

離散型線型追跡에 의한 制約貯水池系の 最適 제어

Optimal Control of the Constrained Reservoir System
by the Discrete Linear Tracking

權 五 憲*
Kwon, Oh Hun
鮮 于 仲 皓**
Sonu, Jung Ho

Abstract

The linear tracking theory has a great merit that its solution can be analytically obtained under the quadratic performance measure. However, this theory has not been applied to reservoir system operation yet, because the tracking assumes no boundness of the control and state vectors.

This paper presents deriving the optimal control law and solving the Riccati equations for the discrete time horizon, and its application to the real system. And the additional necessary conditions for the saturated vectors of the control and/or state are also derived using the concept of the Pontryagin's minimum principle.

The logic and its algorithm in this work are not so positive to give a general solution. In fact, it is a matter of modeling in terms of relative magnitude of disturbance and time-step size. However its application to the real environment of the Han river, which comprises six major reservoirs in series/parallel, demonstrated satisfactory results over 36 monthly stages.

要 旨

貯水池系の 最適運營은 多次元問題로서 일반적으로 O.R. 技法으로 해를 구할 수 있다. 本 研究에서 線型追跡理論을 離散化하여 2點 境界值問題를 풀었다. 이 이론의 적용에는 두가지 문제가 제기되는데 첫째, 追跡을 위한 基準이 未知數이므로 無制約 條件의 最適律을 반복 적용하여 收斂值를 구하여 이로부터 追跡基準을 산출했다. 둘째, 상태 및 제어벡터의 制約條件의 처리는 Pontryagin의 最小原理로 해결하였다.

1. 序 論

1.1 연구의 목적 및 필요성

댐의 최적개발 규모를 결정하는데는 經濟, 財

務, 社會, 環境問題 等 여러 요소가 고려되지만 특히 技術的 事項으로서 最適運營률에 의하여 저수지의 能力을 評價한다는 것은 계획 입안에 결정적 요인이라고 할 수 있다.

貯水池가 直列 및 並列 상태로 구성되어 있을 때 運營의 最適化는 多次元 問題로서 一般的으로 解析的인 解는 存在하지 않으며 O.R. 技法으

* 正會員 · 忠南大學校 工科大學 副教授, 土木工學科

** 正會員 · 서울大學校 工科大學 教授, 土木工學科

로 해결하고 있다.

본 연구에서는 Ricatti 방정식으로 해를 구하는 선형 추적理論(linear tracking theory)을 離散化하여 月別로 변동하는 물 需要(multi-pattern)에 대응하는 저수지군(multi-site)의 최적 운영률을 구하였다. 선형 추적理論은 선형系統에서 2次式的 評價函數(quadratic performance)에 대해서는 해석적으로 해를 구할 수 있는 長點을 갖고 있으나 이 理論은 제어 및 상태 벡터(control and state vector)의 無制約條件을 전제하고 있으므로 實用解法의 開發에 어려움이 있다. 따라서 여기서는 폰트리아진의 最小原理에 입각하여 이 문제를 극복하였다.

또 다른 문제점은 선형추적에 필요한 기대자취(desired trajectory)와 기대이력(desired history)을 미리 알 수 없다는 점이다.

본 연구에서는 연간 상시공급수량(firm water supply)을 가정하여 이로부터 기대자취 및 이력을 구하고 이에 대한 추적을 반복하여 收斂值를 구하는 반복법(iterative method)을 사용하였다.

1.2 연구동향

Yeh⁽²⁷⁾는 저수지 시스템의 最適運營管理를 위한 數學的 프로그래밍을 다음과 같이 분류하였다.

- ① 機會制約(chance-constraints)을 포함한 線型計劃, 推計學的 線型計劃 等
- ② 動的計劃(DP), 狀態増分 動的計劃(IDP), 離散化 微分型 動的計劃(DDDP), 狀態増分 逐次概算法(IDPSA), 推計學的 DP, 信賴度 制約 DP 等
- ③ 非線型計劃(NLP)
- ④ 모의 조작기법(simulation)

線型計劃法은 시스템의 動的機能을 반영하는데 未洽한 점이 있다. 저수지계에 대한 선형계획의 응용은 ReVelle⁽¹³⁾ 이래 Loucks⁽¹⁴⁾, Becker 및 Yeh⁽¹⁾ 등의 연구가 계속되고 있으며, 특히 Loucks⁽¹⁴⁾는 단일저수지에 대하여 時系列 流入量의 推計學的 模型을 설정하였다.

機會制約의 도입은 ReVelle 等⁽²²⁾의 연구이래 더욱 발전되고 있다⁽²³⁾.

그러나 이러한 기회제약 선형계획기법은 單一貯水池에 대해서는 그 해법이 잘 개발되고 있으나 여러 개의 저수지가 연결되어 있는 경우에는

解의 最適性和 計算上의 觀點에서 어려움이 있어서, 사실상 실제 적용은 3~4개의 저수지에 국한되고 있다. 非線型計劃技法 역시 Murray 및 Yakowitz⁽¹⁹⁾가 지적한 바와 같이 시스템의 動的 構造를 무시하고 있으며, 특히 제약조건을 정책 함수(policy function)로 반영시키는 데 난점이 있다.

非線型計劃法中 저수지시스템 운영을 비교적 잘 표시할 수 있는 方法은 傾斜投影法(gradient-projection method)⁽²⁴⁾과 공액경사법(conjugate gradient method)^(3,11)이다. 그러나 이 방법은 演算中 境界 및 꼭지점에서마다 投影行列(projection matrix)을 얻기 위한 逆行列을 구해야 하는 번거로움이 있으며, 分割行列法에 의한 반복법^(12,24)으로 투영행렬 계산량을 줄일 수 있지만, 역시 on-line 조작에는 연산시간이 길어서 적합하지 않다. Lee 등⁽¹¹⁾은 이 傾斜法으로 단지 3個 저수지에 대하여 5個 시간축(5個月)만을 썼을 뿐이다.

動的 計劃法은 實際運營에 가장 널리 쓰이고 있다. 이 方法은 잘 알려진 바와 같이 離散化에 따른 계산용량 및 계산시간이 指數的으로 팽창되는 단점을 갖고 있다. 따라서 이에 대한 補完的 技法으로서 IDPSA⁽²⁶⁾, DDDP⁽⁶⁾, MIDP⁽²⁰⁾, 修正 DDP⁽¹⁹⁾ 등이 있다.

모의 조작기법은 Fleming⁽²⁾, Fiering⁽⁸⁾, Mass⁽¹⁷⁾ 등의 연구가 있다. 實時間 操作(real-time operation)은 대부분 시스템이 복잡하여 위의 여러 기법을 組合하여 해결하려는 경향이 있다^(1,28).

水資源 시스템의 最適化에 관한 國內研究는 극히 저조하다고 할 수 있다.

徐 및 尹⁽²⁹⁾은 모의기법으로서 단일댐의 운영 방안을 연구한 바 있으며, 權等^(30,31)은 増分分析에 의한 動的 計劃으로 저수지 시스템운영 방안을 연구하였다. 梁 및 朴⁽³²⁾은 漢江水系 水力發電문제에 動的 計劃기법을 적용하였다.

李⁽³³⁾는 저수지군의 최적운영계획에 관하여 O. R. 및 시스템공학적 기법을 망라하여 方法論的인 比較考察을 하였다.

2. 시스템 서술

2.1 시스템 方程式

저수지 시스템은 動的機能을 갖고 있으며 式(1)과 같이 線型 시스템 방정식으로 기술된다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

여기서,

$\dot{\mathbf{x}}(t)$: $n \times 1$ 상태변수의 시간변화율 벡터

$\mathbf{x}(t)$: $n \times 1$ 상태벡터

$\mathbf{u}(t)$: $m \times 1$ 제어벡터

$\mathbf{A}(t)$: $n \times n$ 상태변환행렬

$\mathbf{B}(t)$: $n \times m$ 제어변환행렬

t : 時刻

윗 식을 離散化하면 式(2)와 같으며, 여기서 $\mathbf{y}(k)$ 項은 상태벡터 또는 제어벡터에 포함시킬 수 있으나 본 연구의 편의상 이를 分離하였다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \Psi(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{y}(k) \quad (2)$$

여기서,

$\mathbf{x}(k)$: $n \times 1$ 상태벡터, k 단계에서 저류수준

$\mathbf{u}(k)$: $m \times 1$ 제어벡터, k 단계에서 방류수준
[$n=m$]

$\mathbf{y}(k)$: $n \times 1$ 入力벡터로서 流入量(i), 中間取水(d), 損失(l) 등

$$[\mathbf{y}(k) = \mathbf{i}(k) - \mathbf{d}(k) - \mathbf{l}(k) \dots \dots]$$

$\Phi(k)$: $n \times n$ 상태변환행렬

$\Psi(k)$: $n \times m$ 제어변환행렬

k : 時間軸의 단위수 [0, 1, 2, ..., N]

일반적으로 動的系에서 상태 및 제어벡터 변환행렬은 時間에 따라 변화하지만 저수지 조작 문제에서는 貯水池系의 構成을 나타내므로 操作期間中 貯水池의 追加建設이나 폐쇄가 없다면 時不變(time-invariant)으로 취급할 수 있다.

式(2)는 상태변수의 初期條件이 주어지면 式(3)과 같이 제어벡터와 入力벡터의 線型結合으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}(k) = \Phi^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=1}^k \Phi^{k-j} \Psi \mathbf{u}(j-1) + \sum_{j=1}^k \Phi^{k-j} \mathbf{y}(j-1) \quad (3)$$

특히 상태변환행렬이 單位行列인 경우에 式(3)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{x}(0) + \sum_{j=1}^k \Psi \mathbf{u}(j-1) + \sum_{j=1}^k \mathbf{y}(j-1) \\ &= \sum_{j=1}^k \Psi \mathbf{u}(j-1) + \mathbf{x}_n(k-1) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n(k-1) &= \mathbf{x}(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{y}(j-1) \\ 1 &\leq k \leq N \end{aligned} \quad (5)$$

식(4) 및 (5)는 多段階시스템으로서 任意단계에서의 상태벡터는 초기조건이 주어지면 제어 및 기타 入力벡터의 累加合成으로 결정되며, 시스템의 제어성(controllability)을 보여준다.

2.2 期待자취 및 期待이력 (desired trajectory/history)

저수지 조작의 기본목표는 各 用水需要地點에서 필요한 시기에 필요한 水量을 공급하는데 있다.

선형추적이론은 제어변수의 기대이력 또는 상태변수의 기대 자취를 設定하여 이를 가장 적은 에너지로 추적하도록 설계되므로 기대치를 미리 구해야 한다.

Trott와 Yeh⁽²⁶⁾는 月別로 변동하는 물 수요에 대한 비율을 적용하였다. 이는 不特定用水供給으로서 물 공급의 총량보다는 변동비율을 중시한 것이다.

이와 같은 방법을 확장하여 일반화하면 式(6)과 같다.

가장 일반적인 상태로써 저수지군에 대하여 여러 地點에 여러 형태의 물 需要가 있는 경우로서 最大로 m 종류가 있을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{W}\mathbf{a}(j) \quad (6)$$

여기서,

$\hat{\mathbf{u}}(k)$: $m \times 1$ 벡터, 기대방류량

$\mathbf{a}(j)$: $m \times 1$ 벡터, 월간공급량비

\mathbf{W} : $m \times m$ 대각행렬(diagonal matrix)로서 m 개의 저수지로부터 공급되는 常時供給水量임

式(6)을 擴張하여 기술하면 다음과 같이 分割行列로 표시된다.

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{W}\mathbf{A} \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}} &= [\hat{\mathbf{u}}(1) : \hat{\mathbf{u}}(2) : \dots : \hat{\mathbf{u}}(12) : \hat{\mathbf{u}}(13) : \dots] \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{a}(1) : \mathbf{a}(2) : \dots : \mathbf{a}(12) : \mathbf{a}(13) : \dots] \end{aligned}$$

이상과 같이 구한 기대이력으로써 이에 相應하는 기대자취(desired trajectory)는 式(4)와 같이 다음의 順次方程式으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}(k) = x(0) + \sum_{j=1}^k \Psi \hat{u}(j-1) + \sum_{j=1}^k y(j-1) \quad (8)$$

위의 기대이력 및 기대자취는 선형추적을 위한 基準值(reference)이므로 미리 구해져야 한다. 그런데 이 값은 각 저수지별 常時供給水量으로부터 計算되는데 이 상시공급량이 未知數이다. 그러므로 본 연구에서는 상시공급수량을 任意로 가정하여 이로부터 基準值를 구하고 이에 대한 무제약 추적을 한 後 그 結果로부터 상시공급수량을 다시 얻는 반복법에 의하여 더 이상 상시공급량이 增加하지 않을 때까지 追跡을 되풀이한다.

2.3 常時供給水量(firm water supply)

常時供給水量은 여러가지로 定義될 수 있으나 여기서는 式(9)와 같이 全期間中の 月別供給水量을 조사하여 月別 물 수요비율에 맞는 最大供給量으로 정하였다.

$$w_i = \min_k [u_i(k)/a(j)] \quad (9)$$

여기서,

i : 저수지 번호 [$1 \leq i \leq m$]

k : 時間軸 번호 [$0 \leq k \leq N$]

j : k 의 年中月 指示數 [$1 \leq j \leq 12$]

年單位的 상시공급량을 全期間의 操作實績으로부터 비교 조사하여 最小最大供給量(minimax w_i)을 구하면 이것이 바로 전 기간을 통한 상시공급수량이다.

3. 線型追跡의 離散化

3.1 評價函數(performance measure)

본 연구에서는 저수지 조작특성에 맞추어 제어벡터를 期待值(desired history)에 근접시키도록 하였으며, 아울러 최종단계의 상대벡터를 기대 자취에 접근시키도록 다음과 같이 評價函數를 設定하였다.

$$J = \frac{1}{2} [x(N) - \hat{x}(N)]^T V [x(N) - \hat{x}(N)] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [u(k) - \hat{u}(k)]^T R [u(k) - \hat{u}(k)] \}$$

$$\triangleq \frac{1}{2} \|x(N) - \hat{x}(N)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \|u(k) - \hat{u}(k)\|^2 \quad (10)$$

여기서,

V : $n \times n$ 對稱 加重值 行列, PSD

R : $m \times m$ 對稱 加重值 行列, PD

N : 마지막 操作段階($N > 0$), 陽整數

위 식에서 V 와 R 행렬은 時不變(time-invariant)이다.

3.2 評價函數의 擴張 및 變分

1) Lagrangian

式(2)의 等號制約條件으로서 評價函數 式(10)을 확장하면 다음과 같다.

$$J_{\text{mod.}} \triangleq J - \sum_{k=0}^{N-1} \{ \lambda^T(k+1) [x(k+1) - \Phi x(k) - \Psi u(k) - y(k)] \} \quad (11)$$

여기서,

$J_{\text{mod.}}$: 修正評價函數로서 스칼라임.

λ : n 次元공역상태 벡터(costate vector)로서 未知임.

式(10)을 式(11)에 대입하여 정리하면,

$$J_{\text{mod.}} = \frac{1}{2} \|x(N) - \hat{x}(N)\|^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \|u(k) - \hat{u}(k)\|^2 + \lambda^T(k+1) [\Phi x(k) + \Psi u(k) + y(k) - \lambda^T(k-1)x(k+1)] \right\} \quad (12)$$

部分積分의 離散型 概念을 도입하여 式(12)를 정리하면,

$$J_{\text{mod.}} = \frac{1}{2} \|x(N) - \hat{x}(N)\|^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \|u(k) - \hat{u}(k)\|^2 + \lambda^T(k+1) [\Phi x(k) + \Psi u(k) + y(k) - \lambda^T(k)x(k)] - \lambda^T(N)x(N) - \lambda^T(0)x(0) \right\} \quad (13)$$

따라서 해밀토니안(Hamiltonian)은 다음과 같다.

$$H[x(k), u(k), \lambda(k+1)] = \frac{1}{2} \|u(k) - \hat{u}(k)\|^2 + \lambda^T(k+1) [\Phi x(k) + \Psi u(k) + y(k)] \quad (14)$$

式(13)을 다시 정리하면,

$$J_{\text{mod.}} = \frac{1}{2} \|x(N) - \hat{x}(N)\|^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \{ H[x(k), u(k), \lambda(k+1)] - \lambda^T(k)x(k) - \lambda^T(N)x(N) + \lambda^T(0)x(0) \} \triangleq B[x(N)] + \sum_{k=0}^{N-1} H(x, u, \lambda)$$

$$-\lambda^T(k)\mathbf{x}(k)\} - \lambda^T(N)\mathbf{x}(N) \\ + \lambda^T(0)\mathbf{x}(0) \quad (15)$$

2) 變分解析 (variational calculus)

제어벡터 \mathbf{u} 에 미소변화를 가하여 \mathbf{u}' 라고 하고 이때 修正評價 함수에 대한 더 이상의 改善이 없다면,

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\mathbf{u}(k) - \mathbf{u}'(k)| < \varepsilon$$

$$\mathbf{u}(k) \in U$$

$$\mathbf{u}'(k) \in U$$

여기서 U 는 제어 스페이스에서의 許容 영역 (admissible domain) 이며, 미소변화라고 함은 全 期間에 걸친 全體變化量에 대한 相對的 뜻이며 따라서 짧은 區間에서는 큰 값을 갖을 수 있다. 이러한 새로운 제어변수는 새로운 제어변수의 자취를 만들게 된다.

式(15)에 대한 變分을 $\delta J_{\text{mod.}}$ 라고 하면,

$$\delta J_{\text{mod.}} = \{B[\mathbf{x}(N) + \delta\mathbf{x}(N)] - B[\mathbf{x}(N)]\} \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \{H(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \mathbf{u}', \lambda) - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \\ - \lambda^T(k)\delta\mathbf{x}(k)\} - \lambda^T(N)\delta\mathbf{x}(N) \quad (16)$$

여기서 初期條件 $\lambda^T(0)\mathbf{x}(0)$ 는 $\mathbf{u}'(k)$ 의 영향을 받지 않는다.

Taylor 급수전개로 式(16)의 첫째 괄호항을 정리하면,

$$B[\mathbf{x}(N) + \delta\mathbf{x}(N)] - B[\mathbf{x}(N)] \\ \approx \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} B(\mathbf{x}(N)) \right]^T \delta\mathbf{x}(N) + 0(\varepsilon) \quad (17)$$

그리고 두 번째의 積算項은,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \{ [H(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \mathbf{u}', \lambda) - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda)] \\ - \lambda^T(k)\delta\mathbf{x}(k) \} \\ \approx \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}', \lambda) \delta\mathbf{x} + H(\mathbf{x}, \mathbf{u}', \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \right] - \lambda^T(k)\delta\mathbf{x}(k) \right\} + 0(\varepsilon) \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \right]^T \delta\mathbf{x} + \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}', \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \right]^T \delta\mathbf{x} + \left[H(\mathbf{x}, \mathbf{u}', \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \right] - \lambda^T(k)\delta\mathbf{x}(k) \right\} \\ \approx \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \right]^T \delta\mathbf{x} + \left[H(\mathbf{x}, \mathbf{u}', \lambda) \right. \right. \\ \left. \left. - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \right] - \lambda^T(k)\delta\mathbf{x}(k) \right\} + 0(\varepsilon) \quad (18)$$

式(17), (18)을 式(16)에 대입하여 정리하면,

$$\delta J_{\text{mod.}} = \left[\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} B(\mathbf{x}(N)) \right]^T - \lambda^T(N) \right] \delta\mathbf{x}(N) \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) \right]^T - \lambda^T(k) \right\} \delta\mathbf{x}(k) \\ + \sum_{k=0}^{N-1} [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}', \lambda) - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda)] \\ + 0(\varepsilon) = 0 \quad (19)$$

여기서 첫째항은 切斷條件 (transversality condition) 으로서 다음과 같으며, 둘째항으로부터 Euler-Lagrange 방정식이 유도된다.

$$\left[\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} B(\mathbf{x}(N)) \right]^T - \lambda^T(N) \right] \delta\mathbf{x}(N) \\ = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(N) - \hat{\mathbf{x}}(N)\|^2 \right]^T \delta\mathbf{x}(N) \\ - \lambda^T(N)\delta\mathbf{x}(N) = 0 \quad (20)$$

3.3 최적제어 법칙

1) 최적화 필요조건

공역상태방정식 (costate equation) 은 式(14) 및 (19)에서

$$\lambda^*(k) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \\ = \phi^T \lambda^*(k+1) \quad (21)$$

이 식은 Euler-Lagrange 方程式의 離散型으로서 경계조건 $\lambda(N)$ 이 주어지면 逆次로 해를 구할 수 있다.

상태변수의 初期條件 即 $\mathbf{x}(0)$ 가 주어지고, 式(20)에서 N 값이 固定되고 端末狀態를 구속하지 않는다면 $\delta\mathbf{x}(N) \approx \theta$ 이므로 경계조건은 다음과 같이 구한다.

$$\lambda^*(N) = V\mathbf{x}^*(N) - V\hat{\mathbf{x}}(N) \quad (22)$$

제어변수를 無制約으로 假定하면 最適律은 式(23)과 같으며, 이하에서 添字 *는 最適值를 나타낸다.

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = R\mathbf{u}^*(k) - R\hat{\mathbf{u}}(k) + \psi^T \lambda^*(k+1) = \theta \quad (23)$$

여기서 θ 는 零벡터 (null vector) 임.

따라서,

$$\mathbf{u}^*(k) = -R^{-1}\psi^T \lambda^*(k+1) + \hat{\mathbf{u}}(k) \quad (24)$$

여기서 가중행렬 R 은 陽定置 (positive definite) 이므로 그 逆行列의 존재가 보장된다.

2) 最適化 方程式의 解

式(21)과 式(24)는 最適化의 필요조건으로서

前者는 逆次로 後者는 順次로 해를 구해야 하는 2點境界值 問題(two-point boundary value problem)로서 경계조건이 初期와 終期로 分離되어 해를 구하는데 어려움을 준다.

式(2)에 式(24)를 대입하면,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \Phi \mathbf{x}^*(k) - \Psi R^{-1} \Psi^T \lambda^*(k+1) \\ &+ \Psi \hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{y}(k) \end{aligned} \quad (25)$$

式(21)과 (25)는 다음의 分割行列로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(k+1) \\ \lambda^*(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi & -\Psi R^{-1} \Psi^T \\ \theta & \Phi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(k) \\ \lambda^*(k+1) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) + \Psi \mathbf{u}(k) \\ \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

윗 식은 1階, 線型, 時不變 差分方程式으로서 非齊次이다. 일반적으로 변환행렬 및 加중행렬이 時不變(time-invariant)인 경우에는 Laplace 變換으로 회선정리(convolution theorem)에 의하여 해를 구하는데, 여기서는 Kalman⁽¹⁰⁾이 時間領域에 대하여 제시한 Riccati 型의 해를 유도하였다.

式(26)의 解를 다음의 식(27)과 같이 가정하며, 이하에서 混同의 우려가 없는 한 편의상 최적치 표시 점차 *를 생략한다.

$$\lambda(k) = P(k) + \mathbf{s}(k) \quad (27)$$

여기서, $P(k) : n \times n$ 대칭행렬로서 未知임.

$\mathbf{s}(k) : n \times 1$ 未知 벡터임.

한 단계를 進行하면 式(27)은,

$$\lambda(k+1) = P(k+1) \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{s}(k+1) \quad (28)$$

式(28)을 式(25)에 치환하고, 다음의 역행렬이 존재한다는 가정으로 이를 정리하면,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= [I + \Psi R^{-1} \Psi^T P(k+1)]^{-1} \Phi \mathbf{x}(k) \\ &- [I + \Psi R^{-1} \Psi^T P(k+1)]^{-1} \Psi R^{-1} \Psi^T \mathbf{s}(k+1) \\ &+ [I + \Psi R^{-1} \Psi^T P(k+1)]^{-1} [\Psi \hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{y}(k)] \end{aligned} \quad (29)$$

여기서, I : 單位行列

式(27), (28)의 右邊을 式(21)에 代入하면,

$$\begin{aligned} P(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{s}(k) &= \Phi^T P(k+1) \mathbf{x}(k+1) \\ &+ \Phi^T \mathbf{s}(k+1) \end{aligned} \quad (30)$$

式(29)의 右邊을 式(30)에 치환하면,

$$\begin{aligned} P(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{s}(k) &= \Phi^T P(k+1) \\ &[I + \Psi R^{-1} \Psi^T P(k+1)]^{-1} \Phi \mathbf{x}(k) \\ &- \Phi^T P(k+1) \\ &[I + \Psi R^{-1} \Psi^T P(k+1)]^{-1} \Psi R^{-1} \Psi^T \mathbf{s}(k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \Phi^T P(k+1) \\ &[I + \Psi R^{-1} \Psi^T P(k+1)]^{-1} [\Psi \hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{y}(k)] \\ &+ \Phi^T \mathbf{s}(k+1) \end{aligned} \quad (31)$$

式(31)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &[P(k) - \Phi^T [P^{-1}(k+1) + \Psi R^{-1} \Psi^T]^{-1} \Phi] \mathbf{x}(k) \\ &+ [\mathbf{s}(k) + \Phi^T [P^{-1}(k+1) \\ &+ \Psi R^{-1} \Psi^T]^{-1} \Psi R^{-1} \Psi^T - I] \mathbf{s}(k+1) \\ &- \Phi^T [P^{-1}(k+1) + \Psi R^{-1} \Psi^T]^{-1} \\ &[\Psi \hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{y}(k)] = \theta \end{aligned} \quad (32)$$

임의의 $\mathbf{x}(k)$ 에 관하여 式(32)가 成立될 필요충분조건은,

$$P(k) = \Phi^T [P^{-1}(k+1) + \Psi R^{-1} \Psi^T]^{-1} \Phi \quad (33)$$

및

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(k) &= -\Phi^T \{ [P^{-1}(k+1) + \Psi R^{-1} \Psi^T]^{-1} \\ &\Psi R^{-1} \Psi^T - I \} \mathbf{s}(k+1) + \Phi^T [P^{-1}(k+1) + \Psi \\ &R^{-1} \Psi^T]^{-1} [\Psi \mathbf{u}(k) + \mathbf{y}(k)] \end{aligned} \quad (34)$$

式(33), (34)는 Riccati 방정식으로서 逆次로 해를 구할 수 있으며 이때 경계조건은 式(22), (28)에서,

$$\begin{aligned} \lambda(N) &= P(N) \mathbf{x}(N) + \mathbf{s}(N) \\ &= V \mathbf{x}(N) - V \hat{\mathbf{x}}(N) \end{aligned} \quad (35)$$

式(35)에서 $\mathbf{x}(k)$ 와 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 는 外的(explicitly)으로 상호독립적이므로 이 식이 성립될 필요충분조건은,

$$\left. \begin{aligned} P(N) &= V \\ \text{및} \\ \mathbf{s}(N) &= -V \mathbf{x}(N) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式(30)을 정리하면,

$$\begin{aligned} P(k+1) \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{s}(k+1) \\ = \Phi^{-T} P(k) \mathbf{x}(k) + \Phi^{-T} \mathbf{s}(k) \end{aligned} \quad (37)$$

윗 식에서 Φ^{-T} 는 Φ 行列을 轉置하여 그 逆行列을 구한 결과를 뜻한다. 式(37)을 式(28)에 대입하면,

$$\lambda(k+1) = \Phi^{-T} P(k) \mathbf{x}(k) + \Phi^{-T} \mathbf{s}(k) \quad (38)$$

式(24)의 $\lambda(k+1)$ 을 式(38)로 치환하면 다음의 最適律(optimal control law)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(k) &= -R^{-1} \Psi^T \Phi^{-T} P(k) \mathbf{x}^*(k) - R^{-1} \\ &\Psi^T \Phi^{-T} \mathbf{s}(k) + \hat{\mathbf{u}}(k) \\ &\triangleq F(k) \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{g}(k) + \hat{\mathbf{u}}(k) \end{aligned} \quad (39)$$

여기서,

$$F(k) = -R^{-1} \Psi^T \Phi^{-T} P(k) \quad (40)$$

$$\mathbf{g}(k) = -R^{-1} \Psi^T \Phi^{-T} \mathbf{s}(k) \quad (41)$$

3) 最適律의 檢討

① 식(40)에서 $F(k)$ 는 時變의 feedback gain matrix 이며, 식(41)의 $g(k)$ 는 指示信號(command signal)로서 시스템의 매개변수, 특히 기대이력 $u(k)$ 와 입력벡터 $y(k)$ 에 지배되며 제어를 위한 정보를 제공하게 된다.

② 특히 $g(k)$ 가 未來의 基準信號(reference signal)에 지배받는다라는 사실은 체적제어물의 豫測機能을 나타내 준다.

③ 詩價函數의 加重行列인 R 과 V 는 最小化問題에서 陽의 2階變分 $[\partial^2 J > 0]$ 을 보장하기 위해 PSD 이어야 한다.

4. 追加의 必要條件

制約條件下에서의 최적제어문제는 Pontryagin의 最小원리^(9,21)에 의하여 해결을 할 수 있다. 그러나 離散型問題 및 상태변수 제약조건은 앞에 기술한 바와 같이 變分法뿐만 아니라 最小原理 자체도 인격히 적용되지 않는다^(16,21).

상태제약을 포함한 보다 일반적인 離散型問題에 대한 必要條件에 대한 연구⁽⁶⁾가 시도되었으나, 計算要求가 너무나 방대하여 實時間運營에는 어려움이 있다.

본 연구에서는 앞에서 유도된 追跡律을 기본으로 하여 離散化的 時間軸과 변동량이 매우 작고 시스템이 安定(stable)하다는 가정하에 Pontryagin의 最小原理를 따르도록 feedback/feedforward 補整式을 유도하였다.

제어변수가 제약조건에 지배를 받을 경우, 最小원리는 다음과 같다.

$$x^*(k+1) = \Phi x^*(k) + \Psi u^*(k) + y(k)$$

$$\lambda^*(k) = \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$= \Phi^T \lambda^*(k+1)$$

$$H[x^*(k), u^*(k), \lambda^*(k+1)] \leq$$

$$H[x^*(k), u(k), \lambda^*(k+1)], \forall u \in U \quad (42)$$

이상을 요약하면 폰트리아진의 最小원리는 비포화영역에서는 最適律을 따르고 포화시에는 제약경계를 따른다.

① 비 포화 제어벡터 :

$$u^*(k) = -R^{-1} \Psi^T \lambda^*(k+1) + \hat{u}(k)$$

② 포화 제어벡터 :

$$u^*(k) = \begin{cases} u(k)_{\min}, & \text{for } u^*(k) < u(k)_{\min} \\ u(k)_{\max}, & \text{for } u^*(k) > u(k)_{\max} \end{cases}$$

4.1 Pontryagin의 最小原理

폰트리아진의 最小原理는 비선형제어의 Kuhn-Tucker 조건이나 Rosen의 傾斜 投影法⁽²⁴⁾과 같이 最適解는 $q \leq n$ 次元의 경계면을 따라 경사벡터와 제약 벡터의 orthogonality에서 구하게 된다. 특히 폰트리아진의 最小원리에서 제약벡터가 작용할 때 공역상태벡터(costate vector/adjoint vector)의 거동에 유의해야 한다.

無制約條件에서의 最適值 u^* 와 制約條件에 의한 u 에 의한 評價函數의 增分은 最小化問題에서는 식(43)과 같으며, 이때 增分 ΔJ 와 變分 δJ 의 差는 식(44)와 같이 高次項으로서 δJ 가 δu 에 線型이고 δu 의 norm이 零에 접근할 때는 이 고차항도 零에 수렴한다는 조건하에 이하에서는 變分을 增分으로 代置한다.

$$\Delta J = J(u) - J(u^*) \geq 0 \quad (43)$$

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \delta J(u^*, \delta u) + \text{H.O.T.} \quad (44)$$

4.2 飽和值 補整

제어 및 상태벡터의 거동은 선형추적에서 그림 1과 같이 된다.

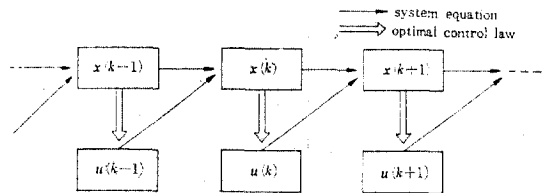


그림 1. Staged optimal control of the dynamic system

따라서 제어변수에 제약이 작용할 경우에는 feedforward 보정만 요구되지만 상태변수에 대한 제약이 발생할 경우에는 feedforward와 더불어 시스템 방정식을 만족시키기 위하여 feedback 보정도 해야 한다.

1) 제어변수 제약

상태변수는 제약조건을 만족하고, 다만 제어변수만이 포화될 경우에는 feedforward만 요구된다. feedforward는 2 단계로 수행된다.

(1) 제어벡터의 경계이동 $[k$ 단계]

$$u'(k) = u^*(k) - \Delta u(k) \quad (45)$$

(2) 제 1 단계 수정 [(k+1) 단계]

제어벡터의 변동 $\Delta u(k)$ 는 다음 단계의 상태벡터에 식(2)에 의하여 다음의 영향을 전파한다.

$$\Delta x(k+1) = \Psi \Delta u(k) \quad (46)$$

그런데 공액 상태방정식(28)를 만족하려면 $s^*(k+1)$ 은 식(47)과 같이 보정되어야 한다.

$$s'(k+1) = s^*(k+1) - \Delta s(k+1) \\ \Delta s(k+1) = -P^*(k+1) \Delta x(k+1) \quad (47)$$

이에 따른 指示信號 벡터의 조정은 식(41)에 의하여

$$g'(k+1) = g^*(k+1) - \Delta g(k+1) \\ \Delta g(k+1) = -R^{-1} \Psi^T \Phi^{-T} \Delta s(k+1) \quad (48)$$

(3) 제 2 단계 수정 [(k+2)단계]

시간축 (k+2) 이후의 단계에서는 s 및 g에 따라서 2가지의 보정을 실시하여야 한다. 우선, Riccati 方程式(34)를 만족하기 위하여 식(47)의 섭동은 다음의 영향을 준다.

$$\Delta s'(k+2) = -FFC(k+2) \Delta s(k+1) \\ FFC(k+2) \\ \triangleq [\Phi^T \{ [P^{-1}(k+2) + \Psi R^{-1} \Psi^T]^{-1} \\ \Psi R^{-1} \Psi^T - I \}]^{-1} \quad (49)$$

한편 식(46)의 $\Delta x(k+1)$ 은 식(39)에 의거 $\Delta u(k+1)$ 로 전파되고 이는 다시 식(2), (27)에 따라 $\Delta s''(k+2)$ 를 유발한다.

$$\Delta x(k+2) = \Phi \Delta x(k+1) + \Psi \Delta u(k+1) \\ = [\Phi + \Psi F(k+1)] \Delta x(k+1) \\ \Delta s''(k+2) = -P(k+2) \Delta x(k+2) \quad (50)$$

따라서 식(49), (50)에 의한 보정은

$$s'(k+2) = s^*(k+2) - [\Delta s'(k+2) \\ + \Delta s''(k+2)] \\ g'(k+2) = g^*(k+2) - \Delta g(k+2) \\ \Delta g(k+2) = -R^{-1} \Psi^T \Phi^{-T} [\Delta s'(k+2) \\ + \Delta s''(k+2)] \quad (51)$$

2) 상태/제어 변수 제약

상태 벡터에 제약이 발생될 경우에는 제어 변수의 경우와는 달리 feedback 및 feedforward가 요구된다.

(1) 상태변수의 경계이동 및 feedback [k 단계]

$$x'(k) = x^*(k) - \Delta x(k) \quad (52)$$

시스템 방정식(2)와 제어롤(39)에 따라서 식(53)과 같이 조정한다.

$$\Delta x(k-1) = [\Phi + \Psi F(k-1)]^{-1} \Delta x(k)$$

$$\Delta u(k-1) = F(k-1) \Delta x(k-1) \quad (53)$$

이론적으로 보면 식(53)과 같은 feedback은 결국 초기조건 $x(0)$ 에까지 파급된다고 할 수 있으나 변동량 $\Delta x(k)$ 는 최적제어롤 식(39)에 따라 매 단계마다 제어 벡터의 변동으로 분산되므로 미리 정해진 허용기준에 의거 feedback은 소멸될 경우도 있다.

(2) 제 1 단계 수정 [k 단계]

상태벡터의 변동 $\Delta x(k)$ 는 식(27)을 만족하기 위하여 $s(k)$ 에 전파되고 이는 다시 식(34)에 따라 $s(k+1)$ 에 파급된다.

$$s'(k) = s^*(k) - \Delta s(k) \\ \Delta s(k) = -P(k) \Delta x(k) \\ g'(k) = g^*(k) - \Delta g(k) \\ \Delta g(k) = -R^{-1} \Psi^T \Phi^{-T} \Delta s(k) \quad (54)$$

(3) 제 2 단계 수정 [(k+1)단계]

이하의 수정은 앞 절(4.2.1)의 제 1,2 단계의 반복이다. 여기서 feedforward는 feedback의 경우와는 달리 最終段階까지 전파되며 또한 累加的으로 발생된다. 이의 개요를 도시하면 그림 2와 같다.

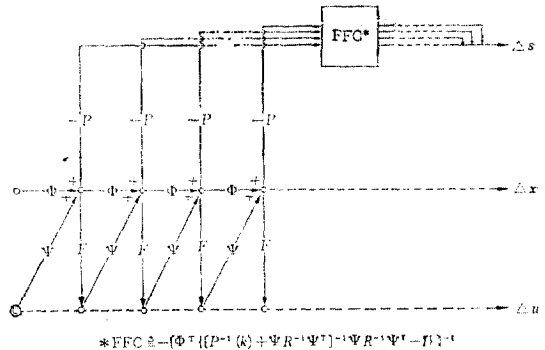


그림 2. Accumulative propagation of the s vector change subject to a control disturbance

5. 計算例

5.1 프로그래밍 및 적용례

본 연구의 계산을 위한 電算프로그램은 본 프로그램과 16種의 副프로그램으로 구성되어 있다. 본 프로그램은 事前計算을 위한 5種의 예비 프로그램과 主프로그램으로 되어 있다.

本 연구에서 개발된 알고리즘을 漢江流域에 적

용하여 그 유용성을 검토하였다.

한강 유역에는 현재 7개 댐이 있으나 규모가 매우 작은 괴산댐을 제외한 6개 저수지에 대하여 1917~1940 자료중 流量의 時系列組合이 가장 不利한 기간인 1919.1~1921.12 까지 3년간의 實時間 操作을 月單位로 수행하였다.

여기에 사용된 모든 入力資料는 주로 漢江流域 調查報告書 및 同附錄에 의하였으며 不足 자료는 推定하여 사용했으나 가급적 실제에 가깝도록 추정함으로써 실시간 조작에 의한 성과를 얻을 수 있도록 노력하였다. 주요 入力資料는 表 1, 2 에 수록하였으며, 유량의 단위는 MCM

($10^6 m^3$)이다.

5.2 計算結果

(1) 漢江流域의 實資料로서 操作을 한 결과는 表 3 과 같다. 여기서 첫번째 같은 追跡을 始作하기 위하여 임의로 주어진 것이며 無制約條件으로 추적을 반복한 결과 2회 반복으로 최대값을 얻었으며, 이들 基準으로 하여 制約條件에 따른 feedback/feedforwad 보정을 하여 추적한 결과 최적치를 구하였다.

(2) 이때 昭陽 및 八堂湖의 상태벡터의 자취와 제어벡터의 이력은 그림 3, 4 와 같다.

表 1. Reservoir characteristics

Item	Hwachon	Soyang	Chunchon	Uiam	Chonpyong	Paldang
CA(SQ, KM)	3,901	2,703	4,736	7,770	10,140	23,800
x_{min} (MCM)	360.4	1,000.0	89.0	41.0	102.9	226.0
x_{max} (MCM)	1,018.4	2,400.0 2,569.0*	150.0	80.0	185.5	244.0
u_{min} (MCM/M)	80.0	80.0	90.0	110.0	130.0	260.0
u_{max} (MCM/M)	7,000.0	7,000.0	16,000.0	20,700.0	26,900.0	25,900.0

*Maximum storage from Jun. through Sept.

表 2. Water demand ratio by month, $\alpha(j)$

Month	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May	Jun.
Ratio	0.066	0.066	0.066	0.089	0.113	0.105
Month	Jul.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Ratio	0.105	0.105	0.082	0.071	0.066	0.066

表 3. The convergence to the optimal firm water supply in MCM/y : $R=10.0$ GMT

itr.	Hwachon	Soyang	Chunchon	Uiam	Chongpyong	Paldang
0	1,000.00	1,000.00	1,000.00	2,000.00	2,500.00	3,000.00
1	1,372.95	1,051.36	1,265.69	1,683.96	2,615.18	7,966.54
2	1,556.26	1,130.50	1,581.67	2,401.35	3,456.47	10,374.64
3*	1,415.51	1,009.44	1,573.02	2,279.02	2,760.22	9,372.62

*the optimal

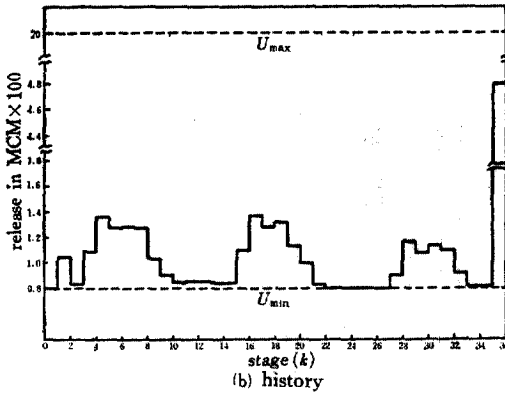
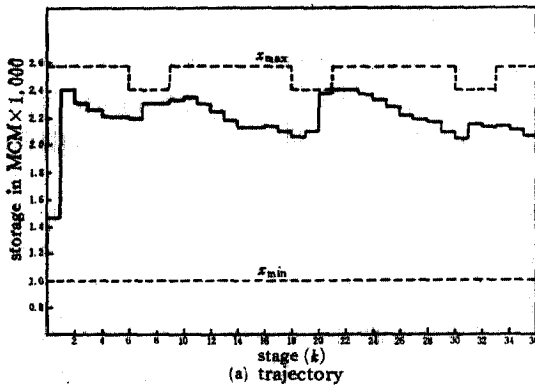


그림 3. The optimal trajectory/history of the reservoir Soyang

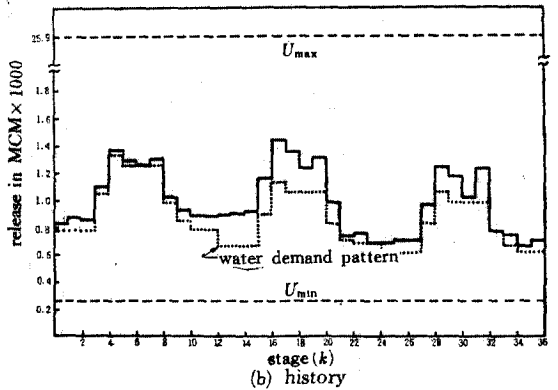
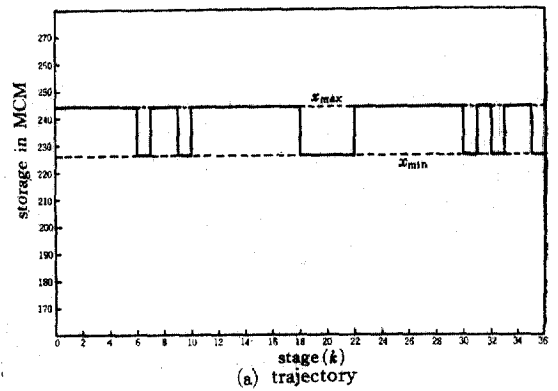


그림 4. The optimal trajectory/history of the reservoir Paldang

6. 檢討 및 考察

(1) 本 研究에서는 最適化의 必要條件만을 제시하였다. 그러나 評價函數를 2次式으로 設計 하였으므로, 加重行列 R 및 V 가 對稱이고 또한 PSD 이면 평가함수의 2階變分이 陽 [$\delta^2 J > 0$]이 므로 함수의 convexity가 보장된다.

특히 식(14)에서 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = R$ 이므로 R 은 PSD이 어야 하는데 식(24)의 최적률이 성립하려면 특히 PD 이어야 그 逆行列이 존재한다.

(2) 本 研究에서는 시간축의 離散化幅이 매우 작고, 상태 및 제어 변수의 변동량이 매우 적다 고 가정하였다. 따라서 여기서 개발된 프로그램 은 離散化 시스템에 대하여 일반적으로 적용된 다고 할 수 없다. 왜냐하면 매우 적은 섭동일지 라도 시간폭이 크면 $t \rightarrow \infty$ 에서 발산될 수 있기

때문이다⁽¹⁸⁾.

(3) 評價函數를 設計할 때 상태벡터의 端末상 태는 저수지시스템의 포텐셜 評價에 적합하도록 상태벡터의 初期條件과 같은 값을 적용하였다.

따라서 그림 3에서 보는 바와 같이 端末상태 를 초기상태에 근접시키기 위하여 $k=36$ 에서 의 방류량이 대폭 증가되었다. 그러나 操作期間을 더 연장하든가 또는 端末의 구속조건을 완화하면 이 방류량은 감소하고 저류량이 증가될 것이다.

(4) 八堂댐은 run-off 형의 소규모인데 上流로 부터의 流入量은 많으므로 그림 4-a에서 볼 수 있는 바와 같이 全 操作期間을 통하여 상태변수 의 最大 또는 最小계약의 경계면을 따르는 점을 알 수 있다.

이는 全 流域을 일관하는 最適管理體制에서 팔당댐의 상태변수가 Bang-Bang 형이므로 이러 한 模型으로 設計可能함을 암시해 준다.

7. 결 론

제약제수지계의 최적 운영을 위하여 2次式의 評價函數와 선형제약 조건으로서 선형 추적이론 (linear tracking)을 離散化하여 Kalman의 Riccati 형의 解로써 최적 운영물을 유도하였다. 상태 및 제어벡터의 제약은 시행착오에 의하지 않고 직접해에 의하여 공액상태 벡터의 거동을 조사하여 상태 및 제어 변수를 보정하였다.

한강 유역의 6개 저수지에 36개월간 자료로서 조작한 결과 表3의 성과를 얻었으며, 이 성과를 직접 비교할 수 있는 대안에 의한 결과는 없으나 條件이 다소 相異한 기존 연구결과^(29,30)와 比較할 때 매우 만족스런 結果라고 판단된다.

이 알고리즘은 제약조건이 크게 작용되는 소규모 댐이나 또는 시간축의 幅이 긴 季節 또는 年單位 操作的 경우에는 權장되지 않는다.

參 考 文 獻

1. Becker, L., and Yeh, W. W.-G., "Optimization of Real Time Operation of Multiple Reservoir Systems", *Water Resources Research*, Vol. 10, No. 6, Dec. 1974, pp. 1107~1112.
2. Fleming, G., *Computer Simulation Techniques in Hydrology*, American Elsevier Publishing Co., Inc., N.Y., 1975.
3. Goldfarb, D., "Extension of Davidon's Variable Metric Method to Maximization under Linear Inequality Constraints", *J. of SIAM*, Vol. 17, No. 4, Jul. 1969, pp. 739~764.
4. Hall, W.A., and Sheshard, R.W., "Optimum Operation for Planning of a Complex Water Resources System", Technical Report 122(UCLA-ENG-6754), Water Resources Center, School of Engineering and Applied Science, Univ. of Calif., Los Angeles, Calif., Oct. 1967.
5. Hautus, M.L.J., "Necessary Condition for Multiple Constraint Optimization Problem", *SIAM J. Control*, Vol. 11, No. 4, Nov., 1973, pp. 653~669.
6. Heidari, M., Chow, V.T., Kokotovic, P.V., and Meredith, D.D., "Discrete Differential Dynamic Programming Approach to Water Resources Systems Optimization", *Water Resources Research*, Vol. 7, No. 2, Apr. 1971, pp. 273~282.
7. Holtzman, J.M., "Convexity and the Maximum Principle of Discrete Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-11, Jan. 1966.
8. Hufschmidt, M.M., and Fiering, M.F., *Simulation Techniques for Design of Water Resource Systems*, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1966.
9. Jordan, B.W., and Polak, E., "Theory of a Class of Discrete Optimal Control Systems", 1964, pp. 697~711.
10. Kalman, R.E., "The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations", *Mathematical Optimization Techniques*, R.E. Bellman, ed., Santa Monica, The Rand Corporation, 1963.
11. Lee, E.S., and Waziruddin, S., "Applying Gradient Projection and Conjugate Gradient to the Optimum Operation of Reservoirs", *Water Resources Bulletin*, Vol. 6, No. 5, Sept.-Oct. 1970, pp. 713~724.
12. Lotkin, M., and Remage, R., "Scaling and Error Analysis of Matrix Inversion by Partitioning", *Ann. Math. Statistics*, 24, 1953, pp. 428~439.
13. Loucks, D.P., "Management Models for Water Resources Systems", *Technical Report No. 1*, Water Resources Center, Cornell Univ., Ithaca, N.Y., Jun. 1967.
14. Loucks, D.P., "Computer Models for Reservoir Regulation", *J. of the Sanitary Engineering Division, ASCE*, Vol. 94, No. SA4, Proc. Paper 6075, Aug. 1968, pp. 657~669.
15. Loucks, D.P., et als., *Water Resource Systems Planning and Analysis*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1981.
16. Luenberger, D.G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1969.
17. Maass, A., Hufschmidt, M., Dorfman, R., Thomas, H., Jr., Marglin, S., and Fair, G.M., ed., *Design of Water-Resource Systems*, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1962.

18. Mak, P., *Linear System Control, Lecture Note*, UCLA, Stability pp.11~12, 1982.
19. Murray, D.M., and Yakowitz, S.J., "Constrained Differential Dynamic Programming and Its Application to Multireservoir Control", *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 5, Oct. 1979, pp.1017~1027.
20. Nopmongkol, P., and Askew, A.J., "Multilevel Incremental Dynamic Programming", *Water Resources Research*, Vol. 12, No. 6, Dec. 1976, pp.1291~1297.
21. Ortega, J.A., and Leake, R.J., "Discrete Maximum Principle with State Constrained Control", *SIAM J. Control & Optimization*, Vol. 15, No. 6, Nov. 1977, pp.984~990.
22. ReVelle, C.E., and Kirby, W., "The Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design, Part 1, Development of the Stochastic Model", *Water Resources Research*, Vol. 5, No. 4, Aug. 1969, pp.767~777.
23. ReVelle, et al., "Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design, Part 2, Performance Optimization", *Water Resources Research*, Vol. 6, No. 4, Aug. 1970, pp.1033~1044.
24. Rosen, J.B., "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming Part I. Linear Constraints", *J. of SIAM*, Mar. 1960, pp.181~217.
25. Turgeon, A., "Optimal Short-term Scheduling of Hydroplants in Series—a Review", *Proceedings, International Symposium on Real-Time Operation of Hydrosystems*, Univ. of Waterloo, Ontario, Canada, Jun. 1981, pp.108~122.
26. Trott, W.J., and Yeh, W. W.-G., "Multi-level Optimization of a Reservoir System", ASCE Annual Meeting, 1971.
27. Yeh, W. W.-G., "State of the Art Review: Theories and Applications of the Systems Analysis Technics to the Optimal Management and Operation of a Reservoir System," UCLA-ENG-82-52, UCLA School of Engineering and Applied Science, Jun. 1982.
28. Yeh, W. W.-G., Becker, L., and Chu, W.S., "Real-Time Hourly Reservoir Operation", *J. of the Water Resources Planning and Management Div., ASCE*, Vol. 105, No. WR2, Proc. Paper 14813, Sept. 1979, pp.187~203.
29. 權五憲, 貯水池群의 多段階最適立案에 관한 研究, 建國大學校 大學院 碩士學位論文, 1972. 2.
30. 權五憲, 成世鎮, 北漢江流域群의 最適運營을 위한 시스템 모델의 開發, *大韓土木學會誌*, 제 28 권 제 4 호. 1980. 8, pp.95~104.
31. 徐南洙, 尹龍男, "單一多目的의 最適運營方案을 위한 시스템 模擬技法의 應用", *大韓土木學會誌*, 제 26 권 제 3 호. 1978. 8, pp.99~106.
32. 梁興錫, 朴永文, "漢江系 水力の 效果的 多目的運營에 관한 研究", "韓電/서울大學校 應用科學研究所, 1975.
33. 李在炯, 貯水池群의 最適運營計劃에 관한 方法論, 서울大學校 大學院 博士學位論文, 1983. 2.

(接受: 1985. 2. 23)