_A} \right) z_a' \quad (2-1)$$

식 (2-1)의 x_a, y_a 式을 z_a 式으로 나누고 z_a 대신 $-f$ 를 代入하여 回轉因子가 포함된 식으로 나타내면 다음과 같은 近距離寫眞測量의 一般式이 誘導된다.

$$(F)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_0 d\omega + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial F}{\partial \kappa} \right)_0 d\kappa + \left(\frac{\partial F}{\partial X_L} \right)_0 dX_L + \left(\frac{\partial F}{\partial Y_L} \right)_0 dY_L + \left(\frac{\partial F}{\partial Z_L} \right)_0 dZ_L + \left(\frac{\partial F}{\partial X_A} \right)_0 dX_A + \left(\frac{\partial F}{\partial Y_A} \right)_0 dY_A + \left(\frac{\partial F}{\partial Z_A} \right)_0 dZ_A = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_a} \right)_0 dx_a \quad (2-4)$$

$$(G)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial \omega} \right)_0 d\omega + \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi} \right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial G}{\partial \kappa} \right)_0 d\kappa + \left(\frac{\partial G}{\partial X_L} \right)_0 dX_L + \left(\frac{\partial G}{\partial Y_L} \right)_0 dY_L + \left(\frac{\partial G}{\partial Z_L} \right)_0 dZ_L + \left(\frac{\partial G}{\partial X_A} \right)_0 dX_A + \left(\frac{\partial G}{\partial Y_A} \right)_0 dY_A + \left(\frac{\partial G}{\partial Z_A} \right)_0 dZ_A = - \left(\frac{\partial G}{\partial y_a} \right)_0 dy_a \quad (2-5)$$

식 (2-2)에서 $X_A - X_L = \Delta X$, $Y_A - Y_L = \Delta Y$, $Z_A - Z_L = \Delta Z$ 라 하고 $\frac{\partial G}{\partial y_a} = \frac{\partial F}{\partial x_a} = g$, 殘差 dx_a, dy_a 를 V_{x_a}, V_{y_a} 로 表示하면 $\frac{\partial F}{\partial x_a} \cdot dx_a = g V_{x_a}$, $\frac{\partial G}{\partial y_a} \cdot dy_a = g V_{y_a}$ 가 되며 F 와 G 에 대하여 片微分하여 x_a, y_a 의 各 變數에 대한 값을 구한다.

2.3 多重 近距離寫眞의 Bundle Adjustment

多重寫眞의 경우, 大形의 觀測方程式을 풀기 위하여 可能解를 適用하지 않고는 computer의

容量 때문에 그의 解를 구할 수 없다^(10,16).

$${}_m A_{nn} X_1 = {}_m L_1 + {}_m V_1 \quad (2-6)$$

위의 觀測方程式에서

A : 係數行列, X : 未知數行列

L : 常數行列, V : 殘差行列

이고 殘差 V가 없는 것으로 假定하고 兩邊에 A^T를 곱하면 A^TAX=A^TL을 얻을 수 있으며, 輕重率 W를 考慮하면 (A^TWA)X=A^TWL의 식이 구해진다.

A^TWA=N, A^TWL=C라 하면 윗식은 다음과 같이 간단히 表示된다.

$$NX=C \quad (2-7)$$

여기서 N은 正規方程式, C는 常數行列이고 正規方程式 N은 對稱行列이므로 NX=C의 解를 speed up할 수 있다.

A^TWA=N과 A^TWL=C에 있어 A行列을 形成하지 않고 A의 한 行만 택하여 計算한다.

A의 各 行은 한 觀測값을 나타내고 行의 i번째 觀測값은 輕重率 W_i를 가지며, N에 대한 i번째 觀測값의 i번째 行과 j번째 列에 있어 contribution N_{ij} = W_ia_{ii}a_{ij}이다. 그러므로 A의 한 行을 알고 있으면 全體의 A行列을 形成하지 않고 N에 그의 contributions를 더하면 된다.

또한 W行列도 斜線方向에 의한 벡터만 기억되며, N은 對稱行列이므로 N의 오른쪽 윗부분

만 기억시킨다. 이것을 저장하기 위해 N은 한 列벡터로 저장된다. N의 오른쪽 윗부분 列의 SN은 다음과 같다.

$$[SN] = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{12} \\ \vdots \\ N_{nn} \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

만약 i번째 行과 j번째 列을 원한다면 SN의 그 位置 ISN은 다음 식에 의해 찾을 수 있다.

$$ISN = \frac{j \times (j-1)}{2} + i \quad (2-9)$$

A^TWL=C도 같은 方法으로 SN을 形成할 수 있다.

이와 같이 한 測定값은 A行列의 한 行을 차지하며 ω, φ, κ, X_L, Y_L, Z_L과 X_A, Y_A, Z_A의 未知數를 포함하고 있는 共線條件方程式의 9개의 片微分項은 0이 아닌 반면, 다른 모든 項들은 0이 된다.

正規方程式에는 많은 zero가 存在하므로 6m+3n의 方程式 대신 6m의 方程式을 풀도록 할 수 있다.

$$\begin{matrix} N \\ (6m+3n, 6m+3n) \end{matrix} \begin{matrix} X \\ (6m+3n, 1) \end{matrix} = \begin{matrix} C \\ (6m+3n, 1) \end{matrix} \quad (2-10)$$

식(2-10)을 寫眞項과 標定點項으로 分配하여 表示하면 다음과 같다.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \begin{matrix} 6[\dot{N}_1]^6 \\ 6[\dot{N}_2]^6 \\ \vdots \\ 6[\dot{N}_m]^6 \end{matrix} & \begin{matrix} zero \\ \vdots \\ zero \end{matrix} & \begin{matrix} 6[\bar{N}_{11}]^3 & 6[\bar{N}_{12}]^3 & \dots & 6[\bar{N}_{1n}]^3 \\ 6[\bar{N}_{12}]^3 & 6[\bar{N}_{22}]^3 & \dots & 6[\bar{N}_{2n}]^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 6[\bar{N}_{m1}]^3 & \dots & \dots & 6[\bar{N}_{mn}]^3 \end{matrix} & \begin{matrix} 6[\dot{X}_1]^1 \\ 6[\dot{X}_2]^1 \\ \vdots \\ 6[\dot{X}_m]^1 \end{matrix} & \begin{matrix} 6[\dot{C}_1]^1 \\ 6[\dot{C}_2]^1 \\ \vdots \\ 6[\dot{C}_m]^1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 3[N_{11}]^6 & 3[N_{12}]^6 & \dots & 3[N_{1m}]^6 & 3[\ddot{N}_1]^3 \\ 3[N_{21}]^6 & 3[N_{22}]^6 & \dots & 3[N_{2m}]^6 & 3[\ddot{N}_2]^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3[N_{m1}]^6 & \dots & \dots & 3[N_{mn}]^6 & 3[\ddot{N}_n]^3 \end{matrix} & \begin{matrix} zero \\ \vdots \\ zero \end{matrix} & \begin{matrix} 3[\ddot{X}_1]^1 \\ 3[\ddot{X}_2]^1 \\ \vdots \\ 3[\ddot{X}_n]^1 \end{matrix} & \begin{matrix} 3[\ddot{C}_1]^1 \\ 3[\ddot{C}_2]^1 \\ \vdots \\ 3[\ddot{C}_n]^1 \end{matrix} \end{array} \right) \quad (2-11)$$

여기에서

\dot{N}_i : 6×6 한 카메라位置 i 에 속하는 對角線方向的 submatrix

\ddot{N}_j : 3×3 한 標定點 j 에 속하는 對角線方向的 submatrix

\dot{N}_{ij} : 6×3 카메라位置 i 의 行과 標定點 j 의 列에 의해 形成되는 submatrix

\dot{X}_i : 6×6 카메라位置 i 에 대한 解의 submatrix

\dot{X}_j : 3×1 標定點 j 에 대한 解의 submatrix

\dot{C}_i : 6×1 카메라位置 i 에 대한 常數行列의 submatrix

\ddot{C}_j : 3×1 標定點 j 에 대한 常數行列의 submatrix

$\dot{N}\dot{X}=\dot{C}$ 의 分配된 形態를 定義하기 위해 記號를 사용하면,

$$\begin{pmatrix} \dot{N} & \dot{N} \\ \dots & \dots \\ \dot{N}^T & \dot{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{C} \\ \dot{C} \end{pmatrix} \quad (2-12)$$

식(2-12)로부터

$$\begin{pmatrix} N_{11} + S_{11} & & S_{12} & & S_{13} & \dots & S_{1m} \\ & S_{12}^T & \dot{N}_{22} + S_{22} & & S_{23} & \dots & S_{2m} \\ & & S_{13}^T & & S_{23}^T & \dot{N}_{33} + S_{33} & \dots & S_{3m} \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots \\ S_{1m}^T & & S_{2m}^T & & S_{3m}^T & \dots & \dot{N}_{mm} + S_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \vdots \\ \dot{X}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

여기에서 N_{ii} 는 앞에서 定義된 것과 같은 6×6 의 submatrix 이고 S_{ik} 는 6×6 의 submatrix, E_i 는 6×1 의 submatrix 이다.

S_{ik} 와 E_i 는 아래의 식에 의해 計算된다.

$$S_{ik} = - \sum_{j=1}^n \dot{N}_{ij} (\dot{N}_j)^{-1} \dot{N}_{kj}^T \quad (2-20)$$

$$E_i = \dot{C}_i - \sum_{j=1}^n \dot{N}_{ij} (\dot{N}_j)^{-1} \ddot{C}_j \quad (2-21)$$

여기에서 $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ 이다.

S_{ik} 는 i, k 의 두 寫眞에 있어서 모든 共通像點들에 대한 contributions 이며 E_i 는 寫眞 i 에 있어서 모든 像點의 常數벡터에 대한 contributions 이다.

$S\dot{X}=E$ 를 사용하여 \dot{X} 의 解가 구해지면 식

$$\dot{N}\dot{X} + \dot{N}\dot{X} = \dot{C} \quad (2-13)$$

$$\dot{N}^T \dot{X} + \dot{N}\dot{X} = \dot{C} \quad (2-14)$$

식(2-14)의 \dot{X} 에 대해 풀면

$$\dot{X} = \dot{N}^{-1} (\dot{C} - \dot{N}^T \dot{X}) \quad (2-15)$$

식(2-15)를 식(2-13)에 代入하면

$$\dot{N}\dot{X} + \dot{N}\dot{N}^{-1} \dot{C} - \dot{N}\dot{N}^{-1} \dot{N}^T \dot{X} = \dot{C} \quad (2-16)$$

식(2-16)을 다시 整理하면

$$(\dot{N} - \dot{N}\dot{N}^{-1} \dot{N}^T) \dot{X} = \dot{C} - \dot{N}\dot{N}^{-1} \dot{C} \quad (2-17)$$

이 되며

$$S = \dot{N} - \dot{N}\dot{N}^{-1} \dot{N}^T$$

$$E = \dot{C} - \dot{N}\dot{N}^{-1} \dot{C}$$

이라 하면

$$\begin{matrix} S & X & = & E \\ (6m, 6m) & (6m, 1) & & (6m, 1) \end{matrix} \quad (2-18)$$

의 縮小된 正規方程式으로 表示할 수 있다.

$(6m+3n) \times (6m+3n)$ system 대신 $(6m \times 6m)$ system 方程式의 解를 구하면 된다. 직접 代入을 함으로써 그것은 아래와 같이 表示될 수 있다.

(2-15)에 의해 \dot{X} 에 대하여 解를 구할 수 있다.

식(2-18)로부터 分散·共分數行列은 다음과 같이 定義된다.

$$S_X^2 = S_0^2 S^{-1} \quad (2-22)$$

S^{-1} 의 對角線項을 사용하여 모든 카메라變數에 대한 標準誤差를 다음 식에 의하여 구할 수 있다.

$$S_{Xi} = S_0 \sqrt{S_{ii}^{-1}} \quad (2-23)$$

S_{Xi} 는 한 特定한 카메라의 $\omega, \phi, \kappa, X_L, Y_L, Z_L$ 에 대한 標準誤差이고 S_{ii}^{-1} 은 그 特定한 $\omega, \phi, \kappa, X_L, Y_L, Z_L$ 에 相應하는 S^{-1} 의 對角線項으로서 幾何學的 函數이다.

식(2-15)로부터 구한 標定點 j 에 대한 分散·

共分散行列은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_x^2 = S_0^2 \mathbf{S}^{-1} \quad (2-24)$$

\mathbf{S}^{-1} 의 對角線項으로부터 모든 標定點들에 대한 X_A, Y_A, Z_A 의 標準誤差를 다음 식에 의해 구할 수 있다.

$$S_{x_i} = S_0 \sqrt{S_{ii}^{-1}} \quad (2-25)$$

2.4 標準誤差의 解析

觀測값에 대한 標準誤差를 解析하기 위해서는 觀測方程式(2-6)으로부터 그의 解를 誘導할 수 있다.

最小제곱법은 輕重率殘差(weighted residuals)의 제곱의 합 $\sum_{i=1}^m W_i V_i^2$, 즉 $\mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{V}$ 가 最小로 되도록 하는 것으로, 이 때 單位輕重率의 標準誤差는 다음 식에 의해 計算되며

$$S_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{V}}{m-n}} \quad (2-26)$$

未知數의 標準誤差는 다음 식으로 表示된다(4).

$$S_{x_i} = S_0 \sqrt{N_{ii}^{-1}} \quad (2-27)$$

Cholesky decomposition에서 $\mathbf{N} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ 이므로 $\mathbf{N}^{-1} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}^{T-1}$

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}^{-1T} \quad (2-28)$$

이 되며 標準誤差를 決定하기 위해 오직 \mathbf{N}^{-1} 의 對角線項만이 必要하다.

$\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}$ (單位行列)이므로 \mathbf{S} 로부터 \mathbf{S}^{-1} 을 計算할 수 있으며

$$S_{11} S_{11}^{-1} = 1 \text{로부터 } S_{11}^{-1} = \frac{1}{S_{11}}$$

$$S_{nn} S_{nn}^{-1} = 1 \text{로부터 } S_{nn}^{-1} = \frac{1}{S_{nn}}$$

이 되므로 S_{ii}^{-1} 의 一般式은 다음과 같이 表示된다.

$$S_{ii}^{-1} = \frac{1}{S_{ii}} \quad (2-29)$$

$$S_{11} S_{12}^{-1} + S_{12} S_{22}^{-1} = 0 \text{ 으로부터}$$

$$S_{12}^{-1} = \frac{1}{S_{11}} [-S_{12} S_{22}^{-1}] \quad \sum_{i=1}^j S_{ii} S_{ij}^{-1} = 0$$

이므로 S_{ij}^{-1} 의 一般式은 다음과 같다.

$$S_{ij}^{-1} = \frac{1}{S_{ii}} \left[-\sum_{r=i+1}^j S_{ir} \times S_{rj}^{-1} \right] \quad (2-30)$$

本 研究에서 S_0 는 1.00으로 假定되어 $\mathbf{S}_0 \times \mathbf{N}\mathbf{X} = \mathbf{C}$ 의 調整이 끝난 뒤, S_0 는 1.00에 收斂하여 存在해야 한다. S_0 가 1.00에 收斂할수록 信賴度가 높으며 이 값보다 너무 작거나 큰 경우에는 精密座標測定機의 標準誤差 $X_c + S_x, Y_c + S_y$ 의 S_x, S_y 의 $3\mu\text{m}$ 의 값은 變更해야 한다(3).

本 研究에 適用된 測量에 의한 基準點(surveyed control point) $X \pm S_x, Y \pm S_y, Z \pm S_z$ 의 S_x, S_y, S_z 는 0.001mm이고, ω, ϕ, κ 의 初期近似 값은 0, 0, 0이며 同一 條件下에 觀測回數, 器材 등이 모두 같으면 機械座標의 S_x, S_y 의 輕重率은 같고 一般測量座標 S_x, S_y, S_z 의 輕重率은 같게 擇하여야 한다.

3. 觀測 및 座標解析

3.1 觀測

本 研究에 사용된 主要器材는 P31 metric terrestrial camera, MK-2 mono comparator, PDP 11/23 computer, theodolite, level, steel tape 등이며, camera의 fiducial marks와 radial lens distortion의 狀態는 그림 3-1과 같다.

本 研究에 사용된 被寫體는 相對起伏이 큰 小

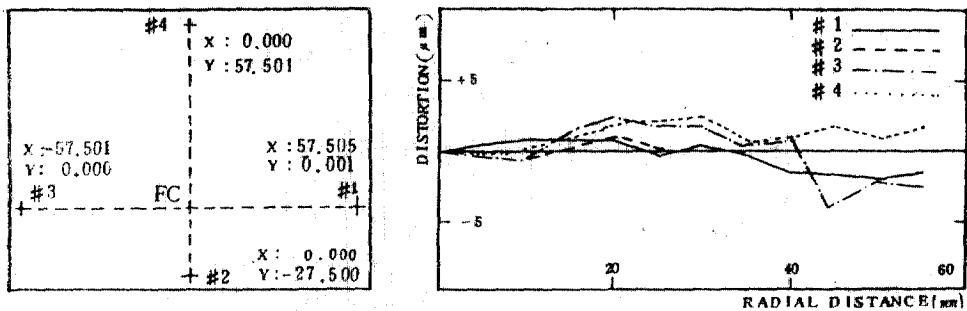


그림 3-1 Image plane of P31 and radial lens distortion for half-side preferred to PPS

표 3-1 Half base line for photographing plan

D(m)	1.4		1.8		2.5		4.0		7.0	
	photo No.	B/2 (mm)	photo No.	B/2 (mm)	photo No.	B/2 (mm)	photo No.	B/2 (mm)	photo No.	B/2 (mm)
80	01, 02	150.679	21, 22	197.068	31, 32	278.262	41, 42	455.222	51, 52	800.199
70	03, 04	226.018	23, 24	295.602	33, 34	417.393	43, 44	678.333	53, 54	1200.298
60	05, 06	301.357	25, 26	394.136	35, 36	556.524	45, 46	904.444	55, 56	1600.398

표 3-2 Object coordinate by surveying

object point	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
1	3042.10	6976.71	863.59
2	3012.60	7058.26	764.90
3	3118.42	7102.89	760.25
4	3109.13	7061.32	664.96
5	2992.25	7026.83	643.28
6	3052.76	7087.83	549.21
7	3101.41	7106.98	483.54
8	2940.46	7055.27	439.08
9	3092.89	7008.81	376.04
10	2942.23	7042.61	266.89
11	3090.09	6920.12	212.96
12	2932.22	7091.17	66.63
13	3155.24	7013.65	-50.79
14	2960.39	7166.85	-64.97
15	2911.12	6999.10	-147.71

형의精巧한 Venus像으로 室内에서 4.5 kW beam light의 照明下에 撮影되었다. 最適撮影을 期하기 위해 露出計로 正確히 露出을 決定하고 數回 反復測定에 의하여 撮影條件을 決定한 후 周圍의 震動이 적은 夜間에 撮影을 實施하였다. 標定點은 15點을 擇하였으며, 이 중 No. 5, 10,

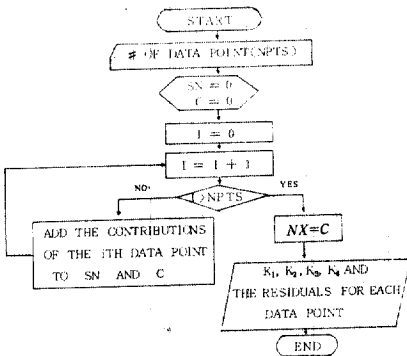


그림 3-2 Flow chart for calculation of radial lens distortion

13의 세 점은 control point로 利用하였고, 各基線에 대하여 撮影距離에 따라 1.4 m, 1.8 m, 2.5 m, 4.0 m, 7.0 m에 各各 7.31 mm, 5.50 mm, 3.78 mm, 2.18 mm, 1.06 mm의 ring을 利用하여 焦點距離를 調整하였다.

撮影點의 번호는 各基線의 中心寫眞 00, 20, 30, 40, 50을 基準으로 各基線의 左側은 偶數이며 右側은 奇數이다. 表 3-1은 各基線의 重複度에 따른 B/2의 計劃을 나타낸 것이다.

一般測量에 의한 3次元 位置는 0.1''分解能의 精密 theodolite로 觀測하였으며 左側 theodolite의 十字線의 中心을 X, Y, Z의 原點(0, 0, 0)으로 하여 얻은 成果는 表 3-2와 같다.

3.2. 座標計算

精密座標測定機의 標準誤差는 3 μm로 하고, 單位輕重率 標準誤差는 1.00으로 假定하였다.

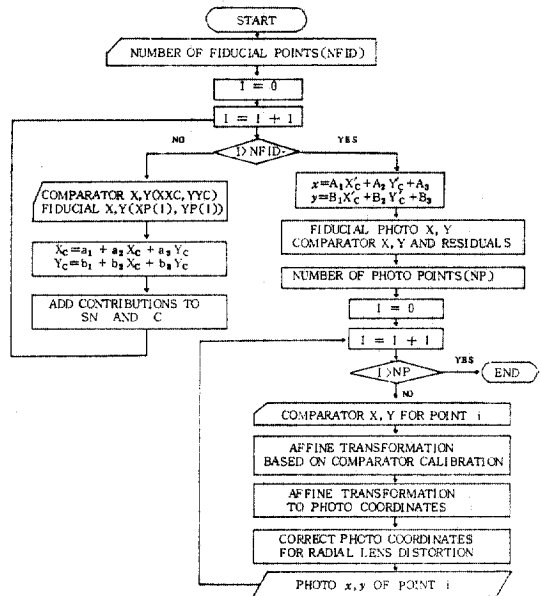


그림 3-3 Flow chart for affine transformation

各寫眞에 대한 κ, φ, ω 의 初期값은 모두 0, 0, 0으로 設定하였다.

15개의 標定點을 사용할 경우, 2枚의 寫眞은 觀測數 $m=60$, 未知數 $n=57$, 3枚의 寫眞은 $m=90$, $n=63$, 4枚의 寫眞은 $m=120$, $n=69$, 5枚의 寫眞은 $m=150$, $n=75$ 이므로 寫眞枚數가 增加되면 redundancy가 增加되며 이것은 精度에 큰 影響을 미친다.

렌즈의 放射方向收差에 대한 補正係數의 計算過程은 flow chart 그림 3-2와 같고 2次元 像座標와 3次元 地上座標 및 標準誤差의 計算過程은 그림 3-3, 그림 3-4와 같다.

4. 比較考察

觀測에 의하여 얻은 結果를 2, 3, 4, 5枚의 寫眞과 組合된 境遇로 分類하여 比較分析하였다.

2枚 寫眞의 境遇 type A, B, C는 攝影距離 1.4 m, 1.8 m, 2.5 m, 4.0 m에서 B/D가 0.2, 0.3, 0.4임을 意味하며, 3枚 寫眞의 type A, B, C는 中心寫眞과 2枚 寫眞의 type A, B, C의 組合를 意味한다.

4枚 寫眞의 type A는 2枚 寫眞 B/D 0.2, 0.3의 組合이고 B는 0.2, 0.4의, C는 0.3, 0.4의 組合이며, 5枚 寫眞의 A, B, C는 4枚 寫眞의 type A, B, C에 中心寫眞이 追加된 것을 意味한다.

모든 標準誤差는 15點의 標定點 중 3개 基準點을 除外한 12點의 平均값을 意味하며, S_0 는 單位輕重率의 標準誤差이다. 이것은 觀測값에 대한 函數로 觀測에 있어 人的, 機械的 誤差에 의해 左右된다.

Q_x, Q_y, Q_z 는 幾何學의 要素에 의한 標準誤差의 平均이며 幾何學的 函數로 實驗의 幾何學的 狀態에 따라 左右되는 一定한 값이다⁽⁴⁾.

觀測資料에 의한 S 의 S_x, S_y, S_z 는 $S = S_0 \sqrt{N_{ii}^{-1}}$ 에 의해 얻은 最終의 標準誤差의 平均이다. M_0 는 Q_x, Q_y, Q_z 의 平均값을 意味하며 M_s 는 S_x, S_y, S_z 의 平均값을 意味한다.

2枚 寫眞의 境遇 B/D가 0.2에서 0.3, 0.4로 變化함에 따른 標準誤差의 分布는 그림 4-1과 같다.

標準誤差 Q 와 S 는 各 攝影距離에서 均一한 變化를 나타내고 있으며, 觀測資料에 의한 標準誤差가 理論的인 幾何學的 標準誤差보다 낮은 分布를 나타내고 있다. Y 의 誤差가 X, Z 에 비해 높은 것은 攝影距離가 基線에 비해 約 5배가 되는 것이 主原因이다.

幾何學的 標準誤差의 平均값 M_0 는 重複度가 變化함에 따라 約 27%, 41%, 觀測資料에 대한 標準誤差의 平均값 M_s 는 約 33%, 45% 정도의 顯著한 減少를 나타내고 있다. 이것은 基線의 變化가 精度에 큰 影響을 미침을 意味하는 것이다. 攝影距離 2.5 m에서 C 의 觀測資料에 의한 標準誤差 S 가 Q 보다 약간 크게 나타난 것은 照明關係로 判斷된다. 一般적으로 攝影距離가 멀수록 Q 와 S 값이 큰 差異를 보이는데 이것은 攝影距離에 의한 影響이 크기 때문이다.

多重寫眞에 대한 標準誤差의 分布는 그림 4-2, 그림 4-3, 그림 4-4와 같다.

一般적으로 多重寫眞에서도 觀測資料에 의한 標準誤差가 幾何學的 標準誤差보다 낮은 分布를 보이고 있으며, X 가 Z 보다 약간 精度가 높고 Y 는 距離關係로 精度가 낮으나 寫眞枚數가 增加함에 따라 특히 Y 의 精度가 顯著히 向上됨을

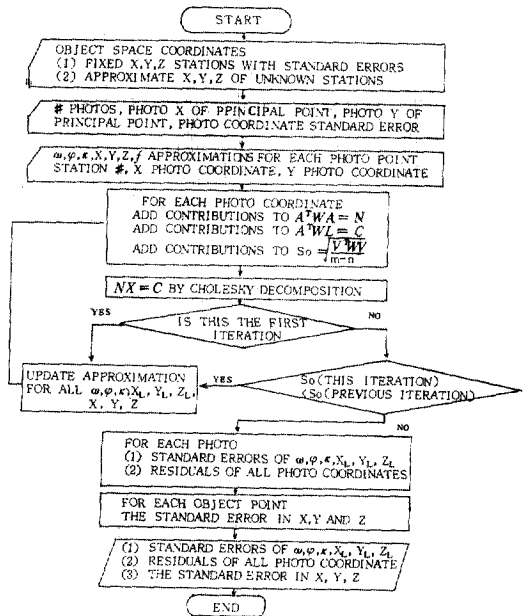


그림 3-4 Flow chart for simultaneous bundle adjustment by collinearity condition

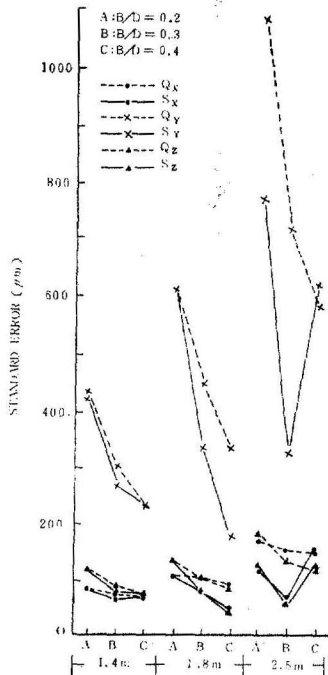


그림 4-1 Standard errors versus overlaps and object distances (2 photo case)

알 수 있다. 또한 2 枚의 寫眞에 比해 寫眞枚數가 增加함에 따라 Q_x, Q_y, Q_z 와 S_x, S_y, S_z 가 더욱 接近되는 均一한 分布를 보이고 있음은 多重 寫眞의 效用性이 높음을 暗示하는 것이다.

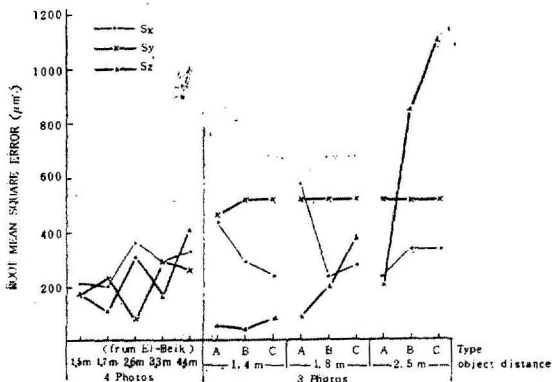


그림 4-5 Root mean square errors versus object distances and 3, 4 photo cases by coplanarity condition

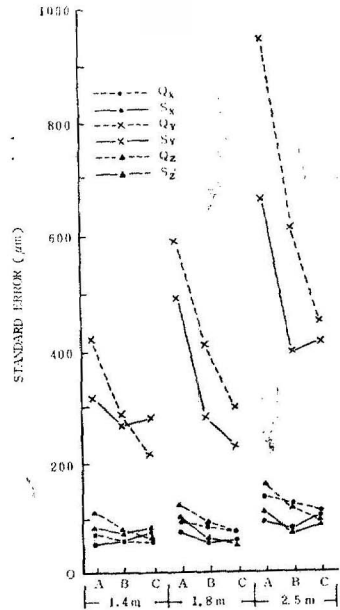


그림 4-2 Standard errors versus overlaps and object distances (3 photo case)

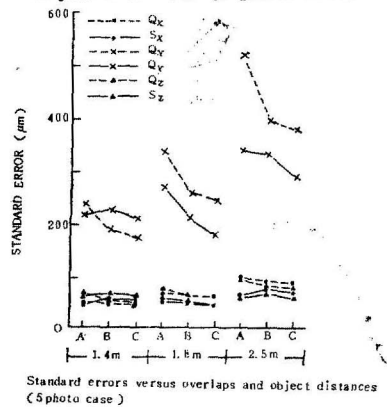


그림 4-3 Standard errors versus overlaps and object distances (4 photo case)

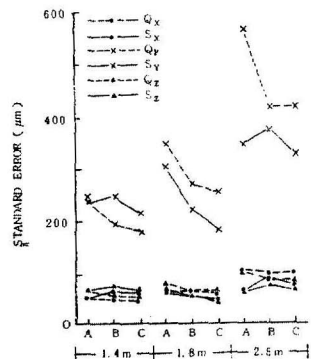


그림 4-4 Standard errors versus overlaps and object distances (5 photo case)

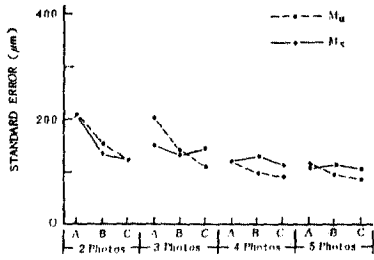


그림 4-6 Standard error versus overlaps and number of photos (object distance=1.4 m)

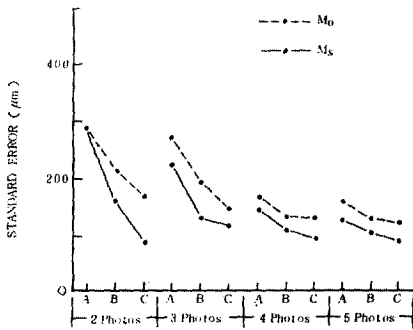


그림 4-7 Standard errors versus overlaps and number of photos(object distance=1.8 m)

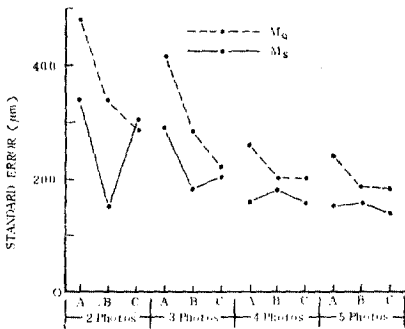


그림 4-8 Standard errors versus overlaps and number of photos(object distance=2.5 m)

그림 4-5는 1984年 El-Beik 가 發表한 共面條件의 研究結果와⁽¹⁵⁾ 本 研究의 資料를 共面條件에 의해 解析한 3枚 寫眞에 대한 結果를 圖示한 것이다.

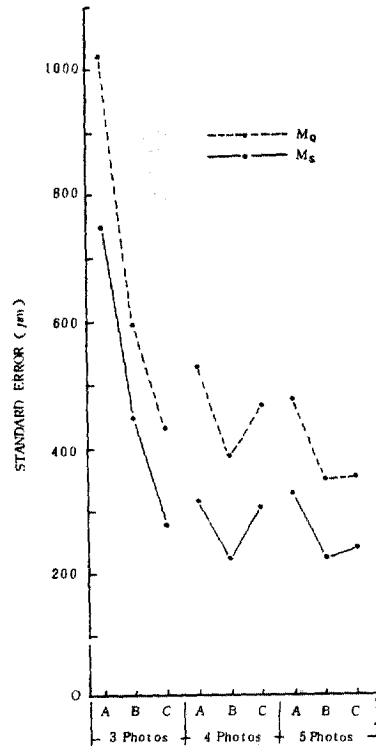


그림 4-9 Standard errors versus overlaps and number of photos (object distance=4.0 m)

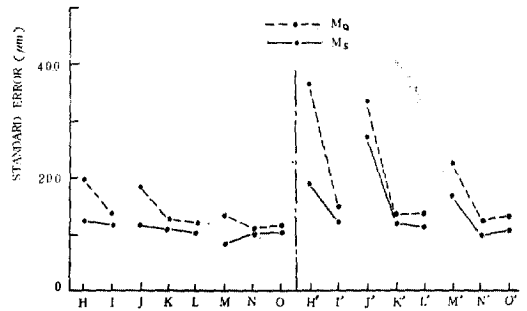


그림 4-10 Standard errors versus combined cases of 3, 4 and 5 photos

共面條件을 使用한 多重寫眞의 境遇는 精度가 낮고 距離의 變化에 關係없이 random 한 誤差分布를 나타내고 있다. 즉 距離가 倍로 增加하여도 오히려 精度가 높아지는 境遇도 있고 X, Y, Z 모두 不規則한 誤差分布를 나타내고 있어 攝影位置를 決定하거나 多重寫眞의 效用性에 대한

표 4-1 Photo number for combined cases of 3, 4 and 5 photos

D(m)	# of photos	Type	Photo number	D(m)	# of photos	Type	Photo number
1.4 1.8 2.5	3	H	00, 33, 34	1.4 4.0 7.0	3	H'	00, 53, 54
		I	03, 04, 30			I'	03, 04, 50
	4	J	00, 30, 33, 34		4	J'	00, 50, 53, 54
		K	00, 03, 04, 30			K'	00, 03, 04, 50
	5	L	03, 04, 33, 34		5	L'	03, 04, 53, 54
		M	00, 23, 24, 33, 34			M'	00, 43, 44, 53, 54
	5	N	03, 04, 23, 24, 30	N'	03, 04, 43, 44, 50		
		O	03, 04, 20, 33, 34	O'	03, 04, 40, 53, 54		

評價를 하기 어려운 樣相을 보이고 있다.

그러나 共線條件으로 얻은 結果는 距離의 變化에 따라 均一한 誤差分布와 寫眞枚數의 增加에 따라 높은 精度의 向上을 나타내고 있다.

그림 4-6, 4-7, 4-8, 4-9는 1.4 m, 1.8 m, 2.5 m, 4.0 m에서 寫眞枚數의 增加에 따른 M_0, M_s 의 精度向上比率를 圖示한 것이다.

1.4 m에서 3, 4, 5枚의 寫眞으로 增加함에 따라 Q_x, Q_y, Q_z 는 各各 A의 境遇 39.5%, 45.1%, 44%까지 誤差가 減少되었고, B는 35.7%, 36.9%, 36.3%까지, C는 31.1%, 23.9%, 27.2%까지 減少되었다. 또한 S_x, S_y, S_z 는 A의 境遇 Q보다 約 3%乃至 4% 더 減少하였으나 B, C의 境遇는 減少幅이 적었다. 그림 4-6에서 M_0 는 寫眞枚數가 增加함에 따라 25.9%乃至 44.1%까지 減少하였고, M_s 는 11%乃至 47.9%까지 減少하였다.

攝影距離 1.8 m의 境遇는 寫眞枚數가 增加함에 따라 M_0 는 28%乃至 44.3%까지 減少되고 M_s 는 54.9%까지 減少되었다. 全般的으로 1.8 m에서는 M_0 와 M_s 가 均一한 分布로 接近되고 있으며 이것은 target의 製作에서 오는 誤差의 影響이 1.4m 보다 적게 받았기 때문에 思料된다.

攝影距離 2.5 m에서 2枚의 寫眞에 대한 3, 4, 5枚의 寫眞은 A의 境遇 $M_0(M_s)$ 는 13.5%(13.8%), 45.6%(52.9%), 49.7%(54.1%)까지 減少되고, B의 境遇는 14.9%乃至 43.8%, C의 境遇는 22.5%乃至 36.0%까지 減少되었다. 觀測資料에 대한 M_s 는 A, C에서는 幾何學的 標準誤差보다 더 큰 減少를 나타냈으나 B의 境遇는 약간 不規則한 分布를 나타내었다.

攝影距離 4.0 m에서도 3, 4, 5枚 寫眞의 境遇 1.4 m, 1.8 m, 2.5 m와 恰似한 結果를 얻었다.

近距離寫眞에서도 座標를 一般地上座標로 一致시키는 것이 便利하며, 標定點數의 增加와 寫眞枚數의 增加로 redundancy를 크게 하면 더욱 信賴度가 높은 精度를 얻을 수 있으므로 適當한 標定點의 配置가 必要하다.

表 4-1은 組合狀態를 나타낸 것이며 그림 4-10은 이 境遇의 誤差分布를 圖示한 것이다.

寫眞枚數가 增加함에 따라 一般的으로 誤差가 顯著히 減少하며 같은 寫眞枚數의 組合이라도 카메라의 位置에 따라 크게 좌우되고 있음을 알 수 있다.

中心寫眞을 利用할수록 精度가 높으므로 共線條件에 의한 解析은 收斂攝影이 바람직함을 알 수 있다.

組合解析의 結果는 障礙物이 있는 施設物의 精密解析에 有用하게 利用될 것으로 思料된다.

5. 結 論

多重 近距離寫眞測定에 의한 被寫體의 3次元 精密解析을 함에 있어서 simultaneous bundle adjustment에 의한 多重寫眞의 解析 algorithm을 開發하고 妥當性을 實驗的으로 比較分析한 結果, 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 本 研究에서 提示한 多重寫眞의 解析技法은 2枚의 寫眞에 비해 3枚의 寫眞은 精度를 約 15%, 4枚의 寫眞은 約 35%, 5枚의 寫眞은 約 50%까지 向上시킬 수 있었다.
2. 寫眞枚數가 增加함에 따라 幾何學的 標準誤

차와 觀測資料에 의한 標準誤차는 더욱 接近하며, Y 誤차는 X, Z의 誤差보다 顯著한 減少를 나타내므로 起伏이 심한 施設物의 精密測定에 보다 正確한 結果를 얻을 수 있다.

3. 基線高度比 B/D가 0.2에서 0.3, 0.4로 變化함에 따라 約 27%, 41%의 顯著한 誤差減少로 正確도가 向上되므로 近距離被寫體의 測定에 있어서 B/D는 被寫體의 條件에 따라 正確히 計劃하여야 한다.
4. 本 解析技法은 同一基線이 아닌 境遇에도 組合解析이 可能하므로 障礙物이 있는 施設物의 精密測定에도 適用될 수 있으며, 標準誤차의 分布狀況으로 보아 從來에 提案된 方法에 比하여 보다 合理的이고 均一한 正確도를 얻을 수 있다. 本 研究의 解析技法은 高度의 精密測定을 要하는 人體 또는 文化財 등의 3次元 精密解析에 效果的으로 利用될 것으로 期待된다.

參 考 文 獻

1. Granshaw, S.I., "Bundle Adjustment Methods in Engineering Photogrammetry", *Photogrammetric Record*, Vol. 10, No. 56, 1980, pp.181~203.
2. Atkins, K.B., *Development in Close Range Photogrammetry-1*, Applied Science Publishers LTD, 1980, pp.1~13.
3. Brown, D.C., "Application of Close-Range Photogrammetry to Measurements of Structures in Orbit", *GSI Technical Report*, No. 80~012 Geodetic Services Inc., Melbourne, Florida, U. S.A., Vol. 1, 1980, pp.1~131.
4. Wolf, P.R., *Adjustment Computations*, 2nd ed., P.B.L. Publishing Co., 1980, pp.23~107.
5. Karara, H.M., *Handbook of Non-Topographic Photogrammetry*, A.S.P., 1979, pp.29~35.
6. Ghosh, S.K., *Analytical photogrammetry*, Pergamon Press, 1979, pp.2~5.
7. Moffitt, F.H., *Photogrammetry*, 3rd ed., Harper & Row, 1980, pp.538~582.
8. A.S.P., *Manual of Photogrammetry*, 4th ed.,

A.S.P., 1980, pp.476~489.

9. Okamoto, A., "Orientation and Construction of Models Part I: The Orientation Problem in Close-Range Photogrammetry," *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, Vol. 47, No. 10, 1981, pp.1437~1454.
10. Ibid, "Orientation and Construction of Models Part II: Model Construction Theory with Multiple Photographs," *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, Vol. 48, No. 11, 1981, pp.1615~1626.
11. 柳福模, 姜準默, 朴弘祺, "地上寫眞에 의한 構造物의 精密測定에 관한 研究", *한국측지학회지*, 1983, pp.9~16.
12. Gates, J.W.C., S. Oldfield, C. Forno, P.J. Scott and S.A. Kyle, "Factors Defining Precision in Close-Range Photogrammetry", *International Archives of Photogrammetry*, Vol. 24, Part VII, 1982, pp.185~195.
13. Ziemann, H. and S.F. El-Hakim, "On the Definition of Lens Distortion Reference Data with Odd-Power Polynomials", *International Archives of Photogrammetry, Comm. I*, 1982, pp.123~130.
14. Wolf, P.R., *Elements of Photogrammetry*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1983, pp.93~99, pp.477~503, pp.559~601.
15. El-Beik, A.H.A. and R. Babel-Mahani, "The Quadrastational Close-Range Photogrammetric System", *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, Vol. 50, No. 3, 1984, pp.319~326.
16. Fraser, C.S., "Network Design Considerations for Non-Topographic Photogrammetry", *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, Vol. 50, No. 8, 1984, pp.1115~1125.
17. Kang Joon-Mook, R.J. Hintz, "An Analysis of the Effect of Varying Camera Positions on the Accuracies Attainable by Non-Convergent Close Range Photogrammetry", A.S.P. 51st Annual Meeting, 1985, pp.55~62.

(接受 : 1985. 4. 29)