

# 經緯度 座標 $\varphi, \lambda$ 에 의한 測地網의 同時調整

Simultaneous Adjustment of Geodetic Networks by Geographical  
Coordinates  $\varphi, \lambda$

白	殷	基*
Baick,	Eun	Kee
李	榮	鎮**
Lee,	Young	Jin
崔	允	秀***
Choi,	Yun	Soo

## Abstract

This paper deals with simultaneous geodetic networks adjustment by geographical coordinates  $(\varphi, \lambda)$ . The adjustment computation is performed by variation of coordinates, and the classical method with fixed points and free networks are also compared. Provisional values for observation equations are computed by extended Gauss-mid latitude formula using existing official coordinates. Bessel ellipsoid and unit weight are adopted.

The processing of a test-network by distances yields the average root mean square error of position 6.2 cm for classical method and 2.4cm for free networks. The standard error of unit weight in a test-network is  $1.66 \times 10^{-6}$  radian ( $0.3''$ ), and the analysis of error ellipses shows that free networks are more normally distributed errors.

## 要 旨

본 論文에서는 經緯度 座標  $(\varphi, \lambda)$ 에 의해 測地網을 同時調整하는 컴퓨터 프로그램을 작성하고, 1 點 1 方向 固定인 경우와 自由網조정의 두 경우를 검토하였다. 舊成果를 初期值로 이용하고 Hubeny에 의해 확장된 Gauss의 平均緯度式을 사용하였으며, 座標調整法에 의해 調整計算을 실시하였다. 基準橢圓體로는 Bessel 치를 사용하고, 觀測에 대한 重量을 1로 가정하였다.

우리 나라 일부지역의 實測데이터를 적용한 결과 平均位置誤差가 1점 1 방향 고정의 경우 6.2 cm, 自由網의 경우는 2.4 cm로 나타났다. 적용된 三邊網의 單位重量에 대한 標準誤差는  $1.66 \times 10^{-6}$  라디안 ( $0.3''$ )이고, 誤差橢圓을 분석한 결과 自由網이 오차분배면에서 효과적임을 보여 주고 있다.

\* 正會員·서울市立大學 教授, 土木工學科

\*\* 正會員·서울市立大學 助教, 土木工學科

\*\*\* 正會員·서울市立大學 大學院 碩士過程

## 1. 序 論

우리 나라의 1등 地網은 1910년~1918년의  
土地調查事業을 통하여 이루어졌다. 당시의 地網  
은 13개의 블록으로 구성하여 각 블록 내에 하  
나씩의 檢基線을 설치하고 총 400점(남한 189  
점)의 1등 三角點으로 구성되었다<sup>(1,2)</sup>.

관측된 각은 測點調整을 통하여 方向으로 바꾼후, 각자의 網(블록)에 대하여 조정을 실시하였다. 검기선을 증대시킨 변장과 조정을 끝낸 블록의 변장을 고정시킨 후, 條件式에 의해 調整을 (method of conditions)하였다. 통일 블록 내의 점의 座標( $\phi, \lambda$ )는 Schreiber 식에 의해 主問題 (direct problem)에 의해 구하였으며, 이 때에도 既知點(이미 구한 점의 穀)을 고정하여 계산하였다.

그러므로, 이와같은 각, 거리, 좌표의 조정값은 고정점의 오차(分散一共分散)를 무시하였으므로 해석법이 아니며, 각 블록내에서는 方向補正을 위한 점(laplace point)이 없기 때문에 우리 나라의 網 전체에 비틀림이 내재되어 있다.

이상과 같이 手計算에 의해 조정을 하는 과정에서 연산을 줄이기 위한 半解析的인 방법 (semi-rigorous method)과 條件式에 의한 방법을 채택하였으나, 근래에는 컴퓨터의 발달로 座標調整法에 의한 測地網의 同時調整이 가능하게 되었다<sup>(3, 4, 5)</sup>.

우리 나라의 测地網에서도 동시 조정을 통한 再調整이 절실하며, 진행중인 정밀 삼각망에 적용될 수 있다.

이러한 同時調整法에는 投影을 어떻게 適用시키는 데에 따라 다음 두 가지로 대별된다<sup>(6)</sup>.

먼저 地表面上의 觀測值를 檿圓體상의 값으로  
補正한 후, i) �胤圓體상의 거리, 방향등을 이용  
하여  $\varphi, \lambda$  座標調整을 실시하고, 經緯度 座標를  
구하는 방법,  $x = h(\varphi, \lambda)$ ,  $y = i(\varphi, \lambda)$ 의 투영 계산  
에 의해  $x, y$  좌표를 구할 수 있다.

ii) 橋圓體상의 거리, 방향을 축척계수를 이용한 距離補正, 方向補正( $t-T$ )；子午線收差( $\nu$ )에 대해 보정을 하여 平面상의 값으로 만든 후  $X, Y$  마크으로써 座標調整을 실시하여 평면직각좌

표를 구하는 방법. 여기서는  $\varphi = P(x, y)$ ,  $\lambda = Q(x, y)$ 의 투영계산에 의해  $\varphi, \lambda$ 를 구할 수 있다.

이 두 방법은 地域의 크기에 따라 선택되지만  
國家基準點網일 경우에는 보통 i)의 방법에 따  
르며 ii)는 보정량이 커져 망에 비틀림이 발생하  
므로 좁은 지역에 적용되는 것이 보통이다.

본 연구에서는 1)의 방법에 따른  $\varphi$ ,  $\lambda$  망을 座標調整法을 적용하여 프로그램을 구성하고 측지 망을 조정계산하고자 하였으며, 또, 1점 1방향 고정과 자유망 조정에 대하여 검토코자 하였다.<sup>(7,8,9)</sup>

여기서 基準橢圓體로는 벳벨값을 채택하였으며, 관측에 대한 重量은 1로 가정하였다.

## 2. 座標調整法

좌표조정법 (variation of coordinates) 에서는 개개의 관측에 대하여 다음과 같은 觀測方程式 으로 나타낼 수 있다<sup>(6, 10, 11)</sup>.

여기서,  $V$ 는 잔차 벡터,  $A$ 는 계수 메트릭스 또는 설계 메트릭스,  $X$ 는 미지좌표에 대한 보정량 벡터로서 경도보정량  $\delta\lambda$ , 위도보정량  $\delta\phi$ 로 구성된다. 또,  $L$ 은 관측치와 초기치와의 차이에 대한 벡터이다. 중량 메트릭스  $P$ 는 각각의 관측방정식에 적용될 수 있다.

윗식 (1)에서 관측방정식의 수  $m$ 이 미지수의 수  $n$ 보다 클 경우 **最小제곱법**의 원리를 적용하여 다음 조건이 만족되도록 한다. 즉,

여기서  $V^T$ 는  $V$ 의 전치행렬이다.

위 (2)식의 조건을 만족하기 위해서는 다음과 같은 正規方程式(normal equation)을 푸는 결과와 일치된다.

여기서  $A^T P A = N$ ,  $A^T P L = t$ 로 놓으면,

가 된다. 이식이 보정량  $\delta\lambda_i$ ,  $\delta\varphi_i$ 를 구하는 식이 된다.

또,  $Q = N^{-1} = (A^T P A)^{-1}$ 은 중량에 대한 계수 행렬이며 벡터  $\mathbf{X}$ 에 대한 分散—共分散 메트릭 스(variance-covariance matrix)는 다음과 같다.



$\alpha_{ij}^{(0)}$ 는 초기좌표에서 계산된 방위각이다.

方向觀測方程式은,

$$r_{ij} = a_1' \delta\varphi_i + a_2' \delta\lambda_i + a_4' \delta\varphi_j + a_5' \delta\lambda_j - \delta\Omega_i + d_{ij}^{(0)} - d_{ji} - \Omega_i^{(0)} \quad (20)$$

단,  $\Omega_i^{(0)}$ 는標準角의 初期值,  $\delta\Omega_i$ 는 標定誤差,  $d_{ij}$ 는 方向의 觀測值,  $d_{ij}^{(0)}$ 는 方位角으로 계산한  $d_{ij}$ 의 初期值이며,  $\Omega = \delta\Omega_i + \Omega^{(0)}$ 이다.

또한 水平角의 觀測方程式은

$$\begin{aligned} r_{ijk} = & (a_1'(k) - a_1'(j)) \delta\varphi_i + (a_2'(k) \\ & - a_2'(j)) \delta\lambda_i + a_4'(k) \delta\varphi_k + a_5'(k) \delta\lambda_k \\ & - a_4'(j) \delta\varphi_j - a_5'(j) \delta\lambda_j + w_{ijk}^{(0)} - w_{ijk} \end{aligned} \quad (21)$$

가 된다. 단,  $w_{ijk}^{(0)}$ 는 초기 좌표값으로부터 계산된 타원체상의 값이며  $w_{ijk}$ 는 타원체상으로 화성된 관측값이다.

표 1. (6)

미지수	첨자	관측각 또는 방향 $a'$	관측거리 $c'$
$\varphi_i$	1	$M \sin \alpha / S$	$-M \cos \alpha$
$\lambda_i$	2	$N' \cos \alpha' \cos \varphi / S$	$N' \sin \alpha' \cos \varphi'$
$\varphi_j$	4	$M' \sin \alpha' / S$	$-M \cos \alpha'$
$\lambda_j$	5	$-N' \cos \alpha' \cos \varphi' / S$	$-N' \sin \alpha' \cos \varphi'$

표 1에서,

$$N = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{卯酉線 반경}$$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}} \quad \text{子午線 반경}$$

특별한 경우로서 Hubeny는 平均緯度를 사용할 수 있는 식을 제시하고 있다<sup>(3, 4, 5, 12, 13)</sup>.

한 예로서, 距離觀測方程式의 경우는

$$\begin{aligned} v = & -a \delta\lambda_1 - b \delta\varphi_1 + a \delta\lambda_2 + b' \delta\varphi_2 \\ & + \frac{S_{\text{prov}} - S_{\text{obs}}}{S_{\text{prov}}} \rho, \end{aligned} \quad (22)$$

가 된다.

여기서

$$a_i = \frac{N \cos \varphi \sin \alpha}{S_{\text{prov}}},$$

$$b_i = \frac{M \cos \alpha}{S_{\text{prov}}} + \frac{N \sin \varphi \sin \alpha}{2S_{\text{prov}}} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\rho},$$

$$b'_i = \frac{M \cos \alpha}{S_{\text{prov}}} - \frac{N \sin \varphi \sin \alpha}{2S_{\text{prov}}} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\rho},$$

단,

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad \text{점 1과 점 2의 평균위도}$$

$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \dots \dots \dots \text{경도의 차이}$

$$\alpha = \frac{A_{12} + A_{21} \pm 180^\circ}{2} \dots \dots \text{평균 방위각}$$

첨자 prov. (provisional values) 초기치  
obs. (observations) 관측치

## 5. $\varphi, \lambda$ 網 調整 프로그램

座標調整法에 의하여 測地網을 同時調整(simultaneous adjustment)하기 위하여 그림 1과 같이 1점 1 방향고정과 自由網조정이 가능하도록 프로그램을 작성하였다.

距離의 觀測值  $S$  와 舊成果를 入力데이터로 하여 Hubeny에 의하여 확장 유도된 Gauss의 평균緯度公式(문현 12 참조)을 적용하여 관측치의 初期值가 계산되도록 편성하였다<sup>(3, 12, 13)</sup>. 觀測方程式의 계수메트릭스는 식(18) 또는 식(22)에 의하고 測地網 調整은 1점 1 방향 고정의 경우는

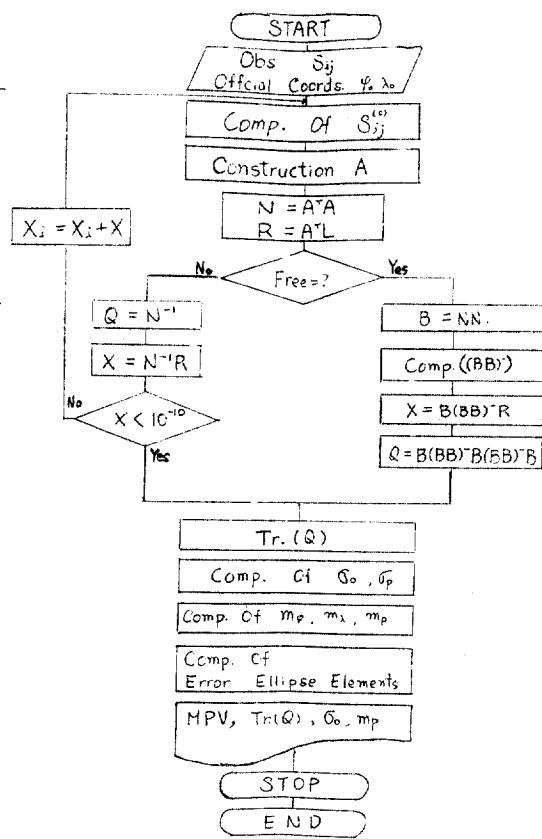


그림 1. 흐름도

식(4), (5)를 自由網 調整의 경우에는 식(11), (12)을 적용하였다.

正規方程式은 Gauss 의 消去法을 적용하여 直接解를 구하도록 구성되어 있다. 1점 1 방향 고정의 경우 세좌표( $\delta\varphi_1=\delta\lambda_1=\delta\varphi_2=0$ )를 고정하고  $10^{-10}$ 에 수렴되도록 反復計算을 실시하였다. 自由網調整의 경우에는 Mittermayer 와 같이 정규 행렬의 一般逆行列(normal inverse)<sup>(7,8,9)</sup>을 사용하여 풀리도록 구성하였다.

최종적으로 最確值인 경위도좌표의 조정치( $\varphi$ ,  $\lambda$ ), 단위중량에 대한 표준오차  $\sigma_0$ , 각 점에 대한 위치오차  $M_p$ , 오차타원요소 및 평균위치 오차  $\sigma_0 \sqrt{\text{tr}(Q)/n}$ 의 값들이 出力되도록 하였다.

프로그램의 타당성을 입증하기 위하여, 1점 1 방향고정의 경우 Komaki의 lecture note [문현 14참조]의 예제를 적용하여 본 결과 그 값이 정확하게 일치함을 확인하였다<sup>(14)</sup>.

## 6. 적용 및 분석

이 논문에서는 國立地理院에서 1982년에 관측한 精密三角測量 觀測值의 일부인 忠北미원, 속리지역의 13 점(관측변장 26개, 평균관측거리 10.7km)의 값을 사용하였다.

測量成果審查基準 및 同解說의 作業規程에 따라 관측한 거리를 기상보정 및 평균해면상으로 투영계산된 기준타원체상에서의 거리를 사용하였다<sup>(4)</sup>.

먼저, (18)식과 (22)식을 관측방정식으로 각각 적용한 결과 단위 중량에 대한 표준오차  $\sigma_0$  가  $1.66 \times 10^{-6} \text{ rad}$ 으로 같으며 최학치도 정확히 일치함을 확인하였다.

데이타를 처리한 결과, 最確值와 舊成果와의 차이는 표 4 와 같이 1점 1 방향의 경우 0~0.045 초(RMS 0.020 초), 자유망 조정의 경우 0.003~0.034 초(RMS 0.014초)로 나타났다.

平均位置誤差( $\sigma_0 \sqrt{\text{tr}(Q)/n}$ )는 1점 1 방향 固定에서 6.2 cm 自由網 조정에서는 2.4 cm로 나타났다. (표 2 참조) 1점 1 방향 고정인 경우와 자유망 조정인 경우에 대한 각각의 표준오차와 오차타원은 표 3 과 그림 2, 그림 3 과 같이 나타났으며, 자유망의 경우가 誤差分配面에서 효과

적임을 확인할 수 있었다.

표 2. 관측데이터 및 결과

	1점 1 방향 고정	자유망
관측수	26	26
삼각점수	13	13
미지수의 수	23	26
Rank Defect	0	3
잉여관측수	3	0
단위중량에 대한 표준오차	$1.66 \times 10^{-6} \text{ rad}(0.3'')$	$1.66 \times 10^{-6} \text{ rad}(0.3'')$
평균위치오차 $\sigma_0 \sqrt{\text{tr}(Q)/n}$	$1.03 \times 10^{-8} \text{ rad}(6.2 \text{cm})$	$0.39 \times 10^{-8} \text{ rad}(2.4 \text{cm})$
좌표의 고정	$\delta\varphi_1=0$ $\delta\lambda_1=0$ $\delta\varphi_2=0$	없음

표 3. 좌표오차 및 위치오차의 비교

(단위 : 라디안)

No.	1점 1 방향 고정( $10^{-8}$ )			자유망 ( $10^{-8}$ )		
	$m_\varphi$	$m_\lambda$	$m_p$	$m_\varphi$	$m_\lambda$	$m_p$
1	0	0	0	2.77	3.69	4.6
2	0	4.18	4.18	2.83	2.65	3.9
3	6.73	4.99	8.4	3.29	2.34	4.0
4	10.3	7.55	12.8	2.49	3.54	4.3
5	2.35	6.94	7.3	2.98	3.46	4.6
6	2.99	5.63	6.4	2.23	2.62	3.4
7	6.71	5.89	8.7	2.15	2.4	3.2
8	8.42	4.84	9.7	2.25	2.31	3.2
9	13.2	6.08	14.5	2.44	3.41	4.2
10	3.79	10.1	10.8	2.66	2.79	3.9
11	5.67	9.07	10.7	2.63	2.30	3.5
12	10.1	9.2	13.6	2.91	3.04	4.2
13	12.4	5.08	13.7	2.25	3.10	3.8

표 4. 최학치와 구성파와의 차

구분	$\Delta\varphi''$ (평균치)	$\Delta\lambda''$ (평균치)	평균치
1점 1 방향 고정	0.023	0.017	0.020
자유망	0.014	0.014	0.014

## 7. 結論

본 論文에서는 經緯度 座標( $\varphi, \lambda$ )를 사용하여

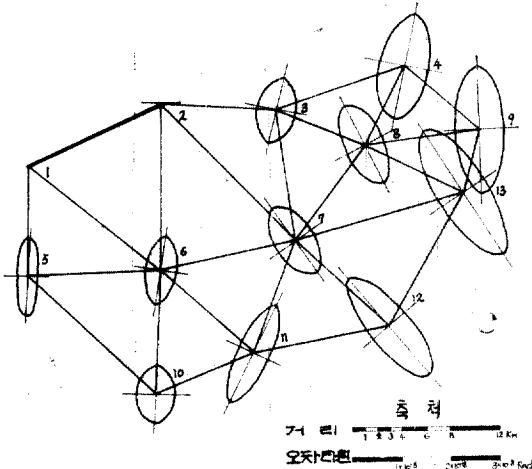


그림 2. 1점 1 방향 고정의 경우

觀測方程式을 세우고, 測地網을 同時調整하는 프로그램을 작성하였다. 基準橢圓體의 要素로는 Bessel 치를 사용하고 舊成果를 初期值로 하여 Hubeny에 의해 확정된 Gauss의 평균위도식을 계산치로 구하는 데 이용하였다.

프로그램의 타당성을 검토하기 위하여 예제를 통하여 확인한 후, 우리나라의 충북 일부지역의 13점(26측선)에 대한 관측데이터로써 1점 1방향 固定인 경우와 自由網 조정인 경우의 두 가지로써 적용해 본 결과 약 3회의 反復計算으로 실용상 충분한 결과를 얻었으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

① 平均位置誤差( $\sigma_0 \sqrt{\text{tr}(Q)/n}$ )는 1점 1방향 固定일 경우  $6.2\text{cm}(1.1 \times 1.03^{-8}\text{rad})$ , 自由網일 경우  $2.4\text{cm}(4.0 \times 10^{-9})$ 로써 自由網의 경우가 훨씬 작다(표 2).

② 각 测點의 位置誤差  $m_p$ 는 1점 1방향의 경우  $0 \sim 1.39 \times 10^{-8}\text{rad}$ , 自由網일 경우  $3.2 \times 10^{-9} \sim 4.2 \times 10^{-9}\text{rad}$ 으로 나타났다. 이는 자유망의 경우가 誤差分配面에서 타당함을 보여주고 있다(그림 2, 그림 3).

③ (18)식과 (22)식을 觀測方程式으로 각각 사용한 결과 단위중량에 대한 標準誤差  $\sigma_0$ 가  $1.66 \times 10^{-6}\text{ rad}$ 으로 같으며 最確值도 정확히 일치하므로 단순한 식(18)을 사용하는 것이 타당하다고 사료된다.

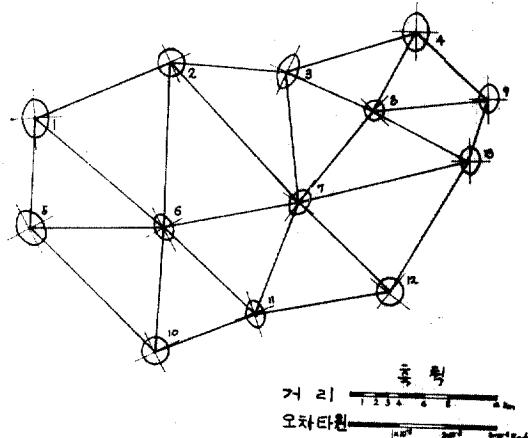


그림 3. 자유망의 경우

④ 最確值와 舊成果의 差가 平均誤差가 1점 1방향 고정의 경우  $0.0206''$ , 자유망 조정의 경우  $0.0144''$ 로 나타났으나, 관측에 대한 신뢰도를 통한 상호검토가 필요할 것으로 사료된다(표 4).

### 参考文獻

- 建設部 國立地理院, 測地技術發展研究報告書.
- 朝鮮總督府 臨時土地調查局, 朝鮮土地調查事業報告書, 1918年 11月.
- Komaki, K., "The Readjustment of the Meiji First order Triangulation Network by the Projection Method", *Bulletin of the Geographical Survey Institute*, Vol. XXIX, Part 2, 1985. 3, pp. 1~45.
- 國立地理院, "測量成果審查基準 및 同解說(1. 精密 三角測量)", 1980.
- 日本測量協會, "精密基準點測量(改訂版)", 1980.
- Vaniček, P. and E.J. Krakiwsky, "Geodesy; the concepts", North-Holland Publishing Co., 1982, pp. 398~405.
- MitterMayer, E., "A Generalization of the Least-Squares Method for the Adjustment of Free-Networks", *Bulletin Geodesique* Vol. 104, 1972, pp. 139~157.
- 日本測量協會, "測量の數學的基礎", 1982, pp. 273 ~301.

9. Bjerhammar, A., "Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses", Elsevier Scientific Publishing Co., 1973, pp. 80~111.
10. Mikhail, E.M. and G. Gracie, "Analysis and Adjustment of Survey Measurements", VNR, 1981, pp. 59~105, pp. 148~179.
11. Bomford, G., "Geodesy", Oxford, 1980, pp. 126 ~157.
12. 坪山家恒・大森又吉, "測地學序説", 山海堂, 1968, pp. 1~12, pp. 176~195.
13. 佐藤裕, "測地學の基礎", 山海堂, 1984, pp. 25~58.
14. Komaki, K., "Adjustment; Precise Geodetic Network", Lecture Note.

(接受: 1985. 10. 21)