彈性地盤上의 平板解析에 있어서 影響領域의 配分

Distribution of Influence Area in the Analysis of Plates on Elastic Foundations

金 聲 得*
Kim, Sung Deuk
申 永 琦**
Shin, Yung Kee

Absract

In this paper, the analysis of plates resting on Winkler's springs and on an isotropic elastic half space is made by the finite element method using an isoparametric element.

A new technique is introduced to calculate the numerical values of influence area for the soil element. A computer program NMAT has been developed and checked through demonstrating examples.

要 旨

Winkler 地盤과 等方性 半無限 彈性體 위에 놓인 平板을 Isoparametric 要素를 使用한 有限要素法으로 解析하였다.

地盤要素의 影響領域을 數値的으로 計算하는 새로운 技法을 導入하였고, 컴퓨터프로그램 NMAT를 開發하였으며 이 프로그램은 많은 例題를 통해 檢討되었다.

1. 序 論

많은 구조물이 地盤위에 축조된 基礎 위에 만들어지고 있는데, 이에 대한 解析은 계산의 편의상 지반 및 기초와 상부구조를 분리해서 행해져 왔다. 그러나 상부구조가 外的으로 不靜定일 때는 外力이 작용하면 그 구조물내의 應力은 지반의 變形의 영향을 받으며, 기초의 應力分布는 구조물과 기초의 相對剛度(relative stiffness)의 영향을 받기 때문에 地盤—基礎—構造 사이의 相互影響(interaction)을 고려한 一體的인 해석방법이 요구된다. 이를 위해서는 지반상의 구조물에 대한 효과적인 모델化가 필요하게 되는데 이에 관한 연구가 이미 많이 수행되어 왔다[1,2,3].

굴뚝, 탑, 사일로우, 원자력발전소, 건축물 등이 彈性地盤上의 매트基礎 위에 축조되고 있는데, 이 매트기초는 그림 1에서 보는 바와 같이 여러 개의 要素로 된 平板과 그것을 받치고 있는 지반으로 나누어서 생각할 수 있다. 잘 알려져 있는 平板理論과 地盤모델을 기초로 하여서 양자의 상호영향을 고려한 문제를 다루기로 한다.

*正會員・서울大學校 大學院 博士課程, 蔚山大學校 副敎授
**參與會員・서울大學校 工科大學 敎授

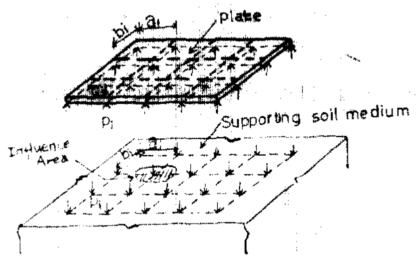

그림 1. Finite element analysis model of a plate resting on an elastic soil medium

지반의 모델화에 대해서 여러가지 측면에서 조사한 바 Winkler지반과 Boussinesq 지반으로 大別할 수 있는 바, 지반을 단순한 수식으로 표현하는 前者가 일반적으로 널리 이용되고 있으나 地盤反力係數의 크기를 정확하게 나타내기 어렵고 특히 剛性이 매우 큰 지반에 대해서는 그 거동의 표현에 難點이 있는 실정이며, 지반의 非線型거동을 무시했을 때 後者로 대표되는 半無限彈性體(half-space)지반이 적절하며 이러한 모델에 대해서 有限要素法에 의한 數値解析을 다루기로 한다.

이제 Cheung 및 Zienkiewicz가 發表한 「有限要素法에 依한 彈性地盤上의 平板 및 탱크」의 연구[4]를 기초로 하여 要素의 각 변이 직선 뿐만 아니라 2차 및 3차 곡선으로 될 수 있어서 어떤 형태의 경계에서도 기하학적으로 잘 근사시킬 수 있고 形狀函數를 직관적으로 구할 수 있는 8節點의 Isoparametric 要素를[5] 사용하여 탄성지반상의 平板을 解析하고자 한다.

그리고 본인이 이미 發表한 프로그램 MATK를[6] 기초로 하여서 基礎低板 아래의 절점당 영향을 미치는 지반요소의 領域을 수치적으로 구하고 또 소개된 影響係數를 중심으로 여러 가지 비교분석을 할 수 있는 補完된 프로그램 NMAT를 소개하며, 이 프로그램을 통해 많은 例題를 해석해보며 나아가서는 Winkler 지반과 Boussinesq 지반의 관계식을 導出코자 한다.

2. 基本理論

2.1 平板理論

그림 2와 같은 8절점의 Isoparametric 要素

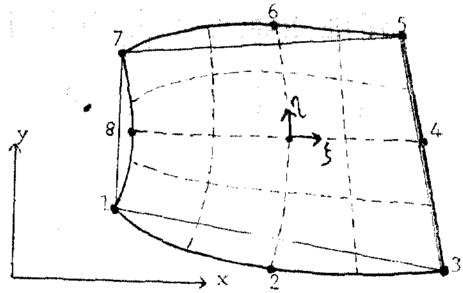

그림 2. Isoparametric element-8 node

를 사용한 平板理論[7]을 略述하고자 한다.

요소내의 임의 점에서의 변위는 절점에서의 변위와 형상함수로 나타낸다.

$$\left.\begin{aligned}
N_i(\xi,\eta)&=\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1)\\
N_i(\xi,\eta)&=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0),\quad (i=2,6)\\
N_i(\xi,\eta)&=\frac{1}{2}(1+\xi_0)(1-\eta^2),\quad (i=4,8)\\
\text{단, }\ &\xi_0=\xi\xi_i,\ \ \eta_0=\eta\eta_i
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\{\delta\}=\begin{bmatrix}\omega\\ \theta_x\\ \theta_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum N_i\,\omega_i\\ \sum N_i\,\theta_{xi}\\ \sum N_i\,\theta_{yi}\end{bmatrix}=\sum[N_i]\{\delta_i\}=[N]\{\delta_e\}\\
&\text{단, }[N]=[N_1, N_2, \cdots, N_8]\\
&[N_i]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\
&\{\delta_e\}=[w_1, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \cdots, w_8, \theta_{8x}, \theta_{8y}]^T
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$x=\sum N_i x_i,\quad y=\sum N_i y_i \qquad (3)$$

일단 변위함수가 구해지면 그림 3과 같은 板의 要素剛度매트릭스는 일반화되어 있는 公式을 쓸 수 있다. 즉,

$$[K_e]=\iiint[B]^T[D][B]\,dx\,dy\,dz \qquad (4)$$

식(4)에서 strain matrix $[B]$는 變形度 $[\varepsilon]$의 定義에 따라서 정해진다.

$$\left.\begin{aligned}
&[\varepsilon]=[\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}, -\phi_x, -\phi_y]^T\\
&\text{단, }\chi_x=-\partial\theta_x/\partial x\\
&\chi_y=-\partial\theta_y/\partial y\\
&\chi_{xy}=-(\partial\theta_x/\partial y+\partial\theta_y/\partial x)\\
&-\phi_x=\ \partial w/\partial x-\theta x\\
&-\phi_y=\ \partial w/\partial y-\theta y
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

식 (3)을 편미분하여 식 (5)를 정리한다.

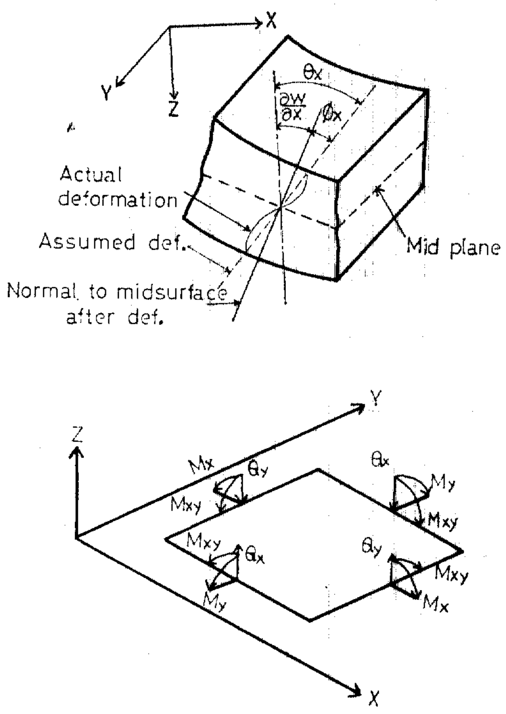

그림 3. Mindlin plate

$$[\varepsilon]=\sum_{i=1}^{8}\begin{bmatrix}0 & -\partial N_i/\partial x & 0\\ 0 & 0 & -\partial N_i/\partial y\\ 0 & -\partial N_i/\partial y & -\partial N_i/\partial x\\ \partial N_i/\partial x & -N_i & 0\\ \partial N_i/\partial y & 0 & -N_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_i\\ \theta_{xi}\\ \theta_{yi}\end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$=\sum[B_i]\{\delta_i\}$$

$$=[B]\{\delta\}$$

단, $[B]=[B_1, B_2, \cdots, B_8]$

$[B]$에 있는 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 項은 $\partial/\partial\xi$, $\partial/\partial\eta$ 項으로 바꾸어야 한다.

$$\partial N_i/\partial x=[J]^{-1}(\partial N_i/\partial\xi)$$

$$\partial N_i/\partial y=[J]^{-1}(\partial N_i/\partial\eta) \quad (7)$$

단, $[J]=\begin{bmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi\\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta\end{bmatrix}$

$\partial x/\partial\xi=\sum(\partial N_i/\partial\xi)x_i\cdots\cdots$

$[D]$는 平板의 elastic matrix이다.

$$[D]=\begin{bmatrix}[D_f] & 0\\ 0 & [D_s]\end{bmatrix}$$

여기서,

$$[D_f]=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[D_s]=\frac{Et}{2.4(1+\nu)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

이상과 같이 식 (4)는

$$[K_e]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B]^T[D][B]t\,|[J]|\,d\xi d\eta \quad (9)$$

와 같이 변환되며 이를 全要素에 대해 組合하면 平板의 剛度매트릭스 $[K_p]$를 구할 수 있고, 外的節點荷重을 $\{F\}$라 할 때 다음의 剛度方程式을 얻는다.

$$\{F\}=[K_p]\{\delta\} \quad (10)$$

Gaussian point에서의 應力 $[\sigma]$는

$$[\sigma]=[M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ Q_x,\ Q_y]^T$$

$$=[D][\varepsilon] \quad (11)$$

$$=[D][B]\{\delta\}$$

이다.

2.2 地盤모델

彈性地盤上의 平板에 하중이 작용할 때 지반의 變位는 지반과 평판의 접촉면에서만 일어나고 그 면에서의 수직변위는 접촉압력에 比例한다고 보는 그림 4와 같은 모델을 Winkler 地盤이라 한다.

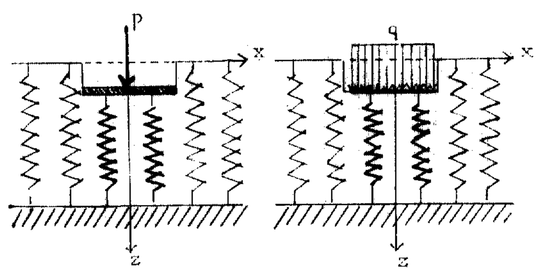

그림 4. Displacement of Winkler model

面積 Area 상의 집중하중 P 혹은 등분포하중 q에 의해서 Area 내의 범위에서 均等한 沈下가 일어날 때 그 침하량 W는 다음의 관계가 있다.

$$\left.\begin{matrix}q(x,y)\\ P(x,y)/\text{Area}\end{matrix}\right\}=kW(x,y) \quad (12)$$

여기서 k는 地盤反力係數로[8] 平板載荷試驗 등으로 구한다.

기초저면이 지반과 분리되지 않고 저면의 침

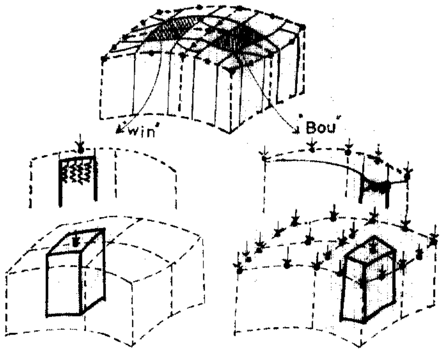

그림 5. Pedestal element of soil medium

하량이 하중 작용점에서만 하중에 독립적으로 비례한다고 할 때 그림 1의 지반을 그림 5와 같이 절점을 중심으로 절점수 만큼의 柱狀體要素로 분리해서 생각할 수 있으며, 지반의 한 절점 i를 중심으로 임의의 形狀으로 分割된 地盤要素의 면적 A_i에 집중하중 p_i 혹은 등분포하중 q_i가 작용할 때 변위 w_i는

$$\left.\begin{array}{l} q_i(x,y) \\ p_i(x,y)/A_i \end{array}\right\} = k w_i(x,y) \qquad (13)$$

이며, 여기서 A_i를 i點 주위 지반의 影響領域(influence area) 혹은 支配領域이라고 한다.

한편, 지반을 彈性, 均質 및 等方性이라고 가정한 Boussinesq 지반에서는[(2)], 그림 5의 한 주상체요소에 대해서 그림 6과 같이 그 요소내의 i점에 작용하는 집중하중 p_i에 인한 r만큼 떨어진 j점에서의 변위 w_{ji}는 다음과 같다. 즉,

$$\left.\begin{array}{l} w_{ji} = \dfrac{1-\nu_s^2}{\pi E_s} \cdot \dfrac{p_i}{r} \\ \quad = \beta \cdot \dfrac{p_i}{r} \\ 단,\ \beta = \dfrac{1-\nu_s^2}{\pi E_s} \end{array}\right| \qquad (14)$$

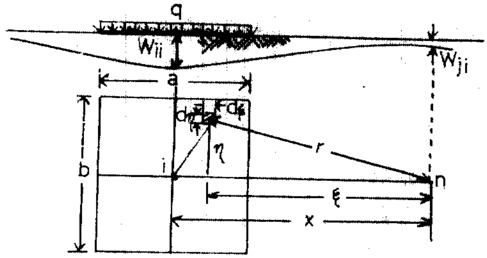

그림 6. Isotropic elastic half-space

여기서 E_s, ν_s는 지반의 彈性係數 및 포아송比이고 β는 흙의 성질에 따라 그 값이 정해지며 β/r을 柔軟度라 한다.

그런데 i점에 작용하는 하중으로 因해서 i점 자신에 생기는 변위는 $r=0$이 되어 식 (14)의 값이 無限大로 되어 모순점이 생기므로, 이 경우에는 등가절점하중이 한 절점 주위의 영향영역 요소에 p_i/A_i의 등분포하중으로 작용한다고 가정하고 그 영역의 요소면적에 대해 식 (14)를 積分함으로서 변위를 구한다. 즉,

$$\left.\begin{array}{l} w_{ii} = \displaystyle\int_{A_i} \frac{1-\nu_s^2}{\pi E_s} \cdot \frac{p_i}{A_i r} dA_i \\ \quad = \beta\ p_i\ \dfrac{1}{A_i} \displaystyle\int_{A_i} \frac{dA_i}{r} \\ \quad = \beta\ f_{ii}\ p_i \end{array}\right\} \qquad (15)$$

여기서

$$f_{ii} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \frac{dA_i}{r} \qquad (16)$$

으로서 한 절점하중이 영향을 미치는 지반요소의 면적과 요소내 미소면적과 절점간의 거리의 項으로 나타내어 지는 影響係數(Influence factor)라 한다.

3. 影響領域

8절점의 Isoparametric 요소는 한 절점의 영향영역을 4절점요소처럼[(5)] 모서리절점의 중간절점에 의해 사각형으로 분할하기가 어려우므로 등가절점하중의 分布 범위를 그림 7에서 처럼 요소를 ξ, η 좌표상으로 9等分하여 같은 면적의 矩形領域 $a_i \times b_i$로 나타내거나, 中央部分을 제외한 면적은 그 속에 포함되는 절점에 배당하며 중앙부분은 8절점에 等分配하는 방법 등을 생

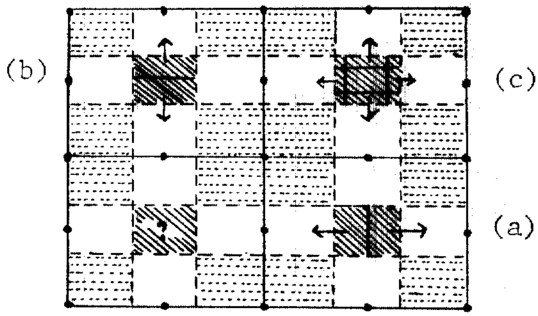

그림 7. Distribution of influence area

각할 수 있다. 즉,

$$A_i=A_{i0}+\sum_{1}^{n}\frac{A\cdot n}{8} \tag{17}$$

단, A_{i0} : i 절점에 직접 배당되는 면적

A_m : i 절점과 관련있는 중앙부분 면적

n : 절점의 위치에 따라 1, 2, 4

a_i, b_i : 영향영역의 긴변 및 짧은변 길이

그러나 식 (15)의 적분은 임의의 曲線境界를 갖는 영역에 대한 적분이므로 수치적분에 의존하는 바[9], 한 지반요소의 영역 e 內에서는 反力分布가 均等하다고 가정하여 영역내의 등분포하중과 等價인 節點力系를 假想일의 原理에 의해 구한다. 즉,

$$\delta\{w_s^e\}\{p^e\}=\int\delta w^e q^e\,dA \tag{19}$$

여기서 $\{w_s^e\}$는 지반요소의 둘레에 있는 절점의 변위이고, $\{p^e\}$는 등가절점역계이고, w^e는 e내의 임의 절점의 假想變位이며, q^e는 등분포하중이다.

식 (2)에서

$$w^e=\sum_{i=1}^{8}N_i w_i^e=\{w_s^e\}^T[N]^T \tag{19}$$

이며, 식 (19)를 식 (18)에 대입하면

$$\{p^e\}=q^e\int_A[N]^T dA \tag{20}$$

가 되며 식 (20)을 절점별로 表示하면

$$p_i^e=q^e\int_A N_i dA\,(i=1,2,\cdots,8) \tag{21}$$

이고, q^e가 등분포하중이므로 한 절점의 등가절점하중 p_i^e가 分配되는 影響領域 A_i^e는

$$\left.\begin{aligned}A_i^e&=A^e\cdot\frac{\int_A N_i dA}{\sum\int_A N_i dA}\\&=A^e\cdot\frac{\int_A N_i dA}{\int_A(\sum N_i)dA}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

이며 $\sum_{i=1}^{8}N_i=1$ 이므로 식 (22)는

$$A_i^e=\int_A N_i\,dA \tag{23}$$

가 된다. 따라서 절점 i에 作用하는 p_i의 영향영역은 i점을 둘러싸고 있는 각 요소의 면적 A_i^e를 모은 것이라고 할 수 있고, 다시 $\sum_e A_i^e$에 P_i가 등분포하는 것이라고 다시 가정하면 A_i는

$$A_i=\sum^e\int_A N_i dA=\sum^e\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}N_i(\xi,\eta)\det[J]\,d\xi\,d\eta$$

이다. (24)

한편 식 (19) 및 (15)에서

$$\left.\begin{aligned}w&=\sum^e N_i w_i\\&=\beta\cdot p_i\sum^e\frac{1}{A_i}\int_A\frac{N_i dA_i}{r}\\&=\beta\cdot p_i\cdot f_{ii(num)}\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

가 되며 식 (21), (24) 및 (25)는 共通點이 있어서 이미 發表된 등분포하중을 등가절점하중으로 바꾸는 서브루우틴 프로그램을 利用할 수 있다.

이렇게 하여 구해진 영역 A_i는 그림 6에서 보는 바와 같이 $a_i\times b_i$ 크기의 矩形領域으로 생각할 때, 그림 7의 配分方法 等에 따라 後述하는 計算値를 비교하면 a/b 比에 크게 영향을 받지 않음을 볼 때[9] $a/b=1$ 혹은 4/3으로 생각하거나 要素의 Gaussian point 좌표 $x_{GP(I)}, y_{GP(I)}$의 이웃한 점을 연결한 線의 x, y 좌표에 대한 길이의 합의 比로서 表示하기로 한다.

$$\left.\begin{aligned}AA&=\mathrm{MAX}(|\sum(X_{GP(I)}-X_{GP(J)})|,\\&\qquad|\sum(Y_{GP(I)}-Y_{GP(J)})|)\\BB&=\mathrm{MIN}(|\sum(X_{GP(I)}-X_{GP(J)})|,\\&\qquad|\sum(Y_{GP(I)}-Y_{GP(J)})|)\\\frac{a}{b}&=AA/BB\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

따라서 影響係數 f_{ii}의 식 (16)은

$$f_{ii}=\frac{2}{a_i b_i}\int_{x=0}^{x=a/2}\int_{y=0}^{y=b/2}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{27}$$

가 되며 f_{ii}와 관련해서 아래와 같이 다른 영향계수 I_w, α, S_i를 보이고 있다.

Steinbrenner는[8] 여러가지 형태의 기초에 대한 영향계수 I_w값를 表 1과 같이 提示하였으며 특히 矩形地盤의 모서리 部分에 對한 I_w를 다음과 같이 나타내었다.

$$\left.\begin{aligned}I_w&=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{a}{b}\ln\left[\frac{1+\sqrt{(a/b)^2+1}}{}\right]+\ln\right.\\&\qquad\left.\left[\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}\right]\right\}\\f_{ii}&=\frac{\pi I_w}{a}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

表 1. Influence factor Iw

Shape		Flexible			Rigid
		Center	Corner	Average	
Circle		1.0	0.64	0.85	0.88
Square		1.12	0.56	0.95	0.82
Rectangle	1.5	1.36	0.68	1.15	1.06
$\left(\frac{a}{b}\right)$	2	1.53	0.77	1.30	1.20
	5	2.10	1.05	1.83	1.70
	10	2.54	1.27	2.25	2.10
	100	4.01	2.00	3.69	3.40

趙・嚴은[3,10] 영향계수 α_i를 提示한 바

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i&=\frac{1}{b}\left[a\ \log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{\sqrt{a^2+b^2}-b}+4b\log\right.\\&\quad\left.\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+b}+\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-b}}{\sqrt{2b}}\right]\\f_{ii}&=\alpha_i/a\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

와 같으며, Timoshenko는[11] 또 다른 영향계수 S_i를 提示하였다. 즉,

$$\left.\begin{aligned}S_i&=2\frac{a}{b}\left\{\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{b}{a}\ln\left[\frac{a}{b}+\left(\frac{a^2}{b}\right)+1\right]^{1/2}\right.\\&\quad\left.+\ln\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\right]^{1/2}\right.\\f_{ii}&=S_i/a\end{aligned}\right|\quad(30)$$

와 같으며, 여러가지 係數에 대한 비교는 例에서 보이기로 한다.

4. 平板과 地盤의 連結

앞에서 다룬 地盤모델에 근거하여서 地盤의 剛度매트릭스를 구하고 여기에 平板의 剛板매트릭스를 組合하고 地盤上의 平板의 평형방정식을 유도하고자 한다.

Winker지반에 대해서는 식 (13)을 모든 절점에 대해서 생각하면

$$\{p\}=k[A_i]\{w\}=[K_w']\{w\}\quad(31)$$

와 같고 여기서 $[K_w']$는 Winkler지반의 강도매트릭스로서 對角매트릭스이다. 즉,

$$[K_w']=k[A_i]=k\begin{vmatrix}A_1 & 0 & 0\cdots\cdots\\ 0 & A_2 & 0\cdots\cdots\\ 0 & 0 & A_3\cdots\cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\end{vmatrix}\quad(32)$$

Boussinesq지반에 대해서는 임의의 i절점의 침하량은 i점 외의 작용하중으로 인한 처짐량 식 (14)의 累積值에 i점에서의 하중으로 인한 값 식 (15)를 합한 것이다. 즉,

$$\left.\begin{aligned}w_i&=w_{ii}+\sum_{j=1}^{n}w_{ij}\\&=\beta\cdot f_{ii}p_i+\beta\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j}{r_{ij}}\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

이며 전절점 n개에 대한 식 (33)을 매트릭스형태로 나타내면

$$\left.\begin{Bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\\vdots\end{Bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}f_{11} & \frac{1}{r_{21}} & \frac{1}{r_{31}}\cdots\\ \frac{1}{r_{12}} & f_{22} & \frac{1}{r_{32}}\cdots\\ \frac{1}{r_{13}} & \frac{1}{r_{23}} & f_{33}\ \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\\vdots\end{Bmatrix}\right\}\quad(34)$$

즉, $\{w\}=[F_f]\{p\}$

로서 $[F_f]$는 지반의 柔軟度매트릭스로서 대칭이지만 帶狀이 아니고 꽉 찬 매트릭스이다.

식 (34)를 $\{p\}$에 대해서 展開하면

$$\left.\begin{aligned}\{p\}&=[F_f]^{-1}\{w\}\\&=[K_B']\{w\}\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

로서 $[K_B']$는 $[F_f]$의 逆매트릭스이다.

지반의 작용하중 및 변위가 각각 p,δ이고 板의 하중벡터 및 변위벡터가 $F_i=[p,M_x,M_y]^T$와 $\{\delta\}=[w,\theta_x,\theta_y]^T$임을 고려하면 식 (31) 및 (35)는 平板에 對應하도록 $3n\times3n$ 크기로 확장해서

$$\{F_w\}=[K_w]\{\delta\}\quad(36)$$

$$\{F_B\}=[K_B]\{\delta\}\quad(37)$$

가 되며 M_x, M_y 및 θ_x, θ_y값은 0이다.

平板의 절점에 作用하는 하중은 外的荷重 $\{F\}$이지만 地盤에 놓여 있는 平板임을 고려하면 効果的으로 미치는 Winkler지반 基礎의 外力은[2,5] $\{F\}-\{F_w\}$가 되며 따라서 식 (10)은

$$\{F\}-\{F_w\}=[K_p]\{\delta\}\quad(38)$$

가 되고 여기에 식 (36)을 代入하면

$$\left.\begin{aligned}\{F\}&=[K_w]\{\delta\}+[K_p]\{\delta\}\\&=([K_w]+[K_p])\{\delta\}\\&=[K_{w-p}]\{\delta\}\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

가 되며, $[K_p]$의 對角線에 ka_ib_i 値를 2칸씩 걸러서 중첩한 Winkler 지반상의 平板의 剛度매트릭스 $[K_{w-p}]$는 帶狀매트릭스이므로 band method

를[12] 適用하여서 식 (39)를 풀 수 있다.

마찬가지로 Boussinesq 지반에 대해서도

$$\left.\begin{aligned}\{F\} &= ([K_B]+[K_p])\{\delta\} \\ &= [K_{B-p}]\{\delta\}\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

로 나타내어지며 Boussinesq 지반상의 平板의 剛度매트릭스 $[K_{B-p}]$는 帶狀의 $[K_p]$보다 큰 $3n\times 3n$ 크기의 꽉 찬 매트릭스가 되어서 特異한 band method의 적용이 되어지며 따라서 강도 매트릭스內의 많은 0項을 消去하는 技法을[13] 사용해야 하겠으며, 變位가 구해지면 應力은 식 (11)에서와 같이 구할 수 있다.

5. 프로그램의 構成 및 計算例

Hinton과 Owen이 開發한 平板의 해석 프로그램을[7] 根幹으로 하여, 彈性地盤上의 平盤解析을 앞에서 論한 理論에 따라 이미 발표한 M-ATK 프로그램을 영향영역의 自動配分 및 여러가지 영향계수에 對한 Boussinesq 지반상의 平板解析의 비교분석을 할 수 있는 프로그램 NMAT로 發展시켰는 바 이 프로그램의 General Flow Chart는 그림 8과 같으며, 여기에서 서브루틴 중에서 □表示는 Hinton Owen의 프로그램과 거의 일치되며 □는 다소 개편한 것, □는 다른 기존의 프로그램을 이용한 것이며, □는 이번에 개발한 것을 뜻한다.

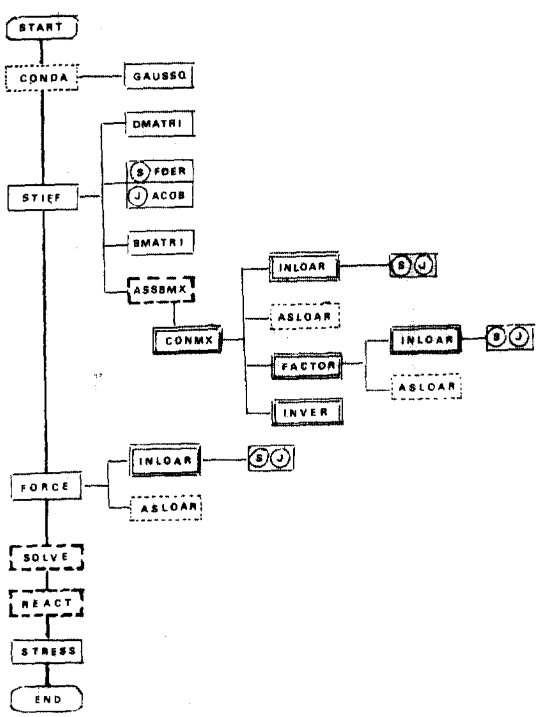

그림 8. General flow chart

프로그램 NMAT를 사용하여 그림 9와 같은 10 ft×10 ft(두께 2 ft)의 矩形基礎와 半徑 20 ft (두께 1 ft)의 圓形基礎의 여러가지 計算을 하고자 하는바, 그 전에 두께 40 mm의 1.05×1.05 m의 矩形인 鋼板에 對해 平板載荷試驗을[14] 하여서 地盤의 反力係數 k를 荷重强度와 沈下量 사이의 關係曲線에서 구하고, 같은 형상의 70×70 cm 板에 對해서 試驗하여 表 1의 I_w와 식 (28)과 식 (15)에서 qb와 沈下의 관계 곡선을 그릴 때 그 기울기가 $(1-\nu_s^2)I_w/E_s$이며 여기서 E_s를 구한다[18].

以後의 여러 計算에 있어서 다른 言及이 없으면 地盤에서 k=500 ksf, ν_s=0.25, E_s=1,440 ksf로, 平板은 ν=0.3, E=468,000 ksf로, 作用荷重은 中央點에 500 kip가 加해지는 것으로 하겠으며, Winkler 地盤을 "Win", Boussinesq 지반을 "Bou"로 略해 表示한다.

(가) 影響領域의 幾何學的인 分配

영향영역을 數値的으로 配分하지 않고 그림 7에서와 같이 기하학적으로 적절한 크기의 $a\times b$인 矩形으로 하여서 프로그램 MATK에서 절점 입력자료에 직접 두 변의 길이를 넣어서 계산한

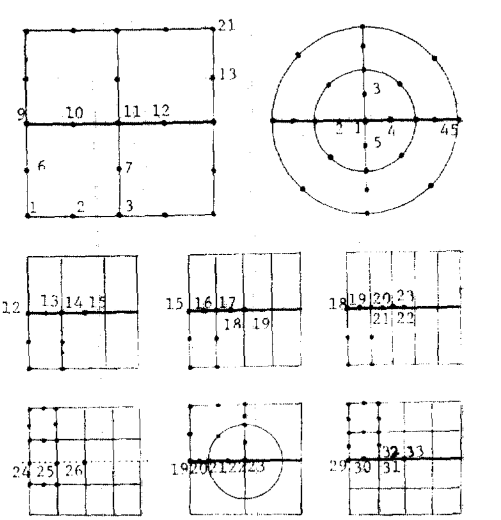

그림 9. Node numbering

값이 表 2 에 있으며 여기서 配分形態에 無關하게 變位가 같음을 알 수 있다.

(나) 影響領域의 數値的인 分配

영향영역을 프로그램 NMAT 를 이용하여 수치적으로 배분하여서 계산한 변위가 역시 表 2 에 나타나 있다.

表 2 에서 "Win"에 대해 幾何學的, 數値的인 分配法에 관계없이 變位가 일치함을 알 수 있으며, "Bou"에 대해서도 I_w 値를 基準으로 한 위 方法과 $a/b=1.33$ 및 식 (26)에 의한 a/b 比에 대한 變位가 같음을 알 수 있으나, 각 영향계수에 대한 解析方法에서는 I_w 와 f_{num} 에 대한 變位가 비슷하며 S_i 와 α 에 대한 값이 다소 큼을 알았다.

(다) 地盤狀態에 따른 比較

土性別 k 값 및 E_s 값은[8,15] 그 變化의 幅이 크며 實驗으로도 그 값이 一定하지 않는 等의 어려움이 있어서 表 3 에 나타난 k 및 E_s 의 地盤狀態에 따른 變位의 범위를 그림 10 에서 볼 수 있다.

여기에서 우리는 "Win"의 k 값과 "Bou"의 E_s 値의 有關性을 찾아보고자 하는 바[16,17], 두 常數의 相異性으로 일반적인 關係式의 유도가 어려운 바, 그림 10 에서 처짐이 k 및 E_s 値에 一次的으로 比例하고 $E_s=1,440$ 의 변위에 對應되

表 2. Disp. distribution type and influence factor

			Node 9	Node 10	Node 11	비 고
Win	MAT-K	그림 a	0.00961	0.01062	0.01168	
		그림 b	0.00971	0.01063	0.01168	
		그림 c	0.00965	0.01062	0.01168	
	NAMT		0.00963	0.01049	0.01157	
Bou	MAT-K	그림 a	0.02330	0.02459	0.02587	I_w 이용
		그림 b	0.02339	0.02461	0.02587	
		그림 c	0.02336	0.02461	0.02589	
	NAM-T	I_w*	0.02113	0.02235	0.02350	$*: \frac{a}{b}=1.333$
		I_w	0.02117	0.02239	0.02354	
		α_i*	0.02755	0.02860	0.02966	
		α	0.02763	0.02868	0.02974	
		S_i*	0.02412	0.02525	0.02634	
		S_i	0.02473	0.02584	0.02693	
		f_{num}	0.02001	0.02137	0.02258	

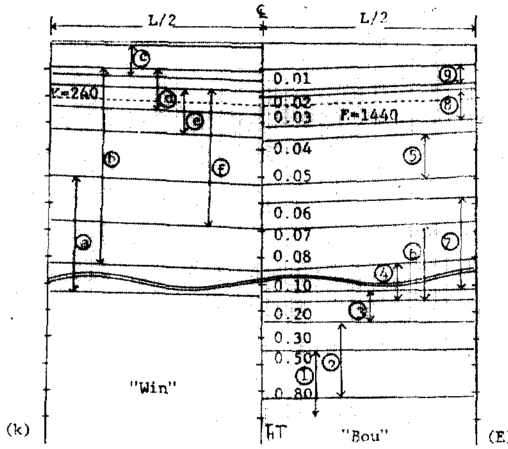

그림 10. Disp. depending on type of soil

는 k 値가 240 임을 볼 때 본 프로그램에서 아래의 관계식을 이끌 수 있다. 즉,

$$k=\frac{E_s}{6.4(1-\nu_s^2)} \tag{41}$$

위 식은 平板의 규격등에 관계되는 식으로 일반적인 地盤에 적용되는 式이라기 보다 본 프로그램을 수행할 때 "Bou"의 컴퓨터사용량 等의 과다로 인한 많은 절점을 가진 해석에서는 E_s 에 對應하는 k 값을 구해서 "Bou"의 처짐을 간접으로 구하는 利點이 있다.

表 3. Typical range of values for k & E_s

Win	Type of soil	k (kcf)
a	Loose sand	30~100
b	Medium sand	65~500
c	Dense sand	400~800
d	Clayey sand(medium)	200~500
e	Silty sand(medium)	150~300
f	Clayey soil	75~300
Bou	**Type of soil**	**E_s (psi)**
1	Very soft clay	50~400
2	Soft clay	250~600
3	Medium clay	600~1,200
4	Hard clay	1,000~2,500
5	Sandy clay	4,000~6,000
6	Silty sand	1,000~3,000
7	Loose sand	1,500~3,500
8	Dense sand	7,000~12,000
9	Dense sand and gravel	14,000~28,000

表 4. Disp. -number of elements

	4 el.	6 el.	8 el.	10 el.	12 el.	12 el.-R	16 el.
Win	⑨ 0.9631E-02 ⑩ 0.1049E-01 ⑪ 0.1157E-01	⑫ 0.9633E-02 ⑬ 0.1011E-01 ⑭ 0.1070E-01 ⑮ 0.1126E-01	⑮ 0.9736E-02 ⑯ 0.9998E-02 ⑰ 0.1037E-01 ⑱ 0.1102E-01 ⑲ 0.1169E-01	⑱ 0.9696E-02 ⑲ 0.9932E-02 ⑳ 0.1022E-01 ㉑ 0.1067E-01 ㉒ 0.1115E-01 ㉓ 0.1143E-01	㉔ 0.9650E-02 ㉕ 0.1038E-01 ㉖ 0.1134E-01	⑲ 0.9712E-02 ⑳ 0.9938E-02 ㉑ 0.1019E-01 ㉒ 0.1088E-01 ㉓ 0.1164E-01	㉙ 0.9696E-02 ㉚ 0.1001E-01 ㉛ 0.1040E-01 ㉜ 0.1099E-01 ㉝ 0.1170E-01
Bou(I_w)	⑨ 0.2001E-01 ⑩ 0.2137E-01 ⑪ 0.2258E-01	⑫ 0.2202E-01 ⑬ 0.2264E-01 ⑭ 0.2332E-01 ⑮ 0.2395E-01	⑮ 0.2253E-01 ⑯ 0.2291E-01 ⑰ 0.2335E-01 ⑱ 0.2416E-01 ⑲ 0.2439E-01	⑱ 0.2242E-01 ⑲ 0.2283E-01 ⑳ 0.2340E-01 ㉑ 0.2398E-01 ㉒ 0.2446E-01 ㉓ 0.2472E-01	㉔ 0.2324E-01 ㉕ 0.2430E-01 ㉖ 0.2537E-01	⑲ 0.2421E-01 ⑳ 0.2455E-01 ㉑ 0.2489E-01 ㉒ 0.2570E-01 ㉓ 0.2650E-01	㉙ 0.2373E-01 ㉚ 0.2421E-01 ㉛ 0.2475E-01 ㉜ 0.2543E-01 ㉝ 0.2618E-01
Bou (f_{num})	⑨ 0.2117E-01 ⑩ 0.2239E-01 ⑪ 0.2454E-01	⑫ 0.2038E-01 ⑬ 0.2160E-01 ⑭ 0.2235E-01 ⑮ 0.2301E-01	⑮ 0.2139E-01 ⑯ 0.2186E-01 ⑰ 0.2235E-01 ⑱ 0.2321E-01 ⑲ 0.2397E-01	⑱ 0.2121E-01 ⑲ 0.2160E-01 ⑳ 0.2200E-01 ㉑ 0.2269E-01 ㉒ 0.2335E-01 ㉓ 0.2367E-01	㉔ 0.2224E-01 ㉕ 0.2343E-01 ㉖ 0.2454E-01	⑲ 0.2390E-01 ⑳ 0.2433E-01 ㉑ 0.2462E-01 ㉒ 0.2545E-01 ㉓ 0.2628E-01	㉙ 0.2287E-01 ㉚ 0.2338E-01 ㉛ 0.2395E-01 ㉜ 0.2464E-01 ㉝ 0.2540E-01

(라) 要素數에 따른 比較

그림 9에서 볼 수 있는 바와 이 같은 크기의 基礎의 要素數를 變化시켰을 때의 中心線上의 처짐이 表 4에 나타나 있는 바 거의 일치함을 알 수 있으며 이는 Isoparametric 要素를 사용한 點 등의 利點때문이다.

(마) 圓形基礎의 解析

그림 9와 같은 圓形基礎[11,18] (E=43,2000ksf, ν=0.2, E_s=2,000ksf, ν_s=0.3)의 中央點에 集中荷重이 作用할 때, 偏心된 한 點에 集中荷重이 作用할 때와 圓環荷重이 作用할 때에 여러가지 영향계수를 이용했을 때의 "Bou"의 처짐이 그림11에 나타나 있는 바 I_w f_{num}에 對한 값이 Si에 대한 값보다 다소 작은 것을 지적할 수 있겠다.

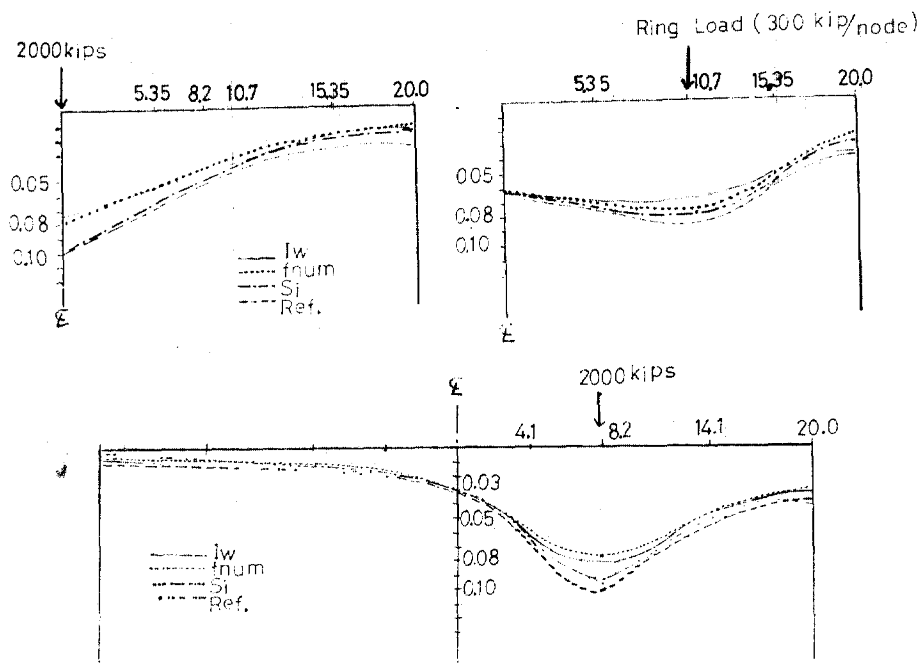

그림 11. Disp. of circular mat

6. 結 論

(1) 彈性地盤上의 平板子조물에 對한 解析을 Winkler 地盤 및 Boussinesq 地盤모델을 通하여서 8-Node Isoparametric 要素를 使用한 有限要素法을 푸는 理論體系를 發展시키고 컴퓨터프로그램 MATK를 補完하여서 NMAT를 만들었다.

(2) 地盤에서의 節點力의 影響領域의 數値的인 自動配分方法을 提示하고, 幾何學的인 配分方法 및 旣發表된 影響係數 I_w, α, S_i를 利用한 方法과 比較를 하고, 그 結果 既存의 解析方法보다도 더 効果的임을 알 수 있었다.

(3) 이제까지 發表된 論文은 두 모델의 理論體系에 對해서 論했거나 Winkler 地盤에 대한 電算解만을 發表하였으나 여기서는 Boussinesq 地盤에 대한 電算解를 밝혔으며, 後者에서 컴퓨터 記憶容量의 過多로 因해서 解析의 어려움이 있을 때 $k=\frac{E_s}{6.4(1-\nu_s^2)}$ 値를 前者에 入力하여 本 프로그램을 代置해서 利用할 수도 있다.

(4) 要素數를 變化시켜도 中心線上의 沈下量이 같았으며 圓形基礎와 같이 形狀이 바뀌어도 適切한 解를 얻었으나, 같은 形態의 地盤이라도 흙의 特性을 나타내는 地盤反力係數 및 彈性係數의 選擇이 모델화 및 解析方法에 못지않게 重要함으로 適切한 係數의 使用이 要求된다.

謝 辭

本 硏究는 韓國科學財團의 硏究費에 의해 이루어진 바 財團當局에 眞心으로 感謝를 드리오며, 또 硏究期間동안 많은 助言을 해 주신 釜山大 趙顯榮 敎授께도 謝意를 表하는 바이다.

참 고 문 헌

1. 김성득, 지반—기초—구조 상호영향의 모델화에 관한 연구, 울산대 연구논문집, 제14권 1호, pp. 99~112(1983).
2. A.P.S. Selvadurai, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier Scientific Pub-lisnhig Co. pp. 13~21(1979).
3. B. Goschy, *Soil-Foundation-Structure Interat-ion*, ASCE, ST5, pp. 749~761(1978).
4. Y.K. Cheung and O.C. Zienkiewicz, *Plates and Tanks on Elastic Foundations*, Int. J. Solids Structures, Vol. 4, pp. 451~461(1965).
5. 최창근, 유한요소법강좌, 대한토목학회지, 제24권 제2호, pp. 27~32(1976).
6. 김성득, 유한요소법에 의한 전면기초의 해석, 부산대 공학석사 학위논문(1981).
7. E. Hinton and D.R.J. Owen, *Finite Element Programming*, Academic Press(1977).
8. J.E. Bowles, *Foundation Analysis and Design*, 2nd ed., Ch. 5, 9, 10, McGraw Hill(1974).
9. 조현영, 탄성지반상에 놓인 판—보 휨의 유한요소법에 의한 해석, 부대구조연구실(1981).
10. 엄채영, 지반과 구조물간의 상호작용을 고려한 암거해석에 관한 연구, 동아대 공학박사 학위논문(1982).
11. A. Banerjee and Z.D. Jankow, *Circular Mats under Arbitary Loading*, ASCE, ST10, pp. 2133~2145(1975).
12. W. Weaver, *Computer Programs for Structural Analysis*, pp. 8~47, Van Nonstrand Co., (1967).
13. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw Hill (1977).
14. 崔癸軾, 토목재료 시험법과 해설 및 응용, 형설출판사, pp. 486~510(1982).
15. H.F. Winterkorn and H.Y. Fang, *Foundation Engineering Handbook*, V.N.B. Co., pp. 516~518, p. 567(1975).
16. S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krioger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., pp. 259~281, McGraw-Hill(1981).
17. I.K. Lee and P.T. Brown, *Structure-Foundation Interaction Analysis*, ASCE, ST11, pp. 2413~2431(1972).
18. R. Bolton, *Stresses in Circular Plates on Elastic Foundations*, ASCE, EM3, pp. 629~640 (1972).

(接受：1985. 6. 5).