

極限모멘트 荷重을 받는 異方性 構造體의 解析

Analysis of Orthotropic Body under Ultimate Moment Load)

張 錫 潤*
Chang, Suk Yoon

Abstract

This dissertation presents an exact solution for the normal and shearing stresses of an orthotropic plane body loaded by a moment load. The solution satisfies the conditions of equilibrium compatibility equations concurrently and is governing for the body being in the elasto-plastic state. An Airy stress function is introduced to solve the problem related to an orthotropic half-infinite plane under a moment load.

All the equations for orthotropy must be degenerated into the expressions for isotropy when orthotropic constants are replaced by isotropic ones.

The author has evaluated all the equations of orthotropy and succeeded in obtaining exactly identical expressions to the equations of isotropy which were derived independently by of L'hopitals rule.

The analytical results of isotropy are compared with the simple results of other investigator. Since moment Load under the elastic state and plastic state only is a particular case of moment load under the elasto-plastic state. All the equations of elasto-plastic state case are degenerated into the expressions for the each case.

The formal solution is expressed in terms of closed form. The orthotropic constants are evaluated for two kinds and two different orientations of the grain of wood and two kinds of structures.

The numerical results for orthotropy are evaluated for one kind and two different orientations of three-layered ply wood.

The distribution of normal and shearing stresses are shown in figures. It is noted that the distribution of stresses of orthotropic materials depends on the type of materials and orientations of the grain and stiffening.

要 旨

本 論文은 材料의 性質이 直交하는 方向으로 相異한 異方性 構造體에 모멘트 荷重이 境界에 作用할 경우의 垂直 및 剪斷應力을 나타내는 엄밀 解析을 提示하였다. 모멘트 荷重은 彈性荷重은 물

*正會員 · 서울市立大學 副教授, 土木工學科

론 彈塑性荷重과 極限荷重에 이르기까지의 荷重의 變化에 따른 構造體 內部的 應力들을 解析의 方法으로 解析하였다. 이 解法은 平衡條件과 適合條件을 동시에 만족하는 彈性論的인 엄밀解法이다. 따라서 이러한 問題를 解析하기 위하여 Airy 應力函數를 利用하였다.

本 解法의 妥當性을 證明하기 위하여 異方性인 경우의 方程式들의 異方性 常數들을 等方性인 경우의 常數들로 代置할 경우에 等方性인 경우의 方程式들로 變換되지 않으면 안된다. 이를 검토하기 위하여 L'hospital의 法則을 利用하였다. 그 結果 異方性인 경우의 모든 方程式들은 等方性인 경우의 方程式들로 精確히 變換되었고 이 式들은 이미 연구된 자료들의 값들과 比較된 結果 동일한 값을 얻었다. 本 解法의 方程式들은 簡單한 形態로 構成되어있어 數值結果를 누구나 精確히 얻을 수 있는 장점이 있다.

應力의 값을 얻기 위한 材料의 性質이나 構造의인 性質에 따라 결정되는 異方性常數를 3 단합판 중첩합판과 鋼補鋼板, 철근콘크리트板을 例를 들어 表로 表示하였고 數值結果는 3 段合板을 例를 들어 나무결을 두가지 方向으로 強軸을 바꾸어 각각의 垂直 및 剪斷應力을 求하여 圖表로 表示하였으며 그 결과 應力의 分布는 材料의 性質과 補強部材의 배치 내용에 따라 달라지는 強軸의 方向에 따라 현저하게 달라지는 現象을 볼 수 있다.

1. 序 論

構造物은 構造部材로서 서로 연결되어 構造體를 形成하고 있다. 이런 경우 그 部材들의 연결부나 接合部에는 모멘트荷重이 發生되고 이 荷重에 의하여 연결부에는 局部應力變化가 發生하고 構造體는 彈性領域에서 極限領域에 이르는 過程을 따라 應力의 變化 狀態를 규명하는 문제는 構造工學的으로 매우 重要한 問題로 고려될 수 있다. 특히 材料의 性質이 直交하는 方向으로 서로 다른 異方性인 경우인 木材나 鐵筋콘크리트 構造體와 補強材로 補強된 鋼構物 設計에서 많은 問題點으로 제기될 수 있는 問題들이다.

이러한 局部影響에 對한 研究은 일찌기 1892 年의 Bussinesq, J.⁽¹⁾의 半經驗的인 解法을 Flammant의 解法⁽⁵⁾으로 정립한 데서부터 시작하여 Fourier 積分形態를 利用한 Filon, L.N.G.⁽⁴⁾의 解法, 1909 年의 Lamb, H.⁽¹³⁾ 1927 年의 karmán, T.V.⁽¹²⁾와 Seewald, F.⁽¹⁸⁾로 이어지는 等方性인 경우의 解法으로부터 Love, A.E.H.⁽¹⁶⁾, Green, A.E와 Zerna, W.⁽⁶⁾ 그리고 非等方性和 관련된 一般的인 平面問題를 다룬 Lekhnitskii, S.G.⁽¹⁵⁾와 異方性 問題의 Green⁽⁶⁾과 Conway⁽³⁾解法 등과 1964 年의 Silverman, I.K.⁽¹⁹⁾의 異方性 板의 解析과 1967 年의 Hooley, R.F와 Hibbert,

P.D.⁽¹⁰⁾의 木材로 된 板의 應力集中效果의 研究을 비롯 1970 年代의 Goodman, J.R과 Bodig, Jozsef⁽²⁴⁾와 Thompson, E.G.⁽²⁵⁾ 등이 木材의 異方性에 관한 解析을 有限要素法을 利用하여 解析하였다.

本 論文에서는 모멘트荷重이 異方性 構造體의 境界에 作用할 경우 모멘트荷重에 의한 應力이 材料의 彈性領域으로 부터 極限領域에 이르는 過程을 따라 構造體 內에 發生되는 應力分布를 解析的인 方法으로 解析하고자 한다. 解法의 妥當性을 證明하기 위하여 等方性인 경우로 變換하여 이미 연구된 자료⁽²⁷⁾와 비교코자 한다. 使用 構造體의 材料는 木材, 鐵筋콘크리트 및 補強材로 補強된 鋼構物을 例를 들어 數值解를 求하여 圖表化한다. 本 解法은 平衡條件과 適合條件을 만족하는 彈性論的인 合理的인 解法이다.

2. 異方性 半無限體의 解析

異方性 半無限體에 適用되는 方程式은 異方性의 主軸에 따라 設定한 座標軸에 對한 平面問題의 biharmonic equation에 일치 되므로 참고문헌⁽¹⁹⁾에 依하면 微分方程式은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + (D_1^2 + D_2^2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + D_1^2 D_2^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

여기서

$$D_1^2 + D_2^2 = \frac{2C_{12} + C_{66}}{C_{22}} \quad (2a)$$

그리고

$$D_1^2 D_2^2 = \frac{C_{11}}{C_{22}} \quad (2b)$$

탄성상수 C_{ij} 는 탄성계수의 항으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$C_{11} = \frac{1}{E_x} \quad (3a)$$

$$C_{22} = \frac{1}{E_y} \quad (3b)$$

$$C_{12} = -\frac{\nu_x}{E_y} = -\frac{\nu_y}{E_x} \quad (3c)$$

$$C_{66} = \frac{1}{G} \quad (3d)$$

등방성인 경우는方程式 (2)로 부터 D_1, D_2 는 다음과 같이 된다.

$$D_1 = 1 \quad (4a)$$

$$D_2 = 1 \quad (4b)$$

그리고方程式 (1)은方程式 (4)로 변환된다. 즉 $\nabla^4 \varphi = 0$

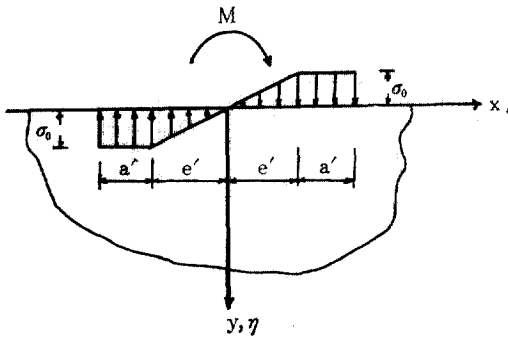


그림 1. 모멘트荷重을 받는 半無限體

그림 1에서 보여준 바와 같이 單位두께를 갖는 異方性 半無限體에 $y=0$ 인 境界에서 모멘트荷重이 作用할 경우 이 모멘트荷重에 의한 彈性和 塑性領域에서의 應力分布를 다음과 같이 Fourier 積分形態로 表示될 수 있다.

$$f(x) = -\frac{2\sigma_0}{\pi e'} \int_0^\infty \left[\frac{e' \cos(e' \beta')}{\beta'} - \frac{\sin(e' \beta')}{\beta'^2} \right] \sin(x \beta') d\beta' + \frac{2\sigma_0}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\cos(e' \beta') - \cos\{(a' + e') \beta'\}}{\beta'} \right] \sin(x \beta') d\beta' \quad (6)$$

여기서 a' 는 모멘트 荷重에 依한 境界에서의 極限領域의 길이의 半이며 σ_0 는 彈性領域의 길이의 半이고 σ_0 는 모멘트 荷重에 依한 境界에서의 最大應力이다.

Fourier 積分形態로 表示된 境界條件인 $y=0$ 에서

$$\sigma_y = -\frac{2\sigma_0}{\pi e'} \int_0^\infty \left[\frac{e' \cos(e' \beta')}{\beta'} - \frac{\sin(e' \beta')}{\beta'^2} \right] \sin(x \beta') d\beta' + \frac{2\sigma_0}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\cos(e' \beta') - \cos\{(a' + e') \beta'\}}{\beta'} \right] \sin(x \beta') d\beta' \quad (7a)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (7b)$$

이코 Airy 應力函數를

$$\varphi = \int_0^\infty f(y) \sin(x \beta') d\beta'$$

라 假定하고方程式 (1)에 代入하여 정리하면

$$D_1^2 D_2^2 f''''(y) - \beta'^2 (D_1^2 + D_2^2) f''(y) + \beta'^4 f(y) = 0 \quad (8)$$

이코方程式 (8)의 解는 다음과 같다.

$$f(y) = A_0 e^{my} + B_0 e^{ny} + C_0 e^{py} + D_0 e^{qy} \quad (9a)$$

여기서

$$m = -\frac{\beta'}{D_2}, \quad n = -\frac{\beta'}{D_1} \\ p = \frac{\beta'}{D_2}, \quad q = \frac{\beta'}{D_1} \quad (9b)$$

여기서 常數 C_0, D_0 는 φ 가 $y \rightarrow \infty$ 일때 수렴되어야 하므로 0이고 A_0, B_0 는 $y=0$ 에서의 境界條件으로 부터 얻어질 수 있다.

그러므로

$$\varphi = \int_0^\infty [A_0 e^{my} + B_0 e^{ny}] \sin(x \beta') d\beta' \quad (10)$$

方程式 (10)으로 부터

$$\sigma_y = -\int_0^\infty \beta'^2 [A_0 e^{my} + B_0 e^{ny}] \sin(x \beta') d\beta' \quad (11a)$$

$$\tau_{xy} = -\int_0^\infty \beta' [m A_0 e^{my} + n B_0 e^{ny}] \cos(x \beta') d\beta' \quad (11b)$$

式 (11a)와 (11b)를式 (7)로 주어진 境界條件에 代入하면

$$\int_0^\infty \beta'^2 [A_0 + B_0] \sin(x \beta') d\beta' = -\frac{2\sigma_0}{\pi e'} \int_0^\infty \left[\frac{e' \cos(e' \beta')}{\beta'} - \frac{\sin(e' \beta')}{\beta'^2} \right] \sin(x \beta') d\beta' + \frac{2\sigma_0}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\cos(e' \beta') - \cos\{(a' + e') \beta'\}}{\beta'} \right] \sin(x \beta') d\beta' \quad (11c)$$

$$\beta'^2 [mA_0 + nB_0] = 0 \quad (11d)$$

式 (11c)와 (11d)를 연립하여 A_0 와 B_0 를求하면

$$A_0 = \frac{2\sigma_0}{\pi e'} \left(\frac{1}{1-\frac{m}{n}} \right) \left[\frac{e' \cos(e' \beta')}{\beta'^3} - \frac{\sin(e' \beta')}{\beta'^4} \right] - \frac{2\sigma_0}{\pi} \left(\frac{1}{1-\frac{m}{n}} \right) \left[\frac{\cos(e' \beta') - \cos\{(a'+e')\beta'\}}{\beta'^3} \right] \quad (12a)$$

$$B_0 = -\frac{2\sigma_0}{\pi e'} \left(\frac{n}{m-1} \right) \left[\frac{e' \cos(e' \beta')}{\beta'^3} - \frac{\sin(e' \beta')}{\beta'^4} \right] + \frac{2\sigma_0}{\pi} \left(\frac{n}{m-1} \right) \left[\frac{\cos(e' \beta') - \cos\{(a'+e')\beta'\}}{\beta'^3} \right] \quad (12b)$$

A_0 와 B_0 를 式 (10)에 代入하면

$$\varphi = \frac{2\sigma_0}{\pi} \frac{1}{(D_2 - D_1)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{e'} \left\{ \frac{e' \cos(e' \beta')}{\beta'^3} - \frac{\sin(e' \beta')}{\beta'^4} \right\} - \left\{ \frac{\cos(e' \beta') - \cos\{(a'+e')\beta'\}}{\beta'^3} \right\} \right] [D_2 e^{-\frac{\beta' x}{D_2}} - D_1 e^{-\frac{\beta' x}{D_1}}] \sin(x \beta') d\beta' \quad (13)$$

座標 x, y 와 모우멘트 荷重에 의한 境界에서의 應力の 作用길이 e', a' 의 값을 無次元化하기 위하여

$$\xi = \frac{x}{a'+e'}, \quad \eta = \frac{y}{a'+e'} \quad (14)$$

$$\beta = (a'+e')\beta' \quad (15)$$

$$a = \frac{a'}{a'+e'}, \quad e = \frac{e'}{a'+e'} \quad (16)$$

라 하면 φ 는 ξ, η 와 a, e 의 項으로 表示할 수 있다.

$$\varphi = \frac{2\sigma_0 (a'+e')^2}{\pi (D_2 - D_1)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{e} \left\{ \frac{e \cos(e \beta)}{\beta^3} - \frac{(a+e) \sin(e \beta)}{\beta^4} \right\} - \left\{ \frac{\cos(e \beta) - \cos \beta}{\beta^3} \right\} \right] [D_2 e^{-\frac{\beta}{D_2} \eta} - D_1 e^{-\frac{\beta}{D_1} \eta}] \sin(\xi \beta) d\beta \quad (17)$$

3. 應力計算

方程式 (17)로 부터 應力을 求하면

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{2\sigma_0}{\pi (D_2 - D_1)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{e'} \left\{ \frac{e' \cos(e \beta)}{\beta} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{(a'+e') \sin(e \beta)}{\beta^2} \right] - \left[\frac{\cos(e \beta) - \cos \beta}{\beta} \right]$$

$$\left[\frac{1}{D_2} e^{-\frac{\beta}{D_2} \eta} - \frac{1}{D_1} e^{-\frac{\beta}{D_1} \eta} \right] \sin(\xi \beta) d\beta \quad (18a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{2\sigma_0}{\pi (D_2 - D_1)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{e'} \left\{ \frac{e' \cos(e \beta)}{\beta} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{(a'+e') \sin(e \beta)}{\beta^2} \right] - \left[\frac{\cos(e \beta) - \cos \beta}{\beta} \right]$$

$$\left[D_2 e^{-\frac{\beta}{D_2} \eta} - D_1 e^{-\frac{\beta}{D_1} \eta} \right] \sin(\xi \beta) d\beta \quad (18b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{2\sigma_0}{\pi (D_2 - D_1)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{e'} \left\{ \frac{e' \cos(e \beta)}{\beta} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{(a'+e') \sin(e \beta)}{\beta^2} \right] - \left[\frac{\cos(e \beta) - \cos \beta}{\beta} \right]$$

$$\left[e^{-\frac{\beta}{D_2} \eta} - e^{-\frac{\beta}{D_1} \eta} \right] \cos(\xi \beta) d\beta \quad (18c)$$

式 (18)을 積分하면

$$\sigma_x = \frac{\sigma_0}{\pi (D_2 - D_1)} \left[\frac{1}{D_2} \left\{ \tan^{-1} \frac{D_2 (\xi + 1)}{\eta} \right. \right.$$

$$\left. + \tan^{-1} \frac{D_2 (\xi - 1)}{\eta} \right] - \frac{1}{L} \left[\tan^{-1} \frac{D_1 (\xi + 1)}{\eta} \right.$$

$$\left. + \tan^{-1} \frac{D_1 (\xi - 1)}{\eta} \right]$$

$$- \frac{1}{D_2} \left(\frac{1}{e} \right) \left\{ (\xi + e) \tan^{-1} \frac{D_2 (\xi + e)}{\eta} \right.$$

$$\left. - (\xi - e) \tan^{-1} \frac{D_2 (\xi - e)}{\eta} \right]$$

$$+ \frac{1}{D_1} \left(\frac{1}{e} \right) \left\{ (\xi + e) \tan^{-1} \frac{D_1 (\xi + e)}{\eta} \right.$$

$$\left. - (\xi - e) \tan^{-1} \frac{D_1 (\xi - e)}{\eta} \right]$$

$$+ \frac{\eta}{2D_2^2} \left(\frac{1}{e} \right) \{ \ln[\eta^2 + D_2^2 (\xi + e)^2]$$

$$- \ln[\eta^2 + D_2^2 (\xi - e)^2] \}$$

$$- \frac{\eta}{2D_1^2} \left(\frac{1}{e} \right) \{ \ln[\eta^2 + D_1^2 (\xi + e)^2]$$

$$\left. - \ln[\eta^2 + D_1^2 (\xi - e)^2] \right] \quad (19a)$$

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_0}{\pi (D_2 - D_1)} \left[D_2 \left\{ \tan^{-1} \frac{D_2 (\xi + 1)}{\eta} \right. \right.$$

$$\left. + \tan^{-1} \frac{D_2 (\xi - 1)}{\eta} \right] - D_1 \left\{ \tan^{-1} \frac{D_1 (\xi + 1)}{\eta} \right.$$

$$\left. + \tan^{-1} \frac{D_1 (\xi - 1)}{\eta} \right]$$

$$- D_2 \left(\frac{1}{e} \right) \left\{ (\xi + e) \tan^{-1} \frac{D_2 (\xi + e)}{\eta} \right.$$

$$\left. - (\xi - e) \tan^{-1} \frac{D_2 (\xi - e)}{\eta} \right]$$

$$+ D_1 \left(\frac{1}{e} \right) \left\{ (\xi + e) \tan^{-1} \frac{D_1 (\xi + e)}{\eta} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -(\xi-e) \tan^{-1} \frac{D_1(\xi-e)}{\eta} \\
& + \frac{\eta}{2} \left(\frac{1}{e} \right) \{ \ln[\eta^2 + D_2^2(\xi+e)^2] \\
& - \ln[\eta^2 + D_2^2(\xi-e)^2] \} \\
& - \frac{\eta}{2} \left(\frac{1}{e} \right) \{ \ln[\eta^2 + D_1^2(\xi+e)^2] \\
& - \ln[\eta^2 + D_1^2(\xi-e)^2] \} \quad (19b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \frac{\sigma_0}{\pi(D_2-D_1)} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_2} \right)^2 + (\xi+1)^2 \right] \right. \right. \\
& + \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_2} \right)^2 + (\xi-1)^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_1} \right)^2 + (\xi+1)^2 \right] \right. \\
& + \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_1} \right)^2 + (\xi-1)^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} \right) \left\{ (\xi+e) \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_2} \right)^2 + (\xi+e)^2 \right] \right. \\
& - (\xi-e) \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_2} \right)^2 + (\xi-e)^2 \right] \} \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} \right) \left\{ (\xi+e) \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_1} \right)^2 + (\xi+e)^2 \right] \right. \\
& - (\xi-e) \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_1} \right)^2 + (\xi-e)^2 \right] \} \\
& + \frac{\eta}{D_2} \left(\frac{1}{e} \right) \left\{ \tan^{-1} \frac{D_2(\xi+e)}{\eta} - \tan^{-1} \frac{D_2(\xi-e)}{\eta} \right\} \\
& - \frac{\eta}{D_1} \left(\frac{1}{e} \right) \left\{ \tan^{-1} \frac{D_1(\xi+e)}{\eta} - \tan^{-1} \frac{D_1(\xi-e)}{\eta} \right\} \quad (19c)
\end{aligned}$$

4. 彈性 모멘트荷重의 경우의 解析

異方性 構造體의 境界에 모멘트荷重이 作用할 경우 이 모멘트荷重에 依한 構造體의 境界線에서의 垂直應力이 材料의 彈性과 塑性領域에 있을 경우의 모멘트荷重일 경우 構造體 内部에 發生하는 垂直 및 剪斷應力을 나타내는 式 (19)를 彈性領域일 경우 즉 彈性모멘트荷重일 경우의 應力들을 나타내는 式으로 變換시킬 수 있다. 式 (19)에서 $e=1$ 로 하고 정리하면 應力들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma_x = & \frac{\sigma_0}{\pi(D_2-D_1)} \left[\frac{1}{D_2} \left\{ \tan^{-1} \frac{D_2(\xi+1)}{\eta} \right. \right. \\
& + \tan^{-1} \frac{D_2(\xi-1)}{\eta} \} \\
& - \frac{1}{D_1} \left\{ \tan^{-1} \frac{D_1(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1} \frac{D_1(\xi-1)}{\eta} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{D_2} \left\{ (\xi+1) \tan^{-1} \frac{D_2(\xi+1)}{\eta} \right. \\
& - (\xi-1) \tan^{-1} \frac{D_2(\xi-1)}{\eta} \} \\
& + \frac{1}{D_1} \left\{ (\xi+1) \tan^{-1} \frac{D_1(\xi+1)}{\eta} \right. \\
& - (\xi-1) \tan^{-1} \frac{D_1(\xi-1)}{\eta} \} \\
& + \frac{\eta}{2D_2^2} \{ \ln[\eta^2 + D_2^2(\eta+1)^2] \\
& - \ln[\eta^2 + D_2^2(\eta-1)^2] \} \\
& - \frac{\eta}{2D_1^2} \{ \ln[\eta^2 + D_1^2(\xi+1)^2] \\
& - \ln[\eta^2 + D_1^2(\xi-1)^2] \} \quad (20a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & \frac{\sigma_0}{\pi(D_2-D_1)} \left[D_2 \left\{ \tan^{-1} \frac{D_2(\xi+1)}{\eta} \right. \right. \\
& + \tan^{-1} \frac{D_2(\xi-1)}{\eta} \} \\
& - D_1 \left\{ \tan^{-1} \frac{D_1(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1} \frac{D_1(\xi-1)}{\eta} \right\} \\
& - D_2 \left\{ (\xi+1) \tan^{-1} \frac{D_2(\xi+1)}{\eta} \right. \\
& - (\xi-1) \tan^{-1} \frac{D_2(\xi-1)}{\eta} \} \\
& + D_1 \left\{ (\xi+1) \tan^{-1} \frac{D_1(\xi+1)}{\eta} \right. \\
& - (\xi-1) \tan^{-1} \frac{D_1(\xi-1)}{\eta} \} \\
& + \frac{\eta}{2} \{ \ln[\eta^2 + D_2^2(\xi+1)^2] \\
& - \ln[\eta^2 + D_2^2(\xi-1)^2] \} \\
& - \frac{\eta}{2} \{ \ln[\eta^2 + D_1^2(\xi+1)^2] \\
& - \ln[\eta^2 + D_1^2(\xi-1)^2] \} \quad (20b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \frac{\sigma_0}{\pi(D_2-D_1)} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_2} \right)^2 + (\xi+1)^2 \right] \right. \right. \\
& + \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_2} \right)^2 + (\xi-1)^2 \right] \} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_1} \right)^2 + (\xi+1)^2 \right] \right. \\
& + \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_1} \right)^2 + (\xi-1)^2 \right] \} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ (\xi+1) \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_2} \right)^2 + (\xi+1)^2 \right] \right. \\
& - (\xi-1) \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_2} \right)^2 + (\xi-1)^2 \right] \} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ (\xi+1) \ln \left[\left(\frac{\eta}{D_1} \right)^2 + (\xi+1)^2 \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\xi-1)\ln\left[\left(\frac{\eta}{D_1}\right)^2+(\xi-1)^2\right] \\
& +\frac{\eta}{D_2}\left[\tan^{-1}\frac{D_2(\xi+1)}{\eta}-\tan^{-1}\frac{D_2(\xi-1)}{\eta}\right] \\
& -\frac{\eta}{D_1}\left[\tan^{-1}\frac{D_1(\xi+1)}{\eta}-\tan^{-1}\frac{D_1(\xi-1)}{\eta}\right] \\
& +\ln\left[\left(\frac{\eta}{D_2}\right)^2+(\xi-1)^2\right] \\
& -\frac{1}{2}\left[\ln\left[\left(\frac{\eta}{D_1}\right)^2+(\xi+1)^2\right]\right. \\
& \left.+\ln\left[\left(\frac{\eta}{D_1}\right)^2+(\xi-1)^2\right]\right] \quad (21c)
\end{aligned}$$

이상에서 보는 바와 같이 彈性 모멘트荷重의 경우의 解析은 式 (20), 彈性과 塑性 모멘트荷重일 경우의 解析은 式 (19)에, 極限 모멘트荷重의 경우 解析은 式 (21)에 提示되어 있다.

6. 等方性 경우와의 關係

等方性인 경우의 解析은 異方性인 경우의 解析의 特別한 경우로 고려될 수 있으므로 本 異方性인 경우의 모든 方程式들은 異方性的 常數들을 等方性的 常數들로 代치할 경우 그대로 等方解인 경우로 誘導되어야 한다.

方程式 (4a)와 (4b)에서 만약 D_1 과 D_2 를 1로 놓으면 異方性인 경우의 方程式들은 等方性인 경우의 方程式들로 變換되어야 하는 것을 알고 있다. 式 (19)에서 보는 바와 같이 $D_1=D_2=1$ 일 경우 異方性的 方程式들은 不定形으로 된다. 이러한 不定形은 L'hospital의 法則에 의하여 그 式의 分母와 分子를 各各 D_1 혹은 D_2 에 의하여 微分하여 1을 代代入하면, 즉 (19a)에서 $D_1=1$ 을 代代入하고 D_2 에 의하여 微分하고 $D_2=1$ 을 代代入하여 정리하면 應力 σ_x 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma_x \Big|_{\substack{D_1=1 \\ D_2=1}} &= -\frac{\sigma_0}{\pi} \left[\left[\tan^{-1}\frac{(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1}\frac{(\xi-1)}{\eta} \right] \right. \\
& -\frac{1}{e} \left[(\xi+e)\tan^{-1}\frac{(\xi+e)}{\eta} - \eta\ln[\eta^2+(\xi+e)^2] \right. \\
& \left. - \eta\ln[\eta^2+(\xi+e)^2] - (\xi-e)\tan^{-1}\frac{(\xi-e)}{\eta} \right. \\
& \left. + \eta\ln[\eta^2+(\xi-e)^2] \right] \\
& - \left[\frac{\eta(\xi+1)}{\eta^2+(\xi+1)^2} + \frac{\eta(\xi-1)}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] \quad (22a)
\end{aligned}$$

같은 方法으로 (19b)와 (19c)를 變換하면 다음과 같다.

$$\sigma_y \Big|_{\substack{D_1=1 \\ D_2=1}} = -\frac{\sigma_0}{\pi} \left[\left[\tan^{-1}\frac{(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1}\frac{(\xi-1)}{\eta} \right] \right.$$

5. 極限 모멘트荷重의 경우의 解析

모멘트荷重이 極限모멘트荷重일 경우의 異方性 構造體의 解析은 式 (19)에서 $e=0$ 로 하고 式을 정리하면 얻을 수 있다. 그런데 $e=0$ 로 함으로서 不定形이 發生하게 된다. 이러한 不定形은 L'hospital의 法則에 의하여 그 式의 分母와 分子를 各各 e 에 依하여 微分하여 1을 代代入하면, 즉 式 (19a)에 $e=0$ 을 代代入하면 應力은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma_x \Big|_{e=0} &= -\frac{2\sigma_0}{\pi(D_2-D_1)} \left[\frac{1}{D_2} \tan^{-1}\frac{D_2\xi}{\eta} \right. \\
& -\frac{1}{D_1} \tan^{-1}\frac{D_1\xi}{\eta} - \frac{1}{2} \left[\tan^{-1}\frac{D_2(\xi+1)}{\eta} \right. \\
& \left. + \tan^{-1}\frac{D_2(\xi-1)}{\eta} \right] \\
& \left. + \frac{1}{2D_1} \left[\tan^{-1}\frac{D_1(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1}\frac{D_1(\xi-1)}{\eta} \right] \right]
\end{aligned}$$

같은 方法으로 式 (19b) 및 式 (19c)를 變換하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma_y \Big|_{e=0} &= \frac{2\sigma_0}{\pi(D_2-D_1)} \left[D_2 \tan^{-1}\frac{D_2\xi}{\eta} - D_1 \tan^{-1}\frac{D_1\xi}{\eta} \right. \\
& -\frac{D_2}{2} \left[\tan^{-1}\frac{D_2(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1}\frac{D_2(\xi-1)}{\eta} \right] \\
& \left. + \frac{D_1}{2} \left[\tan^{-1}\frac{D_1(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1}\frac{D_1(\xi-1)}{\eta} \right] \right] \quad (21b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} \Big|_{e=0} &= -\frac{\sigma_0}{\pi(D_2-D_1)} \left[\ln\left[\left(\frac{\eta}{D_1}\right)^2+\xi^2\right] \right. \\
& -\ln\left[\left(\frac{\eta}{D_2}\right)^2+\xi^2\right] \\
& \left. + \frac{1}{2} \left[\ln\left[\left(\frac{\eta}{D_2}\right)^2+(\xi+1)^2\right] \right. \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{e} \left[(\xi+e) \tan^{-1} \frac{(\xi+e)}{\eta} - (\xi-e) \tan^{-1} \frac{(\xi-e)}{\eta} \right] + \left[\frac{\eta(\xi+1)}{\eta^2+(\xi+1)^2} + \frac{\eta(\xi-1)}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] \quad (22b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0}{D_1=1} \frac{\pi}{\pi} \left[\left[\frac{\eta^2}{\eta^2+(\xi+1)^2} - \frac{\eta^2}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] - \frac{\eta}{e} \left[\tan^{-1} \frac{(\xi+e)}{\eta} - \tan^{-1} \frac{(\xi-e)}{\eta} \right] \right] \quad (22c)$$

異方性 構造體에 作用하는 모우멘트荷重이 彈性荷重狀態의 式 (20)과 極限모우멘트荷重狀態의 式 (21)도 같은 方法으로 變換하면 다음과 같다.

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_0}{D_2=1} \frac{\pi}{\pi} \left[\left[\tan^{-1} \frac{(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1} \frac{(\xi-1)}{\eta} \right] - \left[(\xi+1) \tan^{-1} \frac{(\xi+1)}{\eta} - (\xi-1) \tan^{-1} \frac{(\xi-1)}{\eta} \right] + \eta \left[\ln[\eta^2+(\xi+1)^2] - \ln[\eta^2+(\xi-1)^2] \right] - \left[\frac{\eta(\xi+1)}{\eta^2+(\xi+1)^2} + \frac{\eta(\xi-1)}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] \right] \quad (23a)$$

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_0}{D_1=1} \frac{\pi}{\pi} \left[\left[\tan^{-1} \frac{(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1} \frac{(\xi-1)}{\eta} \right] - \left[(\xi+1) \tan^{-1} \frac{(\xi+1)}{\eta} - (\xi-1) \tan^{-1} \frac{(\xi-1)}{\eta} \right] + \left[\frac{\eta(\xi+1)}{\eta^2+(\xi+1)^2} + \frac{\eta(\xi-1)}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] \right] \quad (23b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_0}{D_2=1} \frac{\pi}{\pi} \left[\eta \left[\tan^{-1} \frac{(\xi+1)}{\eta} - \tan^{-1} \frac{(\xi-1)}{\eta} \right] \right]$$

$$-\left[\frac{\eta^2}{\eta^2+(\xi+1)^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] \quad (23c)$$

$$\sigma_x = \frac{2\sigma_0}{D_1=1} \frac{\pi}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi\eta}{\eta^2+\xi^2} - \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1} \frac{(\xi-1)}{\eta} \right] - \frac{\eta(\xi+1)}{\eta^2+(\xi+1)^2} - \frac{\eta(\xi-1)}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] \quad (24a)$$

$$\sigma_y = \frac{2\sigma_0}{D_2=1} \frac{\pi}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{\xi}{\eta} + \frac{\xi\eta}{\eta^2+\xi^2} - \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{(\xi+1)}{\eta} + \tan^{-1} \frac{(\xi-1)}{\eta} \right] + \frac{\eta(\xi+1)}{\eta^2+(\xi+1)^2} + \frac{\eta(\xi-1)}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] \quad (24b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2\sigma_0}{D_1=1} \frac{\pi}{\pi} \left[\frac{\eta^2}{\eta^2+\xi^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\eta^2}{\eta^2+(\xi+1)^2} + \frac{\eta^2}{\eta^2+(\xi-1)^2} \right] \right] \quad (24c)$$

等方性인 경우의 式 (22), (23), (24)는 이미 얻은 자료(참고문헌 27, p.36~940의 (3.1), (3.4), (3.9) 方法을 利用하여 증첩의 원리를 적용한 값과 형태는 다르나 정확하게 일치하고 있음을 알 수 있다.

7. 數值解析 및 結果檢討

異方性 構造體에 모멘트荷重이 作用할 경우의 應力을 求하는 단일解가 簡單한 形態로 誘導되었다. 이 結果는 어떠한 점에서든 정확한 값을 求할 수 있는 간결한 解이다. 一般적으로 彈塑性解析은 복잡한 과정을 거쳐 解를 求하게 되는데 本 解法은 彈性 모멘트荷重으로 부터 極

表 1. 合板의 異方性 常數

木材의 幻類		彈 性 常 數				異 方 性 常 數	
		$E_x \times 10^6 \text{psi}$	$E_y \times 10^6 \text{psi}$	ν_x	$G \times 10^6 \text{psi}$	D_1	D_2
三段合板	x-強軸	1.71	0.85	0.036	0.1	0.25	3.0
	y-強軸	0.85	1.71	0.07	0.1	0.34	4.12
重疊合板	x-強軸	4.3	0.67	0.02	0.31	0.872	1.415
	y-強軸	0.67	4.3	0.031	0.31	0.71	3.62

* 이 값은 Lekhnitskii의 저술에서 引用한 값들이다.

** $D_1^2 D_2^2 = \frac{C_{11}}{C_{22}} = \frac{E_y}{E_x} : D_1^2 + D_2^2 = \frac{2C_{12} + C_{66}}{C_{22}} = \frac{E_y}{G} - 2\nu_x$

表 2. 鐵筋콘크리트와 鋼補強板의 異方性常數

構造別	彈 性 常 數			異 方 性 常 數
	D_x	D_y	T	D_1 혹은 D_2
鐵筋콘크리트	$\frac{1}{1-\nu^2} + \frac{\eta A_{xx}}{t f_y}$	$\frac{1}{1-\nu^2} + \frac{\eta A_{yy}}{t f_x}$	$2(1-\nu) \left[D_x D_y - \frac{\nu}{(1-\nu^2)^2} \right]$	$D_1, D_2 = \left[\frac{T}{D_x} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{D_x} \right)^2 - D_y} \right]^{\frac{1}{2}}$
鋼 補 強 板	$\frac{1}{1-\nu^2} + \frac{a_x}{t f_y}$	$\frac{1}{1-\nu^2} + \frac{a_y}{t f_x}$	$2(1+\nu) \left[D_x D_y - \frac{\nu}{(1-\nu^2)^2} \right]$	$D_1, D_2 = \left[\frac{T}{D_x} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{D_x} \right)^2 - D_y} \right]^{\frac{1}{2}}$

限 모멘트荷重까지 全過程을 解析的인 方法으로 構造體 内部에 發生하는 垂直 및 剪斷應力을 簡單하고 正確한 方法으로 求할 수 있는 解法을 제시 하였다.

異方性 構造體의 異方性 常數들은 木材를 위 시하여 鐵筋콘크리트와 補強材로 補強된 鋼構造를 例를 들어 다음과 같이 圖表化하였다.

表 2에서 異方性 常數 D_1, D_2 는 實數이며

같은 값이어서는 안된다. 그리고 항상 陽의 數에만 고려될 수 있다. 그리고 a_x, a_y 는 要素의 x 및 y 方向으로의 補強材의 斷面積이고 f_x, f_y 는 板要素의 x 및 y 方向으로의 幅이다. t 는 板要素의 두께이고 A_{xx}, A_{yy} 는 x 및 y 方向으로의 要素의 鐵筋量이고 ν 는 材料의 포아손比이다.

위의 表 1, 2에서 異方性 常數들을 式 (19),

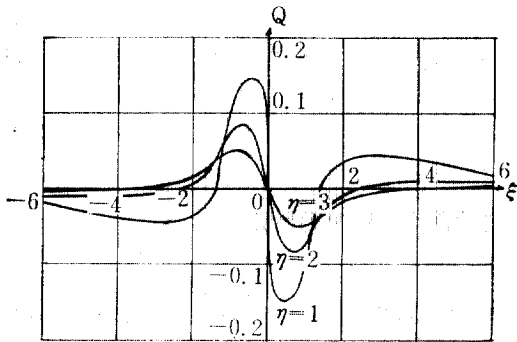


그림 2. 垂直應力 $\sigma_x = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 分布圖 (x -強軸)

$D_1=0.25, D_2=3.0, e=0.5, a=0.5$

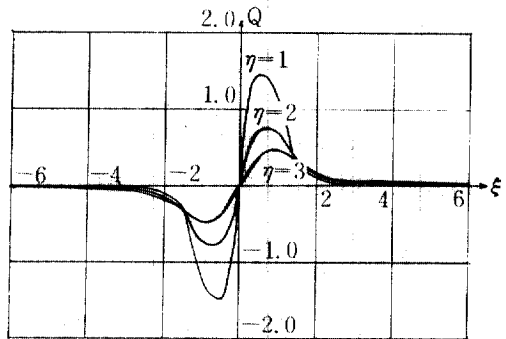


그림 3. 垂直應力 $\sigma_y = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 分布圖 (x -強軸)

$D_1=0.25, D_2=3.0, e=0.5, a=0.5$

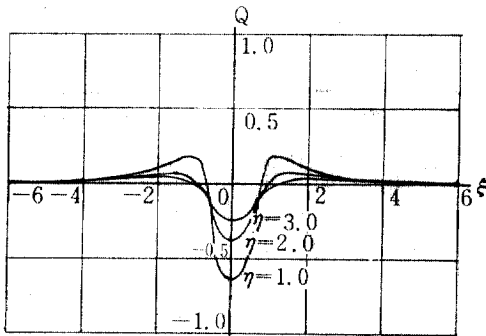


그림 4. 剪斷應力 $\tau_{xy} = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 分布圖 (x -強軸)

$D_1=0.25, D_2=3.0, e=0.5, a=0.5$

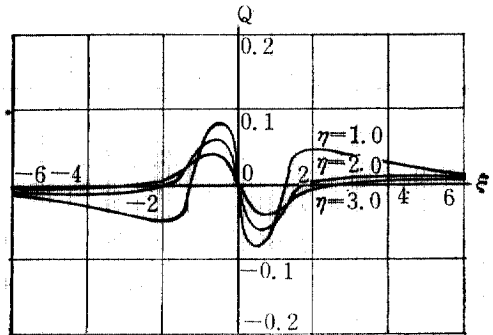


그림 5. 垂直應力 $\sigma_x = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 分布圖 (y -強軸)

$D_1=0.34, D_2=4.12, e=0.5, a=0.5$

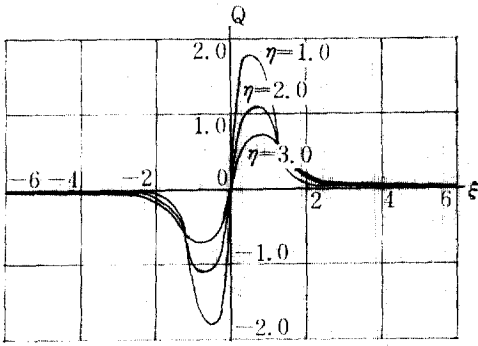


그림 6. 垂直應力 $\sigma_y = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 力時布圖 (y-強軸)
 $D_1=0.34, D_2=4.12, e=0.5, a=0.5$

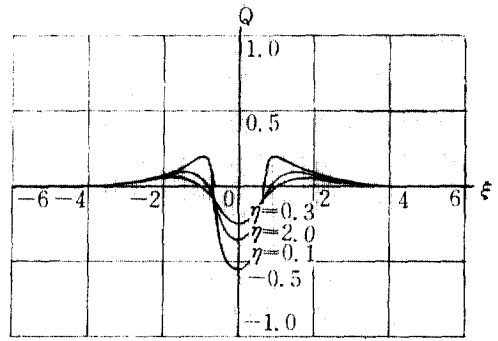


그림 7. 剪斷應力 $\tau_{xy} = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 分布圖 (y-強軸)
 $D_1=0.34, D_2=4.12, e=0.5, a=0.5$

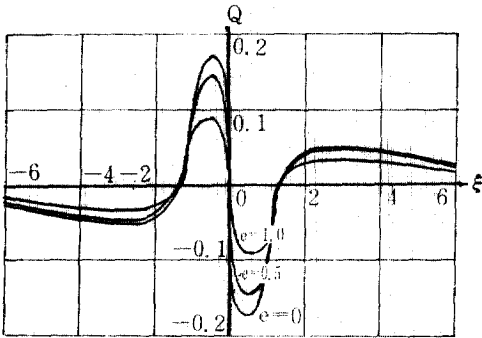


그림 8. 垂直應力 $\sigma_x = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 分布圖 (x-強軸)
 $D_1=0.25, D_2=8.0, \eta=1.0$

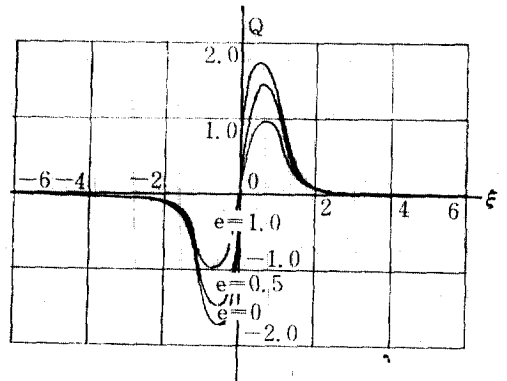


그림 9. 垂直應力 $\sigma_y = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 分布圖 (x-強軸)
 $D_1=0.25, D_2=3.0, \eta=1.0$

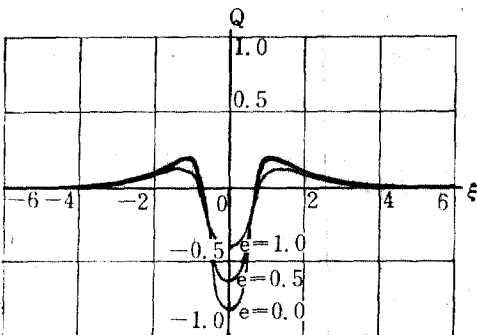


그림 10. 剪斷應力 $\tau_{xy} = \left(\frac{\sigma_0}{\pi}\right)Q$ 分布圖 (x-強軸)
 $D_1=0.25, D_2=3.0, \eta=1.0$

(20) 및 (21)에 代入하여 求하던 異方性 構造體의 內部에 發生하는 垂直 및 剪斷應力을 求할 수

있다. 圖表의 變換성을 피하기 위하여 三段合板을 例를 들어 材料의 強軸을 바꾸어 가며 應力들을 求한 값을 圖表化하면 그림 2~7과 같고 降伏 모멘트荷重의 경우와 極限 모멘트荷重의 경우의 應力을 比較하여 圖表化한 그림은 그림 8, 9, 10과 같다.

그림 2~7에서 보는 바와 같이 強軸에 方向에 따라 應力의 크기와 分布狀態가 현저하게 변화됨을 알 수 있다.

8. 結 論

本 論文은 異方性 構造體의 境界에 모멘트 荷重이 局部의 作用할 境遇의 應力을 求하는 解法을 提示하였다. 構造體 內部의 任意點에

發生하는 垂直 및 剪斷應力을 나타내는 正確한 公式을 誘導하였을 뿐만 아니라 數値解析을 하여 圖表로서 表示하였다.

本 論文에서 제시한 解法의 妥當性을 證明하기 위하여 異方性 構造體의 解法이 等方性 構造體의 解法으로 變換되었는가를 檢討하였고 그 값이 이미 발표된 資料의 값들과 일치되는가를 檢討하였다. 그 結果 일치된 結果를 얻었다. 따라서 本解法의 妥當性이 證明되었다고 할 수 있다. 異方性 材料를 例를 들어 木材를 위시하여 廣義의 異方性 構造體로 고려될 수 있는 補強材로 直交하는 方向으로 배열되어 補強된 補強板과 鐵筋이 直交하는 方向으로 배열된 鐵筋 콘크리트 板을 例를 들어 異方性 常數들을 求하였고 圖表는 번거로움을 피하기 위하여 木材를 例를 들어 強軸을 달리하며 數値解析을 하여 圖表化하였다. 그 結果 強軸의 方向에 따라 應力의 크기와 變化狀態가 현저하게 달라짐을 알 수 있다. 따라서 異方性 材料나 補強材로 補強된 補強板이나 鐵筋콘크리트板에서의 材料의 合理的인 배치는 構造工學的으로 重要한 問題의 하나이고 構造的인 舉動에도 많은 影響을 줌을 알 수 있다.

謝 辭

本 研究는 韓國科學財團의 研究 支援으로 이루어진 것임

記 號

- a' : 모우멘트荷重에 의한 境界에서의 塑性領域의 길이의 半
- e' : 모우멘트荷重에 의한 境界에서의 彈性領域의 길이의 半
- a : 無次元量으로 表示된 塑性領域의 길이의 半
- e : 無次元量으로 表示된 彈性領域의 길이의 半
- σ_0 : 모우멘트荷重에 의한 境界에서의 最大應力
- C_{ij} : 異方性 彈性常數
- D_1, D_2 : 異方性 常數
- E, E_x, E_y, G : 彈性係數
- β, β' : Fourier 積分의 振動數
- ξ, η : 無次元 直交座標系
- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: 垂直 및 剪斷應力
- ν, ν_x, ν_y : 포아손 比
- ϕ : Airy 應力函數

참 고 문 헌

1. Boussinesq, J., *Compt. rend.*, Vol. 114, 1892, p. 1510.
2. Coker, E.G. and Filon, L.N.G., *A Treatise on Photo-Elasticity*, Cambridge, the University Press, 1931.
3. Conway, H.D., "Some Problems of Orthotropic plane Stress," *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, Vol. 75, 1953, pp. 72~76.
4. Filon, L.N.G., *Trans. Roy. Soc. (London), Series A*, Vol. 201, 1906, p. 63.
5. Flamant, J., *Compt. rend.*, Vol. 114, Paris, 1892, p. 1465.
6. Green, A.E., "Stress System in Aeolotropic Plates, Part 2," *Proceedings Royal Society of London*, Vol. 173, 1939, pp. 173~192.
7. Green, A.E., and Taylor, G.I., "Stress System in Aeolotropic Plates, Part 1," *Proceedings Royal Society of London*, Vol. 173, 1939, pp. 173~192.
8. Green, A.E., and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*. Oxford, Clarendon Press, 1954.
9. Hashin, Z., "Plane Anisotropic Beams," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, *Trans. ASME, Series E.*, June 1967, pp. 257~262.
10. Hooley, Roy F., and Hibbert, P.D., "Stress Concentration in Timber Beams," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 93, No. ST3, April, 1967, pp. 127~139.
11. Howland, R.C.J., *Proceeding of Royal Society, Series A*, Vol. 124, p. 89.
12. Karman, Th. V., *Abhandl. Aerodynam. Inst., Tech. Hochschule, Aachen*, Vol. 7, 1927, pp. 1~11.
13. Lamb, H., *Atti IV Congr. intern. matemat.* Vol. 3, Rome, 1909, pp. 1~6.
14. Lang, H.A., "The Affine Transformation for Orthotropic Plane-Stress and Plane-Strain Problems," *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, Vol. 78, March, 1956, pp. 1~6.
15. Lekhnitskii, S.G., *San Francisco*, Hoden Day, Inc., 1963.
16. Love, A.E.H., *The Mathematical Theory of*

- Elasticity*, Fourth Edition. Cambridge, England, University Edition, 1934.
17. Mitchell, J.H., *Proceeding London Mathematical Society*, Vol. 32, p. 35(n.d.)
 18. Seewald, F., *Abhandl. Aerodynam. Inst., Tech. Hochschule, Aachen*, Vol. 7, 1927, pp. 11~33.
 19. Silverman, I.K., "Orthotropic Beams Under Polynomial Loads," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 90, No. EM5, October, 1964, pp. 293~319.
 20. J.B. Chulsoo Yu, "Local Effects of a Concentrated Load Applied to Orthotropic Beams," *Journal of Franklin Institute*, Vol. 296, No. 3, Sept, 1973.
 21. Timoshenko, S., *Theory of Elasticity*, First Edition, McGraw Hill Book Company, New York, 1834.
 22. Timoshenko, S, and J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.
 23. 劉哲秀 "Wilson-Stokes 問題의 解法" 大韓土木學會 20 주년기념論文集 1972.
 24. Goodman, J.R., and Bodig, Jozsef, "Orthotropic Elastic Properties of Wood", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Nov., 1970.
 25. Thompson, E.G., Goodman, J.R. and Vanderbilt, M.D., "Finite Element Analysis of layered Wood Systems," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Dec., 1957.
 26. Yu, J. Chulsoo and Chang, Suk Yoon, "The Stress Distributions of a Partial Uniform Load Applied to Timber," 11th Congress Vienna, IABSE, Sep., 1980.
 27. Poulos, H.G., and Davis, E.H., *Elastic solutions for soil and Rock Mechaniss*, John Wiley and sons, INC., Newyork, 1973.
 28. Chang, S.Y., "Analysis of Orthotropic Body under Partial-Uniform shear Load". 大韓土木學會論文集 第 4 卷 1 號 1984.

(接受 : 1985. 7. 23)