

一軸 壓縮을 받는 板의 有限帶板法에 의한 幾何學的 非線形 解析

Geometrically Nonlinear Analysis of Plates Subjected
to Uniaxial Compression by Finite Strip Method

李 榕 才
Lee, Yong Jae

Abstract

For the finite deflection analysis of plates with initial deflections subjected to uniaxial compression, the formulation of incremental finite strip method is made and has been incorporated into a computer program.

A new in-plane displacement function varying along the load direction has been derived from the out-of-plane displacement function by considering the curvature of a plate.

Either incremental load type analysis or incremental displacement type analysis may be selected to solve incremental equilibrium equations in the program.

The following results have been obtained:

1. Incremental displacement type analysis is superior to incremental load type analysis in that the former converges more rapidly than the latter.

2. The finite strip method using the new displacement function gives as accurate results as analytical method and other finite element methods.

要 旨

初期처짐을 가지는 平板이 一軸面內壓縮荷重을 받을 때의 거동을 살피기 위하여 새로운 變位函數를 導入한 有限帶板法을 定式化하고, 이 理論에 따라 컴퓨터 프로그램을 編成하여 여러 경우에 대한 平板의 거동을 計算하고 이미 발표된 結果와 비교해 보았는데 그 요점은 다음과 같다.

1. Curvature effect를 고려하여 面外變位함수로부터 유도한 식을 참고로 하여 새로운 面內變位함수를 가정하고 이것을 帶板要素의 變位함수로 사용한 有限帶板法을 定式化하였다.

2. 위에서 定式化한 有限帶板法에 따라 編成한 프로그램을 써서 수치해석한 결과 變位增分方式이 荷重增分方式보다 수렴이 빨랐다.

3. 一軸壓縮을 받는 平板을 여러 경우에 대해 위의 방법으로 해석한 결과는 解析의 方法이나 Crisfield⁽⁹⁾에 의한 有限要素法으로 얻어진 결과와 잘 일치 하였다. 따라서 위의 방법은 평판의 비선형 해석을 위한 하나의 유용한 방법으로 생각된다.

1. 序 論

1969년 오스트리아의 Fourth Daube Bridge

를 비롯하여 1970년 영국의 Milford Haven Road Bridge, 오스트랄리아의 West Gate Bridge, 1971년 독일의 Rhine River Bridge 등의 많은 鋼箱桁橋의 大사고가 연달아 일어났고 이 사고의 중

*正會員 · 建國大學校 工科大學 副敎授, 土木工學科

요한 원인중의 하나가 압축 프렌지의 파괴이었는데 밝혀졌다^(4,5).

箱桁(box-girder)과 같은 鎔接構造物에는 初期 처짐(initial deflection)이나 殘留應力(residual stress)과 같은 初期不整(initial imperfections)이 불가피하게 존재한다.

그러나 종래의 挫屈理論에서는 이러한 初期不整이 없는 理想的인 構造物을 대상으로 해 왔으며 DIN 4114의 規定을 비롯한 여러 나라의 대부분의 교량에 관한 설계시방서 규정들은 이 彈性挫屈理論에 의한 解析結果에 근거를 두고 있었다. 따라서 여러 나라에서는 압축프렌지에 대한 理論的 및 實驗的 研究과 箱桁橋의 壓縮프렌지에 관한 示方書規定의 개정작업이 활발히 진행되어 왔다^(4,5).

理論的인 연구로는 1951년 Coan⁽⁶⁾을 비롯하여 Dawson⁽⁷⁾, Rhodes⁽⁸⁾ 등은 初期처짐을 가진 平板의 거동을 大變形理論에 의해 해석하였으며 Crisfield⁽⁹⁾와 小松定夫⁽¹⁰⁾ 등은 有限要素法에 의해 壓縮板을 解析하였다.

本研究에서는 増分理論과 有限帶板法에 의해 初期처짐을 가진 단순지지된 평판의 幾何學的 非線形解析을 수행하고자 한다.

2. 増分理論

増分理論^(1,11)은 有限要素法과 結付되어 非線形問題의 解析에 가장 有用한 方法으로 평가되고 있다.

荷重增加經路를 여러 단계의 平衡狀態로 나누어 Ω^N 을 基準狀態(reference state), Ω^{N+1} 을 現在狀態(current state)라 하고 Ω^N 에서 Ω^{N+1} 로 변하는 과정을 생각해 본다.

Ω^{N+1} 상태는 Ω^N 상태에 매우 가까우며 따라서 支配方程式이 増分量에 대해 線形으로 表示될 수 있다는 가정하에 Ω^N 상태에서의 모든 변수, 즉 應力, 變形度 및 變位를 알고 Ω^{N+1} 상태에서의 모든 변수를 구하는 増分理論을 가상일의 원리에 의해 公式化 할 수 있다.

Ω^N 상태에서의 Green strain tensor를 e_{ij} 라 하고 變形度増分을 Δe_{ij} 라 하면

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (1)$$

$$\Delta e_{ij} = \Delta e_{ij} + \frac{1}{2}\Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j} \quad (2)$$

여기서

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,i}\Delta u_{k,j} + u_{k,j}\Delta u_{k,i}) \quad (3)$$

$u_i, \Delta u_i; i=1,2,3$ 은 變位 및 變位増分을 表示하고 $(\)_{,i}$ 는 x_i 에 관한 微分을 表示한다.

Ω^N 상태에서의 應力 및 表面力을 σ_{ij}, f_i 로 表示하고 그의 増分을 $\Delta\sigma_{ij}, \Delta f_i$ 로 表示하면 Ω^{N+1} 상태에서의 假想일의 原理는 다음과 같이 된다^(1,11).

$$\int (\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij})\delta\Delta e_{ij}dV - \int (f_i + \Delta f_i)\delta\Delta u_i ds = 0 \quad (4)$$

위의 식에 (2) 및 (3)식을 대입하여 미소항을 무시하고 정리하면 다음과 같이 된다⁽¹⁰⁾.

$$\int \Delta\sigma_{ij}\delta\Delta e_{ij}dV + \int \sigma_{ij}\delta\left(\frac{1}{2}\Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j}\right)dV = \int \Delta f_i\delta\Delta u_i ds + \delta w_r \quad (5)$$

여기서

$$\delta w_r = \int f_i\delta\Delta u_i ds - \int \sigma_{ij}\delta\Delta e_{ij}dV \quad (6)$$

δw_r 는 Ω^N 상태에서 應力 σ_{ij} 와 表面力 f_i 가 完全平衡狀態에 있다면 零이 되나 微小高次項의 생략과 수치계산의 부정확으로 일반적으로 完全平衡狀態에 있지 않아 零이 안된다. 이것은 Newton Raphson法에서 反復回數를 一回한 것과 마찬가지이다.

3. 變位函數와 剛度行列

3.1 平板의 有限變形理論과 増分

Karmen⁽¹⁾에 의한 平板의 有限變形理論은 다음과 같은 假定에서부터 出發한다.

가정 1: 變形前의 中立面에 수직한 線素는 變形後에도 中立面에 수직한 直線이며 길이에 수화가 없다(Kirchhoff 가정)

가정 2: 平板의 처짐은 그 두께에 비해서는 작지 않으나 폭이나 길이에 비해서는 아주 작다.

좌표축을 그림 1와 같이 잡으면 가정 1에 의해 임의점의 변위 U, V, W 는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$$

$$W(x, y, z) = w(x, y) \quad (7)$$

여기서 $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ 는 中立面上의 임의점의 x, y, z 方向의 변위이다.

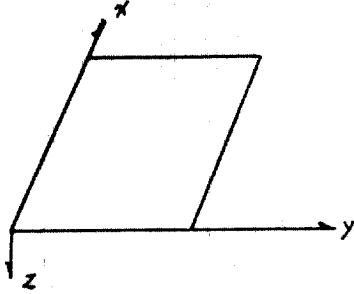


그림 1. 좌 표 축

(1) 및 (7)식과 $\gamma_{ij} = 2e_{ij}$ 로부터 平板에 대해 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$e_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (8)$$

變形度增분에 대한 식도 같은 方法으로 유도할 수 있다. 즉 (3)식으로부터

$$\Delta e_x = \frac{\partial \Delta u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x}$$

$$\Delta e_y = \frac{\partial \Delta v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

$$\Delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x}$$

$$\Delta e_z = \Delta \gamma_{yz} = \Delta \gamma_{xz} = 0 \quad (9)$$

Hook의 法則에 의해 應力增분은 다음과 같이 된다.

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \{\Delta \epsilon\} \quad (10)$$

여기서

$$\{\Delta \sigma\} = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta \epsilon\} = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (11)$$

또한 E 는 Young 係數, ν 는 Poisson 비이다.

3.2 要素의 變位函數

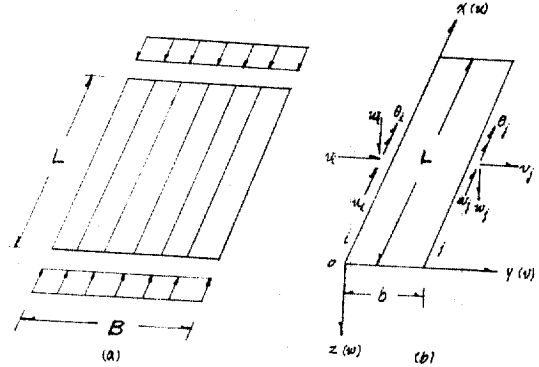


그림 2. 帶板要素

그림 2와 같이 面內荷重을 받는 폭이 B 이고 길이 L 인 단순지지된 平板을 帶板要素(strip elements)로 나누고 한 요소에 대한 좌표계를 板의 中立面に 잡는다.

要素의 한 節線을 i , 다른 節線을 j 라 하면 인접한 要素의 변위가 연속이 되도록 節線上의 變位를 定義한다. 여기서는 이러한 節線變位를 u, v, w, θ 의 4成分으로 잡고 θ 는 x 축 주위의 회전각을 表示한다.

1) 面外變位函數

面外變位 즉 z 方向의 變位 $w(x, y)$ 의 境界조건은 다음과 같다.

$$x=0, L \text{ 에서 ; } w=0$$

$$y=0 \text{ 에서 ; } w=w_i, \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_i$$

$$y=b \text{ 에서 ; } w=w_j, \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_j \quad (12)$$

위의 조건을 만족시키는 變位函數를 다음과 같이 쓸 수 있다^(3,12).

$$w = \sum_{i=1,2} \left[\left(1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3} \right) w_{in} + \left(\frac{y}{b} - \frac{2y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3} \right) b \theta_{in} + \left(\frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3} \right) w_{jn} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(-\frac{y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3} \right) b\theta_{jn} \sin \frac{(2n-1)\pi}{L} x \\
 & = [N_{b1}] \{\delta_{b1}\} + [N_{b2}] \{\delta_{b2}\} + \dots \\
 & = [N_b] \{\delta_b\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서

$$[N_b] = [N_{b1} \ N_{b2} \dots]$$

$$[N_{bn}] = W_n [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]$$

$$W_n = \sin \frac{(2n-1)\pi}{L} x$$

$$f_1 = 1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3}$$

$$f_2 = \frac{y}{b} - \frac{2y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3}$$

$$f_3 = \frac{2y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3}$$

$$f_4 = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3}$$

$$\{\delta_{bn}\} = [w_{in} \ b\theta_{in} \ w_{jn} \ b\theta_{jn}]^T$$

$$\{\delta_b\} = [\delta_{b1} \ \delta_{b2} \ \dots]^T \quad (14)$$

위의 식에서 처짐곡면의 중앙단면에 대한 대칭성을 만족할 수 있도록 奇數半波形的 正弦曲線을 使用하였으며 θ_{in} 대신 $b\theta_{in}$ 을 사용한 것은 次元을 같게 하여 계산을 쉽게 하기 위해서이다.

2) 面內變位函數

x 방향의 변위 u 및 y 방향의 변위 v 에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$y=0 \text{ 에서 ; } u=u_i, \ v=v_i$$

$$y=b \text{ 에서 ; } u=u_j, \ v=v_j$$

$$x=\frac{L}{2} \text{ 에서 ; } u=0 \quad (15)$$

위의 條件을 만족시키는 變位函數를 다음과 같이 쓸 수 있다^(3,13).

$$u = \sum_{n=1,2} \left[\left(1 - \frac{y}{b}\right) u_{in} + \left(\frac{y}{b}\right) u_{jn} \right] U_n$$

$$v = \sum_{n=1,2} \left[\left(1 - \frac{y}{b}\right) v_{in} + \left(\frac{y}{b}\right) v_{jn} \right] V_n \quad (16)$$

x 방향의 전개함수 U_n, V_n 에 대해서는 학자들에 따라 다음과 같이 다른 함수를 사용하고 있다.

Cheung^(3,13) :

$$U_n = \cos \frac{n\pi}{L} x; \ n=1, 2, \dots$$

$$V_n = \sin \frac{n\pi}{L} x; \ n=1, 2, \dots$$

上田⁽¹⁵⁾ :

$$U_n = \left(-\frac{2}{L}\right)^{2n-1} \left(x - \frac{L}{2}\right)^{2n-1}; \ n=1, 2, \dots$$

$$V_1 = 1$$

$$V_n = \sin \frac{(2n-3)\pi}{L} x; \ n=2, 3, \dots$$

여기서는 V_n 의 함수로서 上田의 식을 사용하고 U_n 의 函數는 다음과 같이 유도한다.

길이 L 인 平板中の 한 線素 AB 가 荷重을 받아 그림 3과 같이 되었다면 A 로부터 x 만큼 떨어진 점 C 는 C' 로 이동하며 이때 변위를 수평변위 $u(x)$ 와 수직변위 $w(x)$ 로 분해할 수 있다⁽¹⁴⁾.

(13)식에서와 같이 선소의 처짐을

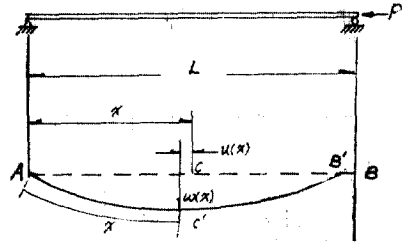


그림 3. 변위 함수

$$w(x) = a \sin \frac{\pi}{L} x + b \sin \frac{3\pi}{L} x + \dots \quad (17)$$

와 같이 가정하면 경계조건을 만족시키는 변위 함수 u 는 다음과 같이 구할 수 있다⁽¹¹⁾.

$$\begin{aligned}
 u(x) = & p \left(1 - \frac{2}{L} x\right) + q \sin \frac{2\pi}{L} x + r \sin \frac{4\pi}{L} x \\
 & + s \sin \frac{6\pi}{L} x + \dots \quad (18)
 \end{aligned}$$

따라서 x 방향의 변위 함수 u_n 을 다음과 같이 가정하는 것이 합리적이다.

$$u_1 = 1 - \frac{2}{L} x$$

$$u_n = \sin \frac{2(n-1)\pi}{L} x; \ n=2, 3, 4, \dots \quad (19)$$

(17) 및 (18)식으로부터 $w(x)$ 의 항수가 1항이면 $u(x)$ 의 항수는 2항. 즉 $w(x)$ 의 變位함수 n 개 취하면 $u(x)$ 의 변위함수는 $2n$ 개 취하는 것이 合理的이다.

u, v 를 행렬로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= [N_{p1}] \{\delta_{p1}\} + [N_{p2}] \{\delta_{p2}\} + \dots \\
 &= [N_p] \{\delta_p\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

여기서

$$[N_{pn}] = \begin{Bmatrix} U_{2n-1} f_5 & U_{2n} f_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{2n-1} f_7 & V_{2n} f_7 \\ U_{2n-1} f_6 & U_{2n} f_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{2n-1} f_6 & V_{2n} f_6 \end{Bmatrix}$$

$$f_5 = 1 - \frac{y}{b}$$

$$f_6 = \frac{y}{b}$$

$$[N_p] = [N_{p1} \ N_{p2} \ \dots]$$

$$\{\delta_{pn}\} = [u_{ik} \ u_{il} \ v_{ik} \ v_{il} \ u_{jk} \ u_{jl} \ v_{jk} \ v_{jl}]^T;$$

$$k=2n-1, \ l=2n$$

$$\{\delta_p\} = \begin{Bmatrix} \delta_{p1} \\ \delta_{p2} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (21)$$

변위 증분도 마찬가지로 쓸 수 있다.

$$\Delta w = [N_{b1}] \{\Delta \delta_{b1}\} + [N_{b2}] \{\Delta \delta_{b2}\} + \dots \\ = [N_b] \{\Delta \delta_b\}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} = [N_p] \{\Delta \delta_{p1}\} + [N_p] \{\Delta \delta_{p2}\} + \dots \\ = [N_p] \{\Delta \delta_p\} \quad (22)$$

3.3 帶板要素의 變形度와 節線變位와의 관계

(9)식의 變形度增分을 다음과 같이 行列로 表示한다.

$$\{\Delta \varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기에 (22)식을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B_p] \{\Delta \delta_p\} + [[C][G] - z[B_b]] \{\Delta \delta_b\} \\ = [B] \{\Delta \delta\} \quad (24)$$

여기서

$$[B] = [[B_p] \ [C][G] - z[B_b]]$$

$$[B_p] = [B_{p1} \ B_{p2} \ \dots]$$

$$[B_{pn}] = \begin{Bmatrix} \frac{dU_k}{dx} f_5 & \frac{dU_l}{dx} f_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_k \frac{df_5}{dy} & V_l \frac{df_6}{dy} \\ U_k \frac{df_5}{dy} & U_l \frac{df_6}{dy} & \frac{dV_k}{dx} f_5 & \frac{dV_l}{dx} f_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{dU_k}{dx} f_6 & \frac{dU_l}{dx} f_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_k \frac{df_6}{dy} & V_l \frac{df_5}{dy} \\ U_k \frac{df_6}{dy} & U_l \frac{df_5}{dy} & \frac{dV_k}{dx} f_6 & \frac{dV_l}{dx} f_5 \end{Bmatrix}$$

$$; \ k=2n-1, \ l=2n$$

$$[C] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$[G] = [G_1 \ G_2 \ \dots]$$

$$[G_n] = \begin{Bmatrix} \frac{dW_n}{dx} [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4] \\ W_n \left[\frac{df_1}{dy} \ \frac{df_2}{dy} \ \frac{df_3}{dy} \ \frac{df_4}{dy} \right] \end{Bmatrix}$$

$$[B_b] = [B_{b1} \ B_{b2} \ \dots]$$

$$[B_{bn}] = \begin{Bmatrix} \frac{d^2 W_n}{dx^2} [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4] \\ W_n \left[\frac{d^2 f_1}{dy^2} \ \frac{d^2 f_2}{dy^2} \ \frac{d^2 f_3}{dy^2} \ \frac{d^2 f_4}{dy^2} \right] \\ 2 \frac{dW_n}{dx} \left[\frac{df_1}{dy} \ \frac{df_2}{dy} \ \frac{df_3}{dy} \ \frac{df_4}{dy} \right] \end{Bmatrix} \quad (25)$$

3.4 帶板要素의 剛度行列

(5)식의 좌변에 (24)식을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int \Delta \sigma_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} dV + \int \sigma_{ij} \delta \left(\frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} \right) dV \\ & = \int \left(\Delta \sigma_x \delta \Delta \varepsilon_x + \Delta \sigma_y \delta \Delta \varepsilon_y + \Delta \tau_{xy} \delta \Delta \gamma_{xy} \right) dV \\ & + \int \left[\sigma_x \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) + \sigma_y \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right) \right) \right] dV \\ & = \int \delta \{\Delta \varepsilon\}^T \{\Delta \sigma\} dV + \int \left[\delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$[p] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \end{Bmatrix} dV$$

$$= \delta \{\Delta \delta\}^T [[K_0] + [K_L]] \{\Delta \delta\} \\ + \delta \{\Delta \delta_b\}^T [K_b] \{\Delta \delta_b\} \\ = \delta \{\Delta \delta\}^T [K_T] \{\Delta \delta\} \quad (26)$$

여기서

$$[K_T] = [K_0] + [K_L] + [K_b]$$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} K_{pp} & 0 \\ 0 & K_{bb} \end{bmatrix}$$

$$[K_L] = \begin{bmatrix} 0 & [K_{pb}] \\ [K_{pb}]^T & [K_0] \end{bmatrix}$$

$$[K_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_{ps}] \end{bmatrix}$$

$$[K_{pp}] = \int [B_p]^T [D] [B_p] dV$$

$$[K_{pb}] = \int [B_p]^T [D] [C] [G] dV$$

$$[K_{bb}] = \int z^2 [B_b]^T [D] [B_b] dV$$

$$[K_0] = \int [G]^T [C]^T [D] [C] [G] dV$$

$$[K_{ps}] = \int [G]^T [P] [G] dV$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (27)$$

위의 식에서 $[K_{pp}]$ 는 平面應力剛度行列(plane stress stiffness matrix)로 微小變形的 平面應力解析을 위해서는 이 行列만 必要하다. $[K_{bb}]$ 는 平板의 휨剛度行列(bending stiffness matrix)이며 平板의 휨해석의 경우 微小처짐만을 생각하던 이 行列만 必要하다. $[K_{ps}]$ 는 面內變位와 面外變位の 連成(coupling)으로 인한 剛度行列이며 微小처짐의 경우엔 零이다. $[K_0]$ 는 初期變位剛度行列(initial displacement stiffness matrix)이며 $[K_{ps}]$ 는 初期應力剛度行列(initial stress stiffness matrix)이다. $[K_0]$ 는 微小變位剛度行列(small displacement stiffness matrix)이고 $[K_L]$ 는 有限變形的 경우 $[K_0]$ 에 부가되는 有限變位剛度行列(finite displacement stiffness matrix)이다.

(5)식의 우변은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int \{f_i \delta \Delta u_i\} ds + \int \{f_i \delta \Delta u_i\} ds - \int \{\sigma_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij}\} dV \\ &= \int \delta [\Delta U \ \Delta V \ \Delta W] \begin{Bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \\ \Delta f_z \end{Bmatrix} ds \\ &+ \int \delta [\Delta U \ \Delta V \ \Delta W] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} ds \\ &- \int (\sigma_x \delta \Delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \Delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \Delta \gamma_{xy}) dV \\ &= \delta \{\Delta \delta\}^T \{\Delta F\} + \delta \{\Delta \delta\}^T \{\Delta F_s\} \quad (28) \end{aligned}$$

여기서

$$\{\Delta F\} = [N]^T \{\Delta f\} ds$$

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_p] & -z[G] \\ 0 & [N_b] \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta f\} = [\Delta f_x \ \Delta f_y \ \Delta f_z]^T$$

$$\{\Delta F_s\} = \{\{F\} - \{R\}\}$$

$$\{F\} = \int [N]^T \{f\} ds$$

$$\{R\} = \int [B]^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T \quad (29)$$

4. 平衡方程式의 解法

(5)식의 微分形 平衡方程式은 (26) 및 (28)식으로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} [K_T] \{\Delta \delta\} &= \{\Delta F\} + \{\Delta F_s\} \\ &= \{\Delta \bar{F}\} \quad (30) \end{aligned}$$

이 식은 한 요소에 대한 평형방정식이지만 전체 구조물에 대해서도 마찬가지로 전체 구조물에 대해서도 위의 식을 사용하기로 한다.

(30)식의 증분형 平衡方程式으로 構造物의 非線形 問題를 解析할 경우 $\{\Delta F\}$ 를 먼저 주고 $\{\Delta \delta\}$ 를 求하는 方法(荷重增分形解法)과 역으로 $\{\Delta \delta\}$ 를 먼저 주고 $\{\Delta \bar{F}\}$ 를 求하는 方法(變位增分形解法)을 생각할 수 있다.

荷重增分形解法의 경우 처음단계 및 각 계속 단계에서 求한 變位增分으로부터 變形度增分 및 應力增분이 計算되고 이들 값을 前단계(Q^{n-1} 상태)까지의 各量에 더하면 기준상태(Q^n 상태)에서의 變位, 變形度 및 應力이 求해진다. 이들 값을 사용하여 새로운 剛度行列을 作成하고 殘差行列 $\{\Delta F_s\}$ 이 求해지면 다시 適當한 外力增分 $\{\Delta F\}$ 를 선정하여 다음 단계($(n+1)$ 단계)로 들어간다. 이러한 과정을 필요조건이 만족될 때까지 계속한다.

이 方法에 依해 길이方向의 面內荷重을 받는 單순지지된 平板의 非線形 解析을 할 경우 그림 4.a와 같이 荷重을 等分布 시키면 荷重이 작은 初期단계에서는 均等變位를 하게되나 하중이 커지게 되면 變位는 점선으로 表示되는 것과 같이 가운데 부분이 크게 된다.

적에서는 이방을 따랐다.

5. 解析例

앞의 이론에 의해 작성된 프로그램을 이용하여 여 단순지지된 판이 1 方向하중을 받을 때의 거

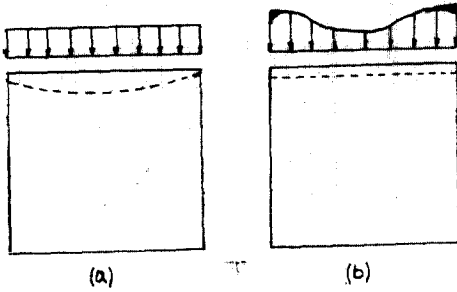


그림 4. 하중분포와 변위

그러나 일반적으로 Box-Girder의 플랜지와 같이 面內荷重은 받는 板의 끝은 직선 변형을 한다고 보는 경우가 많으며 이러한 조건을 만족시키기 위해서는 하중을 그림 4.b와 같이 작용시켜야 한다. 이러한 荷重의 分布 상태는 荷重의 크기에 따라 달라지게 되며 따라서 매 단계마다 荷重增分の 分布 상태가 달라 이에 맞는 荷重增分은 결정하기가 매우 힘들다. 여기서는 이를 위해 다음과 같이 한다.

- ① 절선에 荷重增分을 加한다.
- ② 變位增分을 計算한다.
- ③ 荷重方向 수평변위 증분의 평균치를 계산한다.
- ④ 위의 평균치와 각 절선의 수평변위 증분의 비 r_i 를 구한다.
- ⑤ 각 절선의 하중증분에 비 r_i 를 곱하여 새로운 하중증분을 만들어 다시 ②의 과정부터 되풀이한다.

여기서 제 ① 단계에 가하는 하중증분은 n 단계 (Q^n 상태)에서의 마지막 하중증분을 $(n+1)$ 단계의 하중증분으로 함으로써 반복회수를 어느정도 줄일 수 있다.

變位增分形 解法에서는 먼저 $\{d\}$ 를 가정해야 하는데 이때 x 方向의 변위와 가장 밀접한 관계에 있는 절선변위는 (16)식에서 Δu_{11} 와 Δu_{21} 이다. 따라서 U_1 에 관계되는 항은 모두 같다고 놓고 이것에 관계되는 剛度계수를 곱하여 이것을 하중으로 생각하고 $\{d\}$ 를 구한다. 이로부터 Q^n 상태에서의 필요양이 구해지고 다음 단계로 넘어간다. 위의 두가지 방법을 비교해 본 결과 變位 증분형에 의한 解法이 우수하여 다음의 해

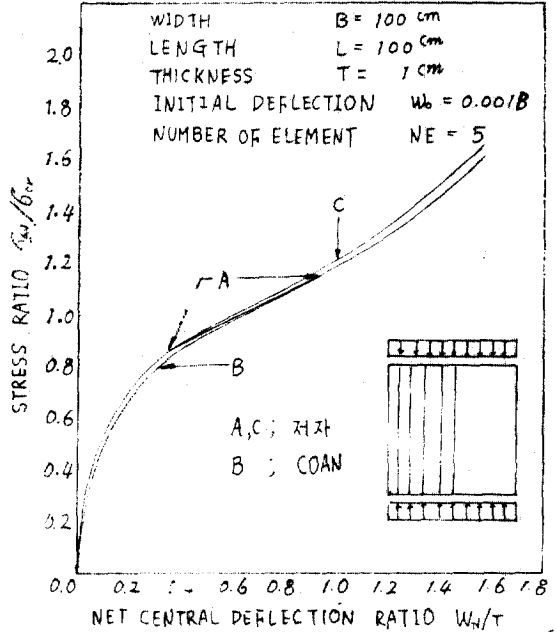


그림 5. Deflection behavior I

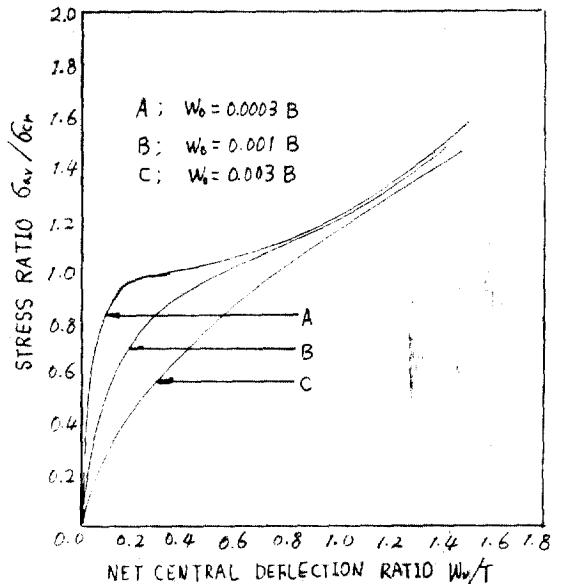


그림 6. Deflection behavior IV

동은 초기처짐을 고려하여 해석한 결과와 다른 연구결과를 비교해 본다. 여기서 Young 계수 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, Poisson 비 $\nu = 0.3$, 재료의 항복강도 $\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ 으로 한다.

그림 5에서 σ_{av} 는 면內하중의 平均應力, σ_{cr} 는 좌굴하중을 表示하고 w_0 은 전체 처짐에서 初期 처짐을 뺀 순수처짐을 표시한다. 전개함수는 (13)식 및 (20)식의 $[N_{s1}]$ 과 $[N_{s2}]$ 항단을 사용 하였으며 同一조건에서 계산한 Coan⁽⁶⁾의 결과와 비교하였다.

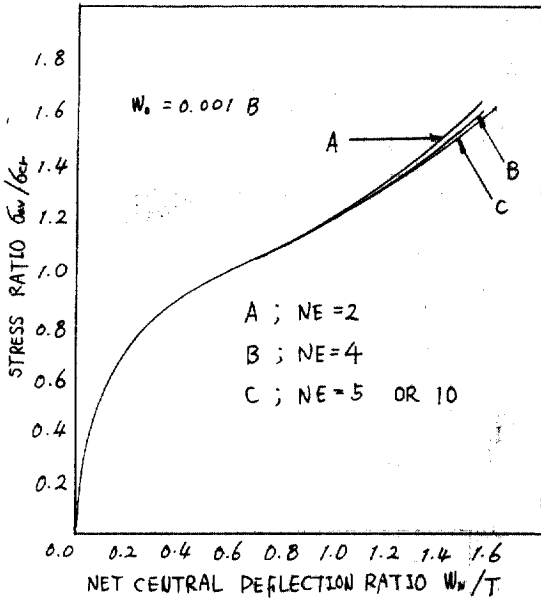


그림 7. Deflection behavior III

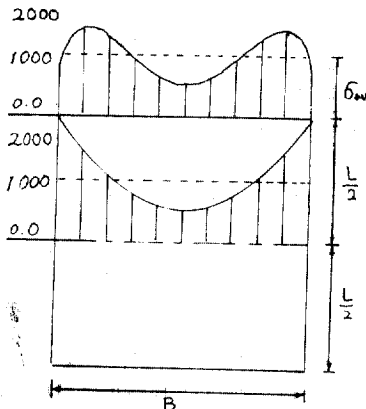


그림 8. Stress distributions

그림 6은 初期처짐의 크기가 거동에 미치는 영향을 표시한 것이고, 그림 7은 요소수와 판의 거동과의 관계를 그림 8은 판내에서의 응력의 변위상태를 표시하고 그림 9는 극한강도와 세장비와의 관계를 표시한 그림이다.

위의 모든 예제에서 변위중분 {4δ}는 예비계산을 참고로 하여 0.002cm로 하였다.

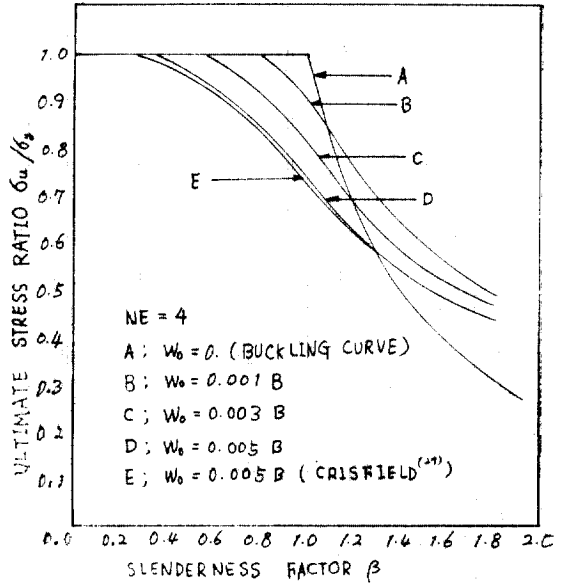


그림 9. Ultimate load and Slenderness

6. 結 論

初期처짐을 가지는 단순지지된 平板이 一軸面內壓縮 荷重을 받을 때의 非線形 解析을 増分理論과 有限帶板法을 使用하고 curvature effect를 고려한 面內變位函數를 使用하여 解析한 結果變位増分方式이 荷重増分方式보다 좋은 결과를 주었으며 여기서 사용한 方法은 非線形 解析을 위한 하나의 有用한 方法임이 확인되었다.

參 考 文 獻

1. Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity & Plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, 1982.
2. Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1977.
3. Cheung, Y.K., *Finite Strip Method in Structural*

- Analysis*, Pergamon Press, 1976.
4. The Subcommittee on Ultimate Strength of Box-Girders of the ASCE-AASHTO Task Committee on Fluxural Members of the Committee on Metals of the Structural Division, Steel Box-Girder Bridges—Ultimate Strength Considerations, *ASCE*, Vol. 100, ST 12, 1974.
 5. Merrison Committee, *Inquiry into the Basis of Design and Method of Erection of Steel Box-Girder Bridges*, Her Majesty's Stationary Office, London, 1973.
 6. Coan, J.M., Large-Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, *J. of Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 2, 1951.
 7. Dawson, R.G. and Walker, A.C., Post-Buckling of Geometrically Imperfect Plates, *ASCE*, Vol. 98, ST1, 1972.
 8. Rhodes, J. and Harry, J.M., Examination of Plate Post-Buckling Behavior, *ASCE*, Vol. 103, EM3, 1976.
 9. Crisfield, M.A., Full-Range Analysis of Steel Plates and Stiffened Plates under Uniaxial Compression, *Inst. Civ. Eng., Part 2, Vol. 59*, 1975.
 10. 小松定夫・北田俊行・宮崎清司, 残留應力おむび初期たおみを有する壓縮板の弾塑性解析, 日本土木學會論文報告集, 第244號, 1975.
 11. 李榕才, 壓縮을 받는 板 및 補強板의 有限帶板法에 의한 幾何學的 非線形 解析, 博士學位論文, 서울대학교, 1979.
 12. Cheung, Y.K., The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends, I.C.E., 1968.
 13. Cheung, Y.K., Folded Plate Structures by Finite Strip Method, *ASCE*, Vol. 95, ST12, 1969.
 14. Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W., *A General Theory of Elastic Stability*, Wiley, 1973.
 15. 上田幸雄・松石正克・山内裕・田中雅子, 有限帶板法における平板の弾塑性大たおみ解析, 日本關西造協會誌, 第154號, 1974.

(接受: 1985. 7. 24)