

탄성콘크리트 댐의 모양최적설계

Shape Optimal Design of Elastic Concrete Dam

유 영 면*
Yoo, Yung Myun

Abstract

In this research mass of a plane strain two dimensional elastic concrete dam under gravitational and hydrostatic loads is minimized, through shape optimization of the dam cross section. Cross sectional area of the dam is taken as cost function of the optimization problem while constraints on the principal stress distribution and dam thickness are imposed. Shape of the boundary of the model is chosen as design variable.

Variational formulation of the optimization problem, the material derivative idea of continuum mechanics, and an adjoint variable method are employed for the shape design sensitivity calculation. Then the gradient projection algorithm is utilized to obtain an optimum design iteratively.

Research results fully demonstrate that the theory and procedure adopted are quite efficient and can be applicable to a wide class of practical elastic structural design problems.

요 지

본 연구에서는 평면 변형도상태 하에서 정수압을 받는 2차원 탄성 콘크리트 댐의 단면 모양을 최적화함으로써 댐의 질량을 최소화하였다. 최적화 문제의 목적함수로는 댐의 단면적이며, 제약조건으로는 주응력 제약조건과 두께 제약조건들이, 설계변수로는 모델 경계의 모양이 채택되었다.

모델 영역의 변화에 따른 설계감도해석을 위해 최적화 문제를 범함수 형태로 변환한 후 연속체 역학의 물질미분 개념과 Adjoint Variable Technique을 활용하였고, 최적화를 위해서는 Gradient Projection Method를 사용하였다.

연구 결과 본 연구에 적용된 이론이 효율적이고 실제 탄성구조물 설계에 광범위하게 응용될 수 있음이 밝혀졌다.

구조물 최적설계 시 구조물 부재의 단면적 또는 두께 등이 설계변수로 채택되는 경우에 대한 연구는 매우 활발히 진행되어 왔다⁽¹⁾. 이 경우

1. 서 론

* 정회원 · 한국과학기술원 기계공학부

구조물의 모양은 변하지 않으므로 구조물의 수학적 모델이 정의되는 영역(Domain)은 고정되고 최적화에 필요한 설계감도해석(Design Sensitivity Analysis)을 위해 변분법(Variational Calculus)과 Adjoint Variable Technique이 활용되었다. 한편, 응용물리학 분야에 등장하는 모양최적설계 문제에 관한 연구는 Cea⁽²⁾에 의해 많이 진행되었는데, 주로 경계치 문제의 변분화(Variational Formulation) 방법을 이용하였다. 본 연구에서는 이 이론을 탄성구조물 최적설계 문제에 도입하여 평형방정식의 변분화, 연속체 역학의 물질미분(Material Derivative) 개념 및 Adjoint Variable Technique을 사용하여 모양이 연속적으로 변하는 영역 위에서 정의된 범함수(Functional)들의 설계감도해석을 수행하였다. 설계감도 해석이 진행된 후에는 최적화 기법의 하나인 Gradient Projection Method를 사용하여 최적화를 시도하였다. 이와 같은 방법은 하중이 작용하는 경계의 모양이 변화하지 않는 비교적 간단한 탄성구조물 모양최적설계 문제에 적용되어 좋은 결과를 얻고 있다.^(3,4) 본 연구에서는 이와같은 이론들을 결합하여 하중이 작용하는 경계의 모양이 변화하고, 이에 따라 구조물에 작용하는 하중이 바뀌게 되는 경우의 모양 최적설계를 2차원 탄성 콘크리트 댐을 예제로 사용하여 진행하였다.

2. 모델설명 및 최적화 문제의 정의

2.1 댐의 수학적 모델

그림 1에 정수압을 받는 2차원 콘크리트 댐의 수학적 모델이 표시되어 있다. 모델의 영역은 Ω , 경계는 Γ 로 각각 표시되었고 Γ 는 그림에 표시된 바와 같이, 내부면($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$)으로 나누어진다. 이 시스템에 작용하는 평형방정식과 경계조건은 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} -\mu z^i_{,ji} - (\lambda + \mu) z^j_{,ji} &= F^i, \quad i=1, 2, \\ & j=1, 2 \\ T^i &= -\gamma_w(l-x_2)n_i, \quad i=1, 2, \text{ on } \Gamma_1 \\ T^i &= \sigma^{ij}n_j = 0, \quad i=1, 2, \quad j=1, 2 \text{ on } \\ & \Gamma_2 \text{ and } \Gamma_3 \\ z^i &= 0, \quad i=1, 2, \text{ on } \Gamma_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

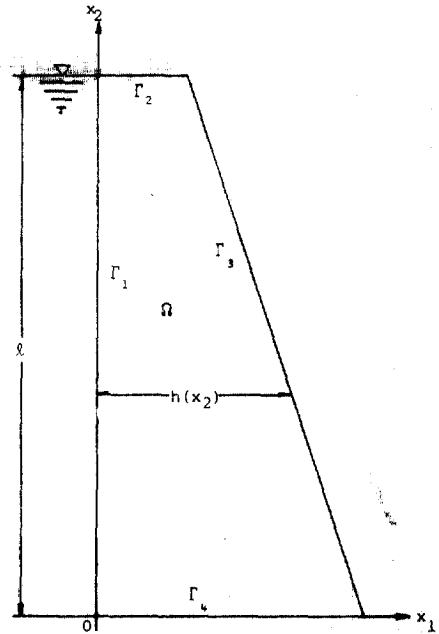


그림 1. 댐의 단면.

여기서, $z=[z^1, z^2]^T$, $F=[F^1, F^2]^T$, $T=[T^1, T^2]^T$, $n=[n_1, n_2]^T$ 는 변위벡터, Body Force 벡터, Surface Traction 벡터, 경계에서의 법선방향단위 벡터를 각각 의미하고 λ 와 μ 는 Lamé 상수, γ_w 는 물의 비중을 뜻한다. 식(1)에는 Summation Convention이 사용되었고 σ^{ij} 는 2차원 응력텐서의 요소를 나타낸다.

2.2 최적화 문제의 정의

댐의 질량을 최소화하기 위해 단면적을 목적함수로 선택하면,

$$\phi_0 = \int_{\Omega} d\Omega \dots\dots\dots(2)$$

로 표시된다. 댐의 특성상 Γ_2 와 Γ_4 의 모양은 직선으로 x_1 축과 평행하다고 가정한다. (즉, 모델 내부에 있는 모든점의 x_2 방향이동은 없다고 가정한다). 이 경우 최적화 문제는 식(2)를 최소화하며 아래에 열거된 제약조건들을 만족시키는 Γ_1 과 Γ_3 의 모양을 찾는 문제로 귀착된다.

응력제약조건: 댐 내부에 발생하는 주응력은 항상 압축응력이어야 하며, 주어진 기준치 이내에 있어야 하고 이는 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_L \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 0 \dots\dots\dots(3)$$

여기서, σ_L 은 콘크리트의 허용압축강도를 뜻한다.

두계 제약조건 : 댐 단면을 통한 누수방지 등의 목적을 위해 댐의 두께는 항상 기준치보다 커야 한다. 즉,

$$h(x_2) \geq h_L \dots \dots \dots (4)$$

을 만족하여야 하며 h_L 은 댐 두께 하한치를 의미한다.

3. 문제의 변분화 및 범함수화

3.1 평형방정식의 변분화

미분방정식 형태로 주어진 평형방정식(식(1))을 변분화하기 위해 다음과 같이 Kinematically Admissible Displacement Set K 를 정의할 필요가 있다.

$$K = \{u = [u^1, u^2]^T : u \in [H^1(\Omega)]^2 \text{ and satisfies principal boundary conditions} \dots \dots \dots (5)$$

여기서, $[H^1(\Omega)]^2$ 는 영역 Ω 에서 정의되는 1차 Sobolev Space⁽⁵⁾의 Product Space 를 뜻한다.

식(1)의 해를 구하는 문제는

$$\int_{\Omega} \sigma^{ik}(z) \varepsilon^{ik}(v) d\Omega = \int_{\Omega} F_i \cdot v d\Omega + \int_{r_1} T_i \cdot v d\Gamma \dots (6)$$

을 만족시키는 함수 $z \in K$ 를 구하는 문제와 동일하며⁽⁶⁾, 이 식은 모든 $v \in K$ 에 대해 성립한다. 이 식에서 $\varepsilon^{ik}(v)$ 는 함수 v 를 변위함수 z 와 동일하게 취급할 경우 얻어지는 2차원 변형도 텐서의 요소를 나타낸다. 식 (6)으로부터 z 를 구하는 방법으로는 유한요소법을 활용한다. 식(6)에는 Summation Convention 이 사용되었다.

3.2 응력제약조건의 범함수화

식 (3)으로 표시된 응력제약조건은 모델의 모든 점에서 만족되어야 하나 이를 수치적으로 확인하기 불가능하고, 설계감도 해석을 수행하기 어려운 형태이므로, 식 (3)을 범함수 형태로 변환할 필요가 있게 된다. 이를 위하여 Mollifier Function⁽⁴⁾을 이용하여 식 (3)을 각 유한요소의 영역에서 정의되는 범함수 형태 제약조건으로 변환할 수 있고, 이는 아래와 같이 표현된다.

$$\phi_{ij} = \int_{\Omega_i} M_i \phi_j d\Omega = \int_{\Omega_i} M_i \phi_j d\Omega \leq 0, \quad i=1, \dots, NEL, j=1, 2 \dots \dots \dots (7)$$

여기서, NEL, Ω_i , M_i 는 총 유한요소의 수, 각 유한요소의 영역, Ω_i 위에서 정의되는 Mollifier

Function($M_i > 0$ 이고 Ω_i 밖에서는 $M_i = 0$ 이며, $\int_{\Omega} M_i d\Omega = 1$)을 뜻한다. 식 (7)에서 첨자 j 는 주 응력 변호를 뜻하고 ϕ_j 는 식 (3)으로 부터 얻어지며, 예를들어,

$$\phi_1 = -\sigma_1 + \text{constant} \dots \dots \dots (8)$$

로 주어진다.

4. 범함수의 변분 계산

4.1 범함수의 물질미분(Material Derivative)

모양 최적설계를 위해서는 구조물 모양의 변형을 정의하여야 한다. 본 연구를 위해서는 속도분포함수 $V(X)$ 를 도입하였다. (그림 2참조) $V(X)$ 는 변형 되기 전의 영역 Ω 내부에 있는 모든 점 X 가 변형된 영역 Ω_t 내부의 x 점으로 이동하는 방향을 정의하며, 이 관계는 변환식 $x = X + tV(X)$ 로 주어진다.

Step Size Parameter t 가 0으로 접근함에 따라 변형된 영역 Ω_t 는 변형되기 전 영역 Ω 로 접근하게 된다. 즉, $\Omega = \Omega_0$ 로 나타내어진다. 마찬가지로 주어진 $V(X)$ 에 대해 평형 방정식의 해인 z 는 t 의 함수 $z_t(X + tV(X))$ 로 표시될 수 있다. $z' = \partial z_t(X) / \partial t$ 로 정의하고 연체역학의 물질미분 방법을^(3,4) 이용하면 범함수 $\phi = \int_{\Omega_t} G(z_t) d\Omega_t$ 의 영역 변화에 따른 미소변분은

$$\delta \phi = \int_{\Omega} G_{z_i} z'_i d\Omega + \int_{r} G(z) V \cdot n d\Gamma \dots \dots \dots (9)$$

로 표시된다. 여기서, n 은 경계에서의 법선방향 단위 벡터를 나타내고 $G_{z_i} = \frac{\partial G}{\partial z_i}$ 를 뜻한다. 동일한 방법으로 경계에서 정의되는 범함수의 미소 변분을 계산할 수 있다.

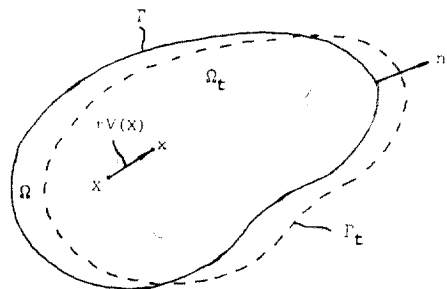


그림 2. 영역의 변화

윗식 오른쪽 항들의 물리적인 개념을 살펴보면 첫째항은 고정된 영역에서 z 의 변화에 따른 범함수의 미소변분을 나타내고, 둘째 항은 경계의 법선방향 이동에 의한 영향을 나타낸다.

4.2 평형방정식의 변분 계산

식(6)에 식(1)의 경계조건을 대입하고 4.1절에 설명된 방법을 이용하여 변분 계산을 수행한 결과는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^{jk}(z') \varepsilon^{jk}(v) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma^{jk}(v') d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} \sigma^{jk}(z) \varepsilon^{jk}(v) \dot{D} d\Gamma = \int_{\Omega} F \cdot v' d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} F \cdot v \dot{D} d\Gamma - \gamma_w \int_{\Gamma_1} (l-x_2) (V \cdot v) \dot{D} d\Gamma + \gamma_w \int_{\Gamma_1} v^2 \dot{D} d\Gamma \\ & - \gamma_w \int_{\Gamma_1} (l-x_2) (n \cdot v') d\Gamma \\ & - \gamma_w (l-x_2) v^2 V_1 |_{\lambda}^{\beta} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

여기서, 점 A 와 B 는 Γ_1 의 아랫점과 윗점을 각각 뜻한다. 식(10)의 마지막 항은 A 점에서는 $v^2=0$ 이고 B 점에서는 $l-x_2=0$ 이므로 없어지게 된다.

또한 본 문제에서는 v' 과 v 가 K 에 속한다는 사실이 쉽게 증명된다⁽⁵⁾.

따라서, 식(6)에 $v=v'$ 을 대입하고(식(6)은 K 에 속하는 모든함수 v 에 대해 성립한다.)이들 식(10)에 다시 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^{jk}(z') \varepsilon^{jk}(v) d\Omega = - \int_{\Gamma} \sigma^{jk}(z) \varepsilon^{jk}(v) \dot{D} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} F \cdot v \dot{D} d\Gamma - \gamma_w \int_{\Gamma_1} (l-x_2) (V \cdot v) \dot{D} d\Gamma \\ & + \gamma_w \int_{\Gamma_1} v^2 \dot{D} d\Gamma \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

이 얻어진다. 윗식에서 $\dot{D}=V \cdot n$ 을 나타낸다. 평형방정식과 마찬가지로 이식은 K 에 속하는 모든 함수 v 에 대해 성립한다.

5. 설계감도해석

목적함수 : 식(2)의 물질미분을 취하면

$$\delta\phi_0 = \int_{\Gamma} \dot{D} d\Gamma \dots \dots \dots (12)$$

가 얻어진다.

응력제약조건 : 식(7)은 편의상 다음과 같이 간단히 표시할 수 있다.

$$\phi_{ij} = \int_{\Omega} H_i(\sigma) d\Omega \leq 0, \quad i=1, \dots, NEL \dots \dots (13)$$

여기서, $H_i(\sigma) = M_i \phi_j(\sigma)$, $j=1$ 또는 2 를 뜻한다. M_i 의 특성으로 인해 요소의 경계에서 $H_i(\sigma) = 0$ 이다. 식(13)의 물질미분을 취하면

$$\delta\phi_{ij} = \int_{\Omega} H_{i,j} \sigma^{jk}(z') d\Omega, \quad i=1, \dots, NEL \dots (14)$$

으로 표시되고, 여기서 $H_{i,j} = \partial H_i(\sigma) / \partial \sigma^{jk}$ 를 뜻

하며, 윗식에는 상첨자 j 와 k 에 대해 Summation Convention이 사용되었다.

식(12)와(14)를 비교하면, 전자는 경계의 변화량으로 직접 표시되었지만 후자는 z' 의 함수로 표시되어 있다. 후자를 경계의 변화량의 함수로 나타내기 위해서 다음 식의 해이고 K 에 속하는 Adjoint Variable λ_i 를 정의 할 필요가 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^{jk}(\xi) \varepsilon^{jk}(\lambda_i) d\Omega = \int_{\Omega} H_{i,j} \sigma^{jk}(\xi) d\Omega, \\ & i=1, \dots, NEL \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

윗식은 K 에 속하는 모든 함수 ξ 에 대해 성립한다.

z' 이 K 에 속하므로 식(15)에 $\xi=z'$ 을 대입할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^{jk}(z') \varepsilon^{jk}(\lambda_i) d\Omega = \int_{\Omega} H_{i,j} \sigma^{jk}(z') d\Omega, \\ & i=1, \dots, NEL \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

마찬가지 방법으로 λ_i 가 K 에 속하므로 식(11)에 $v=\lambda_i$ 를 대입하면,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma^{jk}(z') \varepsilon^{jk}(\lambda_i) d\Omega = - \int_{\Gamma} \sigma^{jk}(z) \varepsilon^{jk}(\lambda_i) \dot{D} d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} F \cdot \lambda_i \dot{D} d\Gamma - \gamma_w \int_{\Gamma_1} (l-x_2) (\nabla \cdot \lambda_i) \dot{D} d\Gamma \\ & + \gamma_w \int_{\Gamma_1} \lambda_i^2 \dot{D} d\Gamma, \quad i=1, \dots, NEL \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

이 얻어지고,

식(14), 식(16), 식(17)을 비교하면 최종적으로

$$\begin{aligned} & \delta\phi_{ij} = \int_{\Omega} \sigma^{jk}(z) \varepsilon^{jk}(\lambda_i) \dot{D} d\Gamma + \int_{\Gamma} F \cdot \lambda_i \dot{D} d\Gamma \\ & - \gamma_w \int_{\Gamma_1} \{ (l-x_2) (\nabla \cdot \lambda_i) + \lambda_i^2 \} \dot{D} d\Gamma, \\ & i=1, \dots, NEL \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

이 얻어진다.

식(18)의 우변은 모두 경계의 변화량 \dot{D} 의 함수로 표시되었다. 다시 말해 경계의 변화에 따르는 제한조건의 변화를 계산할 수 있게 되었다. 이 결과를 수치적으로 계산하기 위해 경계의 모양을 설계변수로 나타내고 경계의 변화량 \dot{D} 를 설계변수의 변분으로 표시할 필요가 있다.

이를 위해 그림 3에 굵게 표시된 점들의 x_1 좌표를 설계변수로 선택하고 이 점들 간의 경계의 모양은 직선으로 가정하였다. 이 경우 경계의 변화량은 $\dot{D} = A(x_1, x_2) \delta b$ 로 나타낼 수 있게 되어, 식(12)와 식(18)은 각각

$$\begin{aligned} & \delta\phi_0 = \int_{\Gamma} A(x_1, x_2) d\Gamma \delta b \dots \dots \dots (19) \\ & \delta\phi_{ij} = [- \int_{\Omega} \sigma^{jk}(z) \varepsilon^{jk}(\lambda_i) A(x_1, x_2) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} F \cdot \lambda_i A(x_1, x_2) d\Gamma - \gamma_w \int_{\Gamma} \{ (l-x_2) \} \end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot \lambda_i) + \lambda_i^2 A(x_1, x_2) d\Gamma] \delta b, \\ i=1, \dots, NEL \dots \dots \dots (20)$$

으로 표시되고 댐 두께 제약조건은 설계변수 제약조건으로 바뀌게 된다.

6. 최적설계결과

제 5 장에서 설명된 방법을 통해 최적설계 문제에 등장하는 목적함수 및 제약조건들의 설계감도계수(Design Sensitivity Coefficient)를 계산한 후에는 비선형 프로그램(Nonlinear Programming) 최적화 이론을 이용하여 반복적으로 수치적인 최적설계를 진행하게 된다. 본 연구를 위해서는 참고문헌 6에 수록된 Gradient Projection Method 를 이용하였다.

본 논문에 제시된 탄성 콘크리트 댐의 최적설계를 위해 $l=100ft$, $\gamma_w=62.4lb/ft^3$, $h_L=12.5ft$ 를 사용하였으며, 비중이 $150lb/ft^3$ 이고 콘크리트의 압축강도 σ_c 는 $-3000psi$ 인 콘크리트를 선정하여 시방서에 따른 콘크리트의 탄성계수 값은 $E=3.32 \times 10^6 psi$, $\nu=0.2$ 를 적용하였다.

그림 3 에는 초기 형상에서의 댐의 유한요소 모델이 나타나 있다.

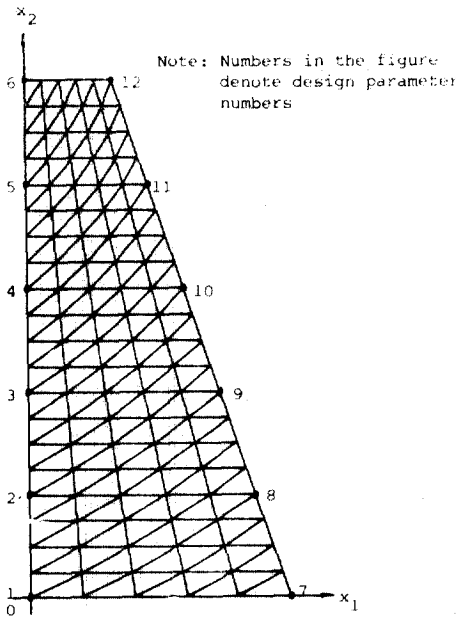


그림 3. 댐의 유한 요소 모델

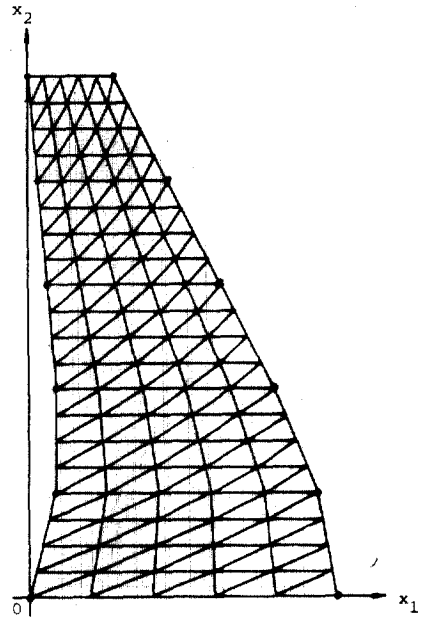


그림 4. 유한요소 모델 수정방법

본 연구를 위해서는 절점수가 6 이고 형상함수가 2 차인 삼각형 유한요소 200 개가 사용되었고 총 자유도는 451 이었다.

수치적인 최적설계도중 댐 모양이 변하는 영향을 고려하기 위해 유한요소모델은 설계변수가 새롭게 계산될 때마다 다음과 같은 방법으로 수정되었다.

(1) Γ_1 과 Γ_3 상의 12 점의 x_1 좌표는 설계변수에 의해 정해진다. (이점들의 x_2 좌표는 변하지 않음.)

(2) 모델의 경계위에 있고, 삼각형요소의 정점인 절점은 위의 12 점 사이를 등 간격으로 나누어 x_1 좌표를 정한다.

(3) 모델의 내부에 있고 삼각형 요소의 정점인 절점은 (1)과 (2)에서 정해진 경계 위의 점들 중 x_2 좌표가 같은 점을 직선으로 연결한 후, 등 간격으로 나누어 x_1 좌표를 정한다.

(4) 각 삼각형 요소들의 중간 점들은 정점들 사이에 등간격으로 x_1 및 x_2 좌표를 정한다.

그림 4 에는 임의의 모양에서 위의 방법을 이용해 작성된 댐의 수정된 유한요소 모델이 나타나 있다.

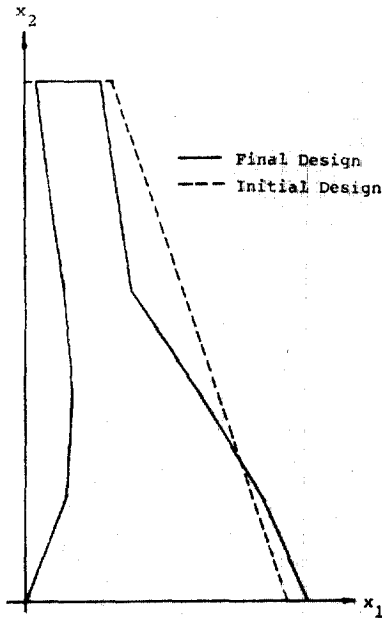


그림 5. 최적설계 결과

멤의 초기 형상은 그림 3에 나타난 바와 같이 Γ_1 은 수직선, Γ_3 는 기울어진 직선이라고 가정하였다. 이 형상에서는 모든 설계치가 응력 및 두께 제약조건들을 만족시켰고, 단면적의 크기는 $4.800 \times 10^6 \text{in}^2$ 이다. 71회의 반복적인 최적설계를 진행 한 후, (그림 5 참조) 단면적은 $3.523 \times 10^6 \text{in}^2$ 으로 줄었다. 이 경우 Γ_1 에 위치한 유한 요소들에서 σ_1 이 응력제약조건에 도달하고 있었고, 두께 제약조건도 멤의 상부에서 제약조건에 한계치에 도달하고 있었으나 압축응력의 하한치 제약조건들은 충분히 만족시키고 있었다. Prime 750 전자계산기를 이용하여 71회의 반복적인 최적설계를 진행하는 데 소요된 CPU 사용시간은 98분이었다.

7. 결과 검토 및 결론

그림 5에 표시된 최적설계 결과를 검토할 때, 최종설계된 멤의 형상은 물리적으로 타당함을 즉시 알 수 있다. 멤의 상부에서는 정수압의 크기가 미소하므로 두께 제한 조건을 만족시키는 한도 안에서 단면적이 줄어들었고, 멤의 상부가 상

대적으로 왼쪽으로 이동하며, Γ_1 에 압축응력을 일으키는 굽힘 모멘트를 발생시켜, 정수압에 의한 반대방향 굽힘 모멘트를 상쇄시킴으로써 Γ_1 에서 발생하는 인장응력에 의한 콘크리트의 파단을 방지해 주게 되었다.

본 연구 결과 물질미분 개념과 Adjoint Variable Technique을 이용한 설계 감도해석 방법이 타당함을 알 수 있었고, 이 이론은 3차원 구조물의 최적설계에도 그대로 사용할 수 있다. 본 연구를 위해 선정된 예제는 모양최적 설계이론을 개발하기 위한 비교적 간단한 형태로 실제 멤 설계시의 모든 문제점들과 시공을 위한 측면을 충분히 고려하지 않았으나 산업현장에서의 활용을 위해서는 설계변수 선정방법과 제한조건들을 적절히 조절함으로써 실제문제 해결에 광범위하게 이용될 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

1. Haug, E.J., "A Review of Distributed Parameter Structural Optimization Literature," *Optimization of Distributed Parameter Structures*, (Ed. E.J. Haug and J. Cea), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands, 1981, pp. 3~74.
2. Cea, J., "Problems of Shape Optimal Design," *Optimization of Distributed Parameter Structures*(ed. E.J. Haug and J. Cea), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1981, pp.1005~1048.
3. Haug, E.J., Choi, K.K., Hou, J.W., and Yoo, Y.M., "A Variational Method for Shape Optimal Design of Elastic Structures," *Optimum Structural Design 11*(ed. R.H. Gallagher), Wiley, New York, 1983.
4. Haug, E.J., Choi, K.K., and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York, 1983.
5. Aubin, J.-P., *Applied Functional Analysis*, Wiley-interscience, New York, 1979.
6. Haug, E.J., and Arora, J.S., *Applied Optimal Design*, Wiley-Interscience, New York, 1979.

(接受 : 1985. 1. 28)