

一括注文 原資材를 갖는 單一製品 生産시스템의 統合生産在庫模型

(An Integrated Production-inventory Model for a Single Product System
with Jointly Replenished Raw Materials)

金 旻 模*

Abstract

This paper is concerned with the integrated production-inventory model with jointly replenished raw materials.

A search procedure is presented to determine the economic batch size for the finished product and the economic order quantity for each raw material simultaneously.

A case study is given to back up this work.

요 약

본 연구는 일괄주문이 가능한 원자재를 갖는 생산시스템의 생산 및 재고에 관한 통합모형을 제시하였다.

최종 제품의 경제적 생산량과 각 원자재의 경제적 주문량을 동시에 결정하기 위한 탐색적 방법이 제안되었으며 본 연구의 유용성을 뒷받침하기 위하여 제지공장의 사례연구를 행하였다.

1. 서 론

경제적 생산량(EPQ)의 결정에 관한 문제는 여러가지 삼이한 상황에 대하여 많은 연구가 있었다. 그러나 이들 대부분의 연구에서는 생산에 필요한 원자재(raw material)가 가장 경제적으로 조달됨을 묵시적으로 가정하고 있다. 그러나 원자재의 소요량은 최종 제품의 생산량이 결정되어야 알 수 있으며 생산량 결정을 위해서는 원자재

*경상대학교 산업공학과

의 재고 변동을 고려하지 않을 수 없다. 즉 원자재의 주문과 최종 제품의 생산은 동시에 결정해야 할 문제인 것이다.

이러한 입장에서 그 간 수편의 논문이 발표되었다. [1, 2, 3, 4] 그러나 이들 연구에서는 각 원자재 간의 Coordination 개념이 도입되지 않아 한 공급자가 여러 종류의 원자재를 공급하는 경우 여러 원자재를 동시에 주문함으로써 비용을 절감할 수 있는 가능성을 배제하였다.

그러므로 본 연구에서는 원자재 조달에 coordination이 가능한 경우 최종 제품의 생산주기(EPQ)와 원자재의 주문주기(EOQ)를 동시에 결정할 수 있는 모형을 제시하고자 한다. 모형을 유도함에 있어서 여러 batch에 필요한 원자재를 동시에 주문할 수 있게 했으며 각 원자재는 매 주문마다 반드시 포함시킬 필요는 없도록 가정하였다. 그리고 원자재의 부패성(deterioration)을 고려하여 모형 적용에 한층 더 포괄성을 가지게 했으며 제지공장의 적용사례를 통하여 모형의 유용성을 뒷받침하였다.

2. 모형의 개발

본 연구에서는 다음의 가정하에서 수학적 모형을 개발하였다.

- ① 최종 제품에 대한 수요율(demand rate)은 d 로 일정하다.
- ② 최종 제품의 생산율(production rate)은 p 로 일정하다. 단, $p > d$ 이다.
- ③ 원자재의 주문인도기간(lead time)은 무시할 수 있다. (lead time이 L 로 일정한 경우에도 본 모형을 적용할 수 있다.)
- ④ 원자재의 재고부족은 허용하지 않는다.
- ⑤ 원자재의 할인(quantity discount)은 존재하지 않는다.
- ⑥ 원자재의 부패는 재고량에 비례한다. 즉, exponential decay이다.

본 연구에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

1) 최종 제품에 관한 기호

- d : 연간 수요율(unit/year)
- p : 연간 생산율(unit/year)
- ρ : d/p
- S_0 : 생산개시비용(manufacturing set-up cost; $W/\text{회}$)
- h_0 : 재고유지비용($W/\text{unit/year}$)
- T : 생산주기(year)
- m : 원자재 공급자(supplier)의 수
- Q_0 : 경제적 생산량(EPQ)
- $V(T, K_j/s, K_{0j}/s)$: 연간 총가변비용(total variable cost per year)

2) 공급자 j 가 납품하는 원자재에 관한 기호 ($j = 1, 2, \dots, m$)

- N_j : 원자재의 종류수 (i : 원자재 index; $i = 1, 2, \dots, N_j$)
- r_{ij} : 단위 제품 생산에 필요한 i 제 원자재의 량 (unit/unit)
- c_{ij} : i 제 원자재의 단가(W/unit)
- s_j : 주문비용(major set-up cost, $W/\text{회}$)
- s_{ij} : i 제 원자재를 주문에 포함시키는 데 필요한 비용(minor set-up cost, $W/\text{회}$)
- h_{ij} : i 제 원자재의 재고유지비용($W/\text{unit/year}$)
- θ_{ij} : i 제 원자재의 부패율(deterioration constant)
- T_j : 주문주기
- K_j : 공급자 상대주문주기 (T_j/T ; 양정수, relative ordering frequency)
- T_{0j} : i 제 원자재의 주문주기
- K_{0j} : i 제 원자재 상대주문주기 (T_{0j}/T ; 양정수)
- $R_j(T, K_j, K_{0j})$: 연간 가변비용(annual variable cost)

위에서 설정한 상황에 대한 최종 제품의 재고수준은 전형적인 EPQ모형에서와 같고 (톱날모양), j 공급자의 i 제 원자재의 재고수준변화는 Fig. 1. 과 같다.

생산주기(production cycle)를 T 로 가정하면

최종 제품의 생산개시(manufacturing set-up) 및 재고유지에 의한 가변비용(variable cost)은 식(1)과 같다.

$$S_j/T + (1-\rho)dh_j T/2 \quad (1)$$

한편 j공급자의 i째 원자재에 대한 비용을 구하기 위하여 $I_k^u(t)$ 를 $(K_j K_{i,j} - k)T \leq t \leq (\rho + K_j K_{i,j} - k)T$ 에서의 재고수준, $J_k^u(t)$ 를 $(\rho + K_j K_{i,j} - k)T \leq t \leq (1 + K_j K_{i,j} - k)T$ 에서의 재고수준 그리고 A_k^u 를 시점 $(K_j K_{i,j} - k)T$ 에서의 재고수준[즉, $A_k^u = I_k^u((K_j K_{i,j} - k)T)$]이라고 하면 다음의 관계를 만족한다. [Fig. 1. 참조]

$$dI_k^u(t)/dt = -\theta_{i,j} I_k^u(t) - pr_{i,j}, \quad (K_j K_{i,j} - k)T \leq t \leq (\rho + K_j K_{i,j} - k)T \quad (2)$$

$$dI_k^u(t)/dt = -\theta_{i,j} J_k^u(t), \quad (\rho + K_j K_{i,j} - k)T \leq t \leq (1 + K_j K_{i,j} - k)T \quad (3)$$

위의 미분방정식을 풀면 다음과 같다.

$$I_k^u(t) = A_k^u \exp(-\theta_{i,j}(t - (K_j K_{i,j} - k)T)) + (pr_{i,j}/\theta_{i,j})$$

$$(\exp(-\theta_{i,j}(t - (K_j K_{i,j} - k)T)) - 1) \quad (4)$$

$$J_k^u(t) = A_k^u \exp(-\theta_{i,j}(t - (1 + K_j K_{i,j} - k)T)) \quad (5)$$

여기서, $A_k^u = I_k^u((K_j K_{i,j} - k)T)$ 이다.

Fig. 1. 에서 $I_k^u((\rho + K_j K_{i,j} - k)T) = J_k^u((\rho + K_j K_{i,j} - 1)T)$ 이므로 (4)와 (5)식에 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$A_k^u = A_{k-1}^u \exp(\theta_{i,j}T) + (pr_{i,j}/\theta_{i,j})(\exp(\theta_{i,j}\rho T) - 1), \quad k=1, 2, \dots, K_j K_{i,j} \quad (6)$$

$$A_0^u = 0$$

위의 순환식(recursive equation)을 풀면 다음과 같다.

$$A_k^u = (pr_{i,j}/\theta_{i,j}) ((\exp(\theta_{i,j}\rho T) - 1) \sum_{l=0}^{k-1} \exp(k-l)\theta_{i,j}T), \quad k=1, 2, \dots, K_j K_{i,j} \quad (7)$$

그러므로 j공급자의 i째 원자재의 주문량, $A_{K_j K_{i,j}}^u$, 은 다음과 같다. [Fig. 1. 참고]

$$A_{K_j K_{i,j}}^u = (pr_{i,j}/\theta_{i,j}) ((\exp(\theta_{i,j}\rho T) - 1) \sum_{l=1}^{K_j K_{i,j}} \exp$$

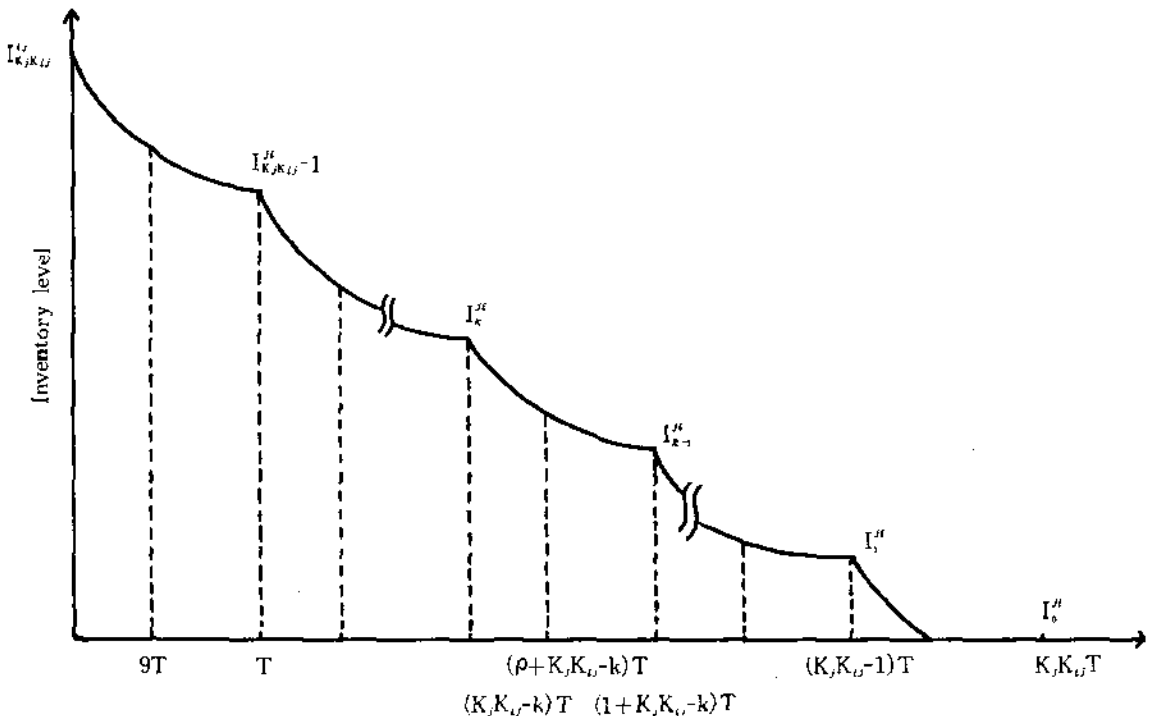


Fig. 1. Inventory level of the i-th raw material of the j-th supplier.

$$(K_j K_{Uj} - 1) \theta_{Uj} T \quad (8)$$

한편 $K_j K_{Uj} dr_{Uj} T$ 가 j 공급자의 i 제 원자재 조달 주기(procurement cycle) 동안의 총수요량으로 한 주기동안의 원자재 부패량은 다음과 같다.

$$D_{Uj} = A_{K_j K_{Uj}}'' - K_j K_{Uj} dr_{Uj} T$$

그리고 한 주기동안의 총재고량, I_{Uj} , 은 Fig.1.의 총면적과 같다.

$$I_{Uj} = \sum_{k=1}^{K_j K_{Uj}} \left(\int_{(K_j K_{Uj} - k)T}^{(K_j K_{Uj} - k + 1)T} I_k''(t) dt + \int_{(K_j K_{Uj} - k)T}^{(K_j K_{Uj} - k + 1)T} J_k''(t) dt \right) \\ = (pr_{Uj} / \theta_{Uj}) \left((\exp(\theta_{Uj} \rho T) - 1) \left(\sum_{k=1}^{K_j K_{Uj}} (K_j K_{Uj} - k) \theta_{Uj} T \right) - K_j K_{Uj} \theta_{Uj} \rho T \right) \quad (10)$$

일반적으로 부패율, θ_{Uj} , 은 1보다 매우 작고 [5] ρ 역시 1보다 작으므로 (8)과 (10)식의 지수 함수를 Series expansion하여 3차 이상의 항을 무시하면 j 공급자의 i 제 원자재에 대한 연간 가변비용(minor set-up cost, 부패손실비용, 재고유지비용)은 식(11)과 같다.

$$R_{Uj}(T, K_j, K_{Uj}) = S_{Uj} / TK_j K_{Uj} + dr_{Uj} (\rho + K_j K_{Uj} - 1) (C_{Uj} \theta_{Uj} + h_{Uj}) T / 2 \quad (11)$$

공급자 j 에 대한 연간 가변비용은 주문비용(major set-up cost)과 N_j 개의 원자재에 대한 비용의 합이므로 다음과 같다.

$$R(T, K_j, K_{Uj}'s) = S_j / TK_j + \sum_{i=1}^{N_j} R_{Uj}(T, K_j, K_{Uj}) \\ = S_j / TK_j + \sum_{i=1}^{N_j} \{ S_{Uj} / TK_j K_{Uj} + dr_{Uj} (\rho + K_j K_{Uj} - 1) (C_{Uj} \theta_{Uj} + h_{Uj}) T / 2 \} \quad (12)$$

그러므로 최종 제품과 모든 원자재에 관한 비용을 합하면 전체 생산재고체계의 총가변비용(total variable cost per year)이 된다.

$$V(T, K_j's, K_{Uj}'s) = S_0 / T + (1 - \rho) dh_0 T / 2 + \sum_{j=1}^m R_j(T, K_j, K_{Uj}'s) \\ = S_0 / T + (1 - \rho) dh_0 T / 2 + (1/T) \sum_{j=1}^m S_j / T_j + (1/T) \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} S_{Uj} / K_j K_{Uj} + d \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} r_{Uj} (\rho + K_j K_{Uj} - 1) (C_{Uj} \theta_{Uj} + h_{Uj}) T / 2 \quad (13)$$

식(13)에서 보는 바와 같이 총가변비용은 각 결정변수(decision variable)에 대해서 볼록함수(convex function)이다. 즉 T 와 K_j 가 주어진 경우 최적 K_{Uj} 는 $R_{Uj}(T, K_j, K_{Uj})$ 를 K_{Uj} 에 대해 편미분하여 zero로 둠으로써 구할 수 있고 T 와 K_{Uj} 가 주어진 경우 최적 K_j 는 $R_j(T, K_j, K_{Uj}'s)$ 를 K_j 에 대해 편미분하여 zero로 둠으로써 구할 수 있으며 $K_j's$ 와 $K_{Uj}'s$ 가 주어진 경우 최적 T 는 $V(T, K_j's, K_{Uj}'s)$ 를 T 에 대해 편미분하여 zero로 둠으로써 구할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$K_{Uj}^*(T, K_j) = (2S_{Uj} / dr_{Uj} (C_{Uj} \theta_{Uj} + h_{Uj}))^{1/2} / K_j T, \\ j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, N_j \quad (14)$$

$$K_j^*(T, K_{Uj}'s) = (2(S_j + \sum_{i=1}^{N_j} S_{Uj} / K_{Uj}) / d \sum_{i=1}^{N_j} r_{Uj} (C_{Uj} \theta_{Uj} + h_{Uj}) K_{Uj})^{1/2} / T, \\ j = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

$$T^*(K_j's, K_{Uj}'s) = (2(S_0 + \sum_{j=1}^m S_j / K_j + \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{j=1}^m S_{Uj} / K_j K_{Uj}) / (1 - \rho) dh_0 + d \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} r_{Uj} (\rho + K_j K_{Uj} - 1) (C_{Uj} \theta_{Uj} + h_{Uj}))^{1/2} \quad (16)$$

그리고 위에서 구한 K_{Uj}^* , K_j^* 가 양의 정수가 되지 않는 경우는 그 값에 가장 가까운 두 양정수(zero는 제외) 중에서 비용함수(13)을 작게 갖는 양정수로 조정해 주어야 한다. 위의 값들을 이용하여 최종 제품의 경제적 생산량(EPQ)과 각 원자재의 경제적 주문량(EOQ)은 다음과 같이 구해진다.

$$EPQ : Q_0 = dT^* \quad (17)$$

$$EOQ : Q_{Uj} = r_{Uj} Q_0 (K_j^* K_{Uj}^* + \theta_{Uj} (\rho + K_j^* K_{Uj}^* - 1) T^* / 2) \quad (18)$$

이때 총가변비용의 최소값은 다음과 같아진다.

$$V(T^*, K_j^*s, K_{Uj}^*s) = (2(S_0 + \sum_{j=1}^m S_j / K_j^* + \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{j=1}^m S_{Uj} / K_j^* K_{Uj}^*) / ((1 - \rho) dh_0 + d \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} r_{Uj} (\rho + K_j^* K_{Uj}^* - 1) (C_{Uj} \theta_{Uj} + h_{Uj})))^{1/2} \quad (19)$$

그러나 식(14)(15)(16)에서 알 수 있듯이 T^* 를 구하기 위해서는 $K_j's$ 와 $K_{Uj}'s$ 의 값을, K_j^* 를 구하기

위해서는 T와 K_u 's의 값을, 그리고 K_u^* 를 구하기 위해서는 T와 K_u 의 값을 미리 알고 있어야 하므로 다음과 같은 탐색적 방법(search method)을 이용하여 구할 수 있다.

- ① 모든 K_j^* 와 K_u^* 를 1로 둔다.
- ② 현 상태의 K_j^* s와 K_u^* s로부터 T*를 계산한다.
- ③ 현 상태의 T*와 K_u^* s로부터 K_j^* ($j=1, 2, \dots, m$)를 구한다.
- ④ 현 상태의 T*와 K_j^* s로부터 K_u^* ($j=1, 2, \dots, m, i=1, 2, \dots, N_i$)를 구한 후 단계②로 간다.
- ⑤ 결정변수들이 수렴 (convergent) 할 때까지 단계①에서 단계④까지를 반복한다.
- ⑥ 위에서 구한 결정변수들을 이용하여 EPQ와 EOQ를 구한다.

3. 적용 사례

종이의 주원료인 고지(waste-paper)는 주로 미국에서 수입되고 있으며 1984년도 총수입물량은 1,000억원 이상을 기록하고 있다. 이 고지는 질(quality)에 따라 여러 등급으로 나누어져 있으며 한 공급자가 다양한 등급의 고지를 제공하

고 있다. 고지는 물량이 거대하므로 방수 처리된 천(waterproof clothes)으로 덮어서 야외에 보관을 하는 형편이므로 부패등에 의해서 많은 손실을 발생시킨다. 그리고 제지 기술상 일정량 이상의 펄프를 사용하여야 하며 이 역시 원목을 주로 외국에서 수입하고 있는 형편이다. 이러한 실정의 제지 공장에서는 종이의 생산과 등급별 고지 및 원목의 수입 물량을 적절히 통제해야 할 필요성이 절실하다.

신문용지의 경우 1단위 생산을 위해 0.715단위의 펄프, 0.25단위의 A급고지 그리고 0.15단위의 B급고지가 필요하며 한 단위의 펄프를 생산하기 위해 2.5단위의 원목이 필요하다. 비용분석결과 Table 1. 과 같은 데이터를 얻었다.

여러가지 parameter 조합에 대한 모형적용 결과가 Table 2. 에 나타나 있으며 여기서 (m, m_1, m_2)는 $S_1=3,000,000m, S_2=1,200,000m, S_3=1,500,000m_1$ 의 관계에 있으며 (n_1, n_2)는 $S_{11}=350,000n_1, S_{12}=300,000n_2$ 의 관계에 있는 양정수이다. 예를들어, $(\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}) = (0.005, 0.025, 0.15), (m, m_1, m_2) = (2, 1, 1), (n_1, n_2) = (2, 1)$ 인 경우 종이의 생산주기, T*,는 0.0907year이고, $(K_1^*, K_2^*, K_{11}^*, K_{12}^*, K_{22}^*) = (1, 1, 1, 2, 1)$ 이므로 원목의 주문주기는 $T_{11}^* = K_1^* K_{11}^* T^* = 0.0907year$,

Table 1. Parameter value for the case study.

Parameter	newspaper	log	waste-paper	
			grade A	grade B
d(tons/year)	80,000			
p(tons/year)	130,000			
S(₩/회)	3,000,000	1,200,000	1,500,000	
			350,000	300,000
h(₩/unit/year)	48,000	4,160	10,800	6,400
r_u (unit/unit)		1.7875	0.12	0.35
C_u (₩/ton)		52,000	135,000	80,000
θ_u		0.005	0.025	0.15

Table 2. Sensitivity of the production-inventory system.

(m_1, m_2, m_3) (n_1, n_2)	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(2, 1, 2)	(2, 2, 1)	(2, 2, 2)
(1, 1)	0.0656 (1, 2, 1, 1, 1)	0.0548 (2, 2, 1, 1, 1)	0.0910 (1, 1, 1, 1, 1)	0.0858 (1, 2, 1, 1, 1)	0.0967 (1, 1, 1, 1, 1)	0.0913 (1, 2, 1, 1, 1)
(1, 2)	0.0665 (1, 2, 1, 1, 1)	0.0555 (2, 2, 1, 1, 1)	0.0925 (1, 1, 1, 1, 1)	0.0865 (1, 2, 1, 1, 1)	0.0980 (1, 1, 1, 1, 1)	0.0919 (1, 2, 1, 1, 1)
(2, 1)	0.0666 (1, 2, 1, 1, 1)	0.0557 (2, 2, 1, 1, 1)	0.0907 (1, 1, 1, 2, 1)	0.0866 (1, 2, 1, 1, 1)	0.0963 (1, 1, 1, 2, 1)	0.0921 (1, 2, 1, 1, 1)
(2, 2)	0.0676 (1, 2, 1, 1, 1)	0.0564 (2, 2, 1, 1, 1)	0.0921 (1, 1, 1, 2, 1)	0.0873 (1, 2, 1, 1, 1)	0.0977 (1, 1, 1, 2, 1)	0.0927 (1, 2, 1, 1, 1)

참고 T^*
(K_1^* , K_2^* , K_3^* , K_4^* , K_5^*)

등급A의 고지주문주기는 $T_{12}^* = K_1^* K_{12}^* T = 0.1814$ year 그리고 등급B고지의 주문주기는 $T_{22}^* = K_2^* K_{22}^* T = 0.0907$ year이 되어 원목은 매 batch 생산 때마다 주문을 하고 고지 주문은 매 batch 때 마다 주문을 하되 등급A는 두 번 주문할 때마다 한번 주문에 포함시킨다.

Table 2. 에서의 결과와, 같은 비용구조 하에서 부패율을 변화시켜가면서 얻은 결과로 부터 다음의 성질을 알아낼 수 있다.

(1) 주문주기는 부패율이 증가함에 따라 감소한다.

(2) 주문주기는 주문비용(major set-up 또는 minor set-up cost)이 증가할수록 증가한다.

(3) 생산주기는 생산개시비용이 증가할 수록 증가한다.

그리고 부패율이 증가함에 따라 T^* 가 감소하다가 K_{12}^* 나 K_{22}^* 가 바뀌게 되면 증가했다가 다시 감소한다. 이것은 minor set-up비용, 부패에 의한 비용, 그리고 major set-up비용의 trade-off

으로 설명될 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 그간 개별적으로 다루어진 문제를 통합하여 좀 더 현실적인 생산재고 모형을 제시하였다. 동일 공급자가 여러종류의 원자재를 공급하는 경우에 있어서 최종 제품 생산 주기와 각 원자재의 주문주기를 동시에 결정할 수 있게 하였다. 각 원자재는 부패성을 가질 수 있으며 다수의 공급자가 원자재를 공급한다고 가정하였다.

적용사례를 통해서 알 수 있듯이 원자재의 부패율이 주문주기에 많은 영향을 주며 나아가 생산주기에도 영향을 준다. 그리고 coordination에 의한 잇점은 비용면에서도 많은 절감을 주지만 개별적 모형에 한층 더 현실성을 부여 했는데 있을 것이다.

References

1. Goyal, S.K., "An Integrated Inventory Model for a Single Product System", *Opl. Res. Q.*, Vol. 28, No.3, pp. 539-545, 1977.
2. KORGAONKER, M.G., "Integrated Production Inventory Policies for Multistage Multiproduct Batch production Systems", *J. Opl. Res. Soc.*, Vol. 30, No. 4, pp. 355-362, 1979.
3. Park, K.S., "An Integrated Production-inventory Model for Decaying Raw Materials", *Int. J. Systems Sci.*, Vol. 14, No. 7, pp. 801-806, 1983.
4. Kim, K.M., and Hwang, H., "A Simultaneous Decision Model for Production System with Deteriorating Raw Materials", *Int. J. Systems Sci.*, 1985 (to appear).
5. Ghare, P.M. and Schader, G.F., "A Model for Exponentially Decaying Inventory", *Jr. of Ind. Engg.*, Vol. 14, No. 5, pp.238-243, 1963.