講 座

衝突 水噴流 冷却法의 體係化(II)

崔 國 光*

Systematization Cooling Method : Impinging Water Jet (II)

Gug Gwang Choi *

4. 自由流線法에 의한 二次元噴流의 Potential 流動의 解析

圓形噴流가 平板에 衝突하는 흐름에 對한 解析에서 이 流動의 現象을 理解하기 위하여 여기서는 二次衝突噴流의 解를 구해보기로 한다.

Milne-Thomson[12]은 二次元噴流의 平板에서의 衝突은 그림 2와 같이 2個의 같은 噴流의 衝突로서 表現할 수 있다고 하였다.

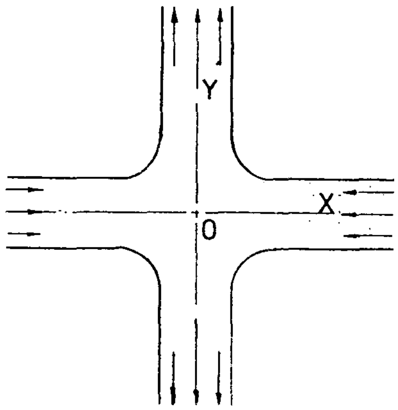


그림 2. 二次元 流動 모델

그 解는

$$Z=\frac{h}{\pi}\left[\log\frac{\bar{u}-\bar{q}}{\bar{u}+\bar{q}}+i\log\frac{\bar{u}+i\bar{q}}{\bar{u}-i\bar{q}}\right] \quad \cdots\cdots(2\text{-}1)$$

여기서

$Z=x+iy$

$\bar{q}=u+iv$

$\bar{u}$: 自由流線上의 流速(無限遠方에서의 流速)

h : 噴流幅(無限遠方)

式(2-1)에서 $x=0$을 代入하면 壁面에서의 流速을 求할 수 있다.

$$\frac{\pi y}{h}=\mathrm{Arctan}\,\frac{\eta}{1-\eta^2}+\log_e\frac{1+y}{1-y},$$

$$\eta\equiv\frac{u_\infty}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}2)$$

또 壁面을 따르는 流線에 Bernoulli 定理

$$\frac{1}{2}\rho u_\infty^2+p=p_s\left(\equiv\frac{1}{2}\rho U_i^2+p_\infty\right)\cdots\cdots(2\text{-}3)$$

을 適用하면 흐름의 壁面에서의 靜壓이 求해 진다. 이것을 그림 3에 表示하였다.

* 正會員, 仁川大學 機械工學科

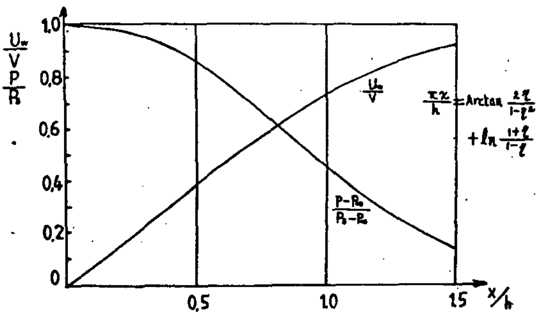


그림 3 . Potential 흐름으로 해석한 二次元噴流의 壁面에서의 衝突

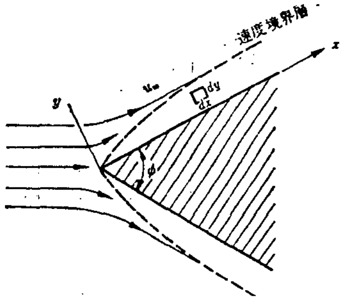


그림 4 . 쐐기 流動

三次元衝突噴流의 壁面上의 速度, 靜壓分布로 이와 같은 形態도 충분히 期待할 수 있다.

또, 森岡[14]에 따르면 靜壓分布는

$$\frac{P-P_\infty}{P_s-P_\infty}=1-\left(\frac{\gamma}{D}\right)^2 \qquad 0\leqq\frac{\gamma}{D}\leqq 1$$
$$\frac{P-P_\infty}{P_s-P_\infty}=0 \qquad \frac{\gamma}{D}\geqq 1 \qquad (2\text{-}4)$$

로 整理하였다. 또한 式(2-4)에 式(2-3)을 代入하면 液膜內境界層의 外線速度 U_∞ 의 半徑方向의 變化는

$$\frac{U_\infty}{U_i}=\frac{\gamma}{D} \qquad 0\leqq\frac{\gamma}{D}\leqq 1$$
$$\frac{U_\infty}{U_i}=1 \qquad \frac{\gamma}{D}\geqq 1 \qquad (2\text{-}5)$$

로 나타낼 수 있으며 여기서 衝突速度 U_i는 다음 式으로 定義된다.

$$P_s-P_\infty=\frac{1}{2}\rho U_i^2$$

U_i는 重力에 의한 噴流의 加速度를 考慮하여

$$U_i=U_0(H\xi)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi\equiv 2gH/U_0^2 \cdots\cdots\cdots (2\text{-}6)$$

로 表示할 수 있다.

5. 主流速度와 壁温이 壁面을 따라서 變化할 때의 熱傳達

그림 4와 같이 角度가 ϕ인 쐐기(Wedge)가 均一한 흐름과 接할 때 速度境界層外線의 主流速度는 一定하지 않고 壁面을 따라 變化하며 또 壁面의 溫度도 變化한다고 할 境遇에 基礎微分方程式은[13]

$$連續方程式: \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{g}}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{-}7)$$

$$運動量方程式: \rho\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\rho\bar{V}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=\rho\bar{u}_\infty\frac{d\bar{u}_\infty}{d\bar{x}}+\mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} \cdots\cdots (2\text{-}8)$$

$$\text{Engrgy 方程式}: C_p\rho\bar{u}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}}+C_p\rho\bar{V}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}}=\lambda\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}9)$$

여기서 $\bar{\eta}=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\sqrt{\frac{\bar{u}_\infty\cdot\bar{x}}{\nu}}$, $\bar{u}=\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{y}}$, $\bar{V}=-\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{x}}$

$$\Psi=\sqrt{\bar{u}_\infty\nu\bar{x}}\ \xi(\bar{\eta})$$

로 變數變換을 하면

$\frac{d\psi}{d\bar{\eta}}=\sqrt{\bar{u}_\infty\nu\bar{x}}f(\bar{\eta})$의 常微分方程式이 얻어진다.

式(2-8)을 變換하면

$$\zeta'''+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\bar{x}}{\bar{u}_\infty}\frac{d\bar{u}_\infty}{d\bar{x}}\right)\zeta\zeta''+\frac{\bar{x}}{\bar{u}_\infty}\frac{d\bar{u}_\infty}{d\bar{x}}(1-\zeta'^2)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}10)$$

式(2-10)이 常微分方程式이 되기 위해서는

$$\frac{\bar{x}}{\bar{u}_\infty}\cdot\frac{d\bar{u}_\infty}{d\bar{x}}=m \quad \therefore \bar{U}_\infty=C\bar{x}^m \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{-}11)$$

$$\therefore \zeta''' + \frac{1}{2}(1+m)\zeta\zeta'' + m(1-\zeta'^2)$$
$$= 0 \quad \cdots\cdots (2\text{-}12)$$

또 境界層內의 速度分布 $\bar{U}$, $\bar{V}$는

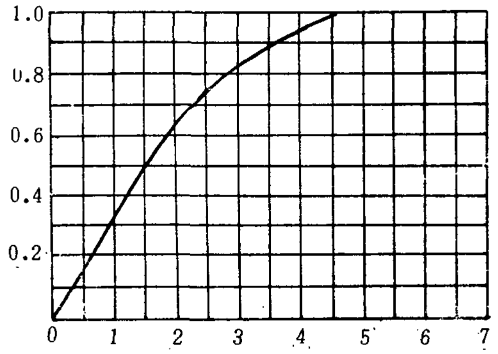
$$\bar{U} = \bar{U}_\infty \zeta', \quad \bar{V} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty \nu}{\bar{x}}}\,[1+m]$$

$$\zeta - (1-m)\bar{\eta}\zeta'] \quad \cdots\cdots (2\text{-}13)$$

고로 境界條件은 그림 4에서

$\bar{\eta} = 0$에서 $\zeta' = 0$, $\zeta = 0$

$\bar{\eta} = \infty$에서 $\zeta = 1$



$$\eta \equiv \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\sqrt{\frac{U_{\infty}\bar{X}}{\nu}}$$

그림 5. 경계층의 분포

그런데 m과 ϕ의 關係는

$$m = \phi/(2x - \phi) \quad \cdots\cdots (2\text{-}14)$$

이를테면 直角($\phi = \frac{\pi}{2}$)에서는 $m = \frac{1}{3}$이 된다.

다음으로 Energy 式(2-9)을 $\bar{T}_w$가 $\bar{x}$의 函數임을 고려하여 變形하면

$$F'' + \frac{Pr}{2}(1+m)\zeta F' - Pr\left[\frac{\bar{x}}{\bar{T}_w - \bar{T}_\infty}\cdot \frac{d(\bar{T}_w - \bar{T}_w)}{d\bar{x}}\right]\zeta' F = 0$$

여기서 $F \equiv \frac{\bar{T} - \bar{T}_\infty}{\bar{T}_w - \bar{T}_\infty}$ 이다. 따라서 常微分方程式이 되려면

$$\frac{\bar{x}}{\bar{T}_w - \bar{T}_\infty}\cdot\frac{d(\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)}{d\bar{x}} = n, \quad n : \text{常數}$$

$$\therefore \bar{T}_w - \bar{T}_\infty = B\bar{x}^n \quad \cdots\cdots (2\text{-}13)$$

그러므로 前式은

$$F'' + \frac{Pr}{2}(1+m)\zeta F' - Pr\eta\zeta' F = 0$$

境界條件은

$\eta = 0$에서 $F = 1$

$\eta = \infty$에서 $F = 0$이다.

壁面으로부터의 局所傳熱量 $\bar{q}_w$는

$$\bar{q}_w = -\lambda\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right)_{\bar{y}=0} = -\lambda(\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)$$

$$\sqrt{\frac{\bar{u}_\infty}{\nu\bar{x}}}\left(\frac{dF}{d\bar{\eta}}\right)_{\bar{\eta}=0}$$

$$= -\lambda B\bar{x}^n\sqrt{\frac{c\bar{x}^n}{\nu\bar{x}}}\left(\frac{dF}{d\bar{\eta}}\right)_{\bar{\eta}=0}$$

$$= -\lambda B\sqrt{\frac{c}{\nu}}\left(\frac{dF}{d\bar{\eta}}\right)_{\bar{\eta}=0}\cdot \bar{x}^{n+\frac{m-1}{2}}$$

따라서 熱流束이 一定한 境遇는

$n + \frac{m-1}{2} = 0$에서 $n = \frac{1-m}{2}$이 된다.

6. Mangler 變換

그림 6와 같은 軸對稱物體에 軸方向으로 흐름이 接하는 境遇 微分方程式은

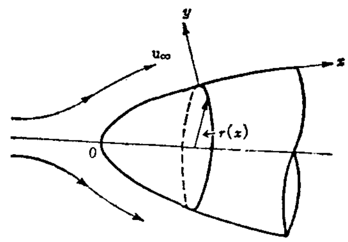


그림 6. 軸對稱物體

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rV)}{\partial y} = 0$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho V\frac{\partial u}{\partial y} = \rho u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2\text{-}16)$$

$$C_p\rho u\frac{\partial T}{\partial x} + C_p\rho V\frac{\partial T}{\partial y} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

여기서 Mangler[14]는 座標溫度, 速度에 關해서 다음과 같은 變換을 하였다.

$$\bar{x} = \int_0^x \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 dx,\quad \bar{y} = \left(\frac{r}{\ell}\right)y$$

$$\bar{u} = u,\quad \bar{V} = \left(\frac{\ell}{r}\right)\left[V + \frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dx}\right)uy\right] \qquad (2\text{-}17)$$

$$\bar{u}_\infty = u,\quad \bar{T} = T$$

여기서 ℓ는 一定한 길이 이다. 이때 다음 關係가 成立한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{r}{\ell}\right)^2\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}},\quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{r}{\ell}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{y}}$$

따라서 式(2-16)은

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\rho\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \rho\bar{V}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \rho\bar{u}_\infty\frac{d\bar{u}_\infty}{d\bar{x}} + \mu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \qquad (2\text{-}18)$$

$$C_p\rho\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + C_p\rho\bar{V}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \lambda\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$$

로 變換된다. 이것은 式(2-7), (2-8), (2-9)와 同一形式이 된다.

本 硏究에서는 平板에 軸對稱흐름을 衝突시키고 等熱流束下에서 熱傳達率을 구하게 되므로

$r(x)=x$, $u_\infty(x)=B(x)$, $\dot{q}_w$ = Constant 로 놓으면 式(2-10)은

$$\bar{x} = \int_0^x \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{x^3}{3\ell^2}$$

∴ $x = \sqrt[3]{3\ell^2}\,\bar{x}^{\frac{1}{3}}$ 이고, 따라서 $\bar{U}_\infty = U_\infty$ 의 關係를 고려하면

$\bar{U}_\infty = B\sqrt[3]{3\ell^2}\,\bar{x}^{\frac{1}{3}}$ = 定數 × $\bar{x}^{\frac{1}{3}}$ 이다. 이것은 軸對稱二次元問題로서 $m=\frac{1}{3}$ 즉 角 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 인 쐐기에 흐름이 衝突하는 境遇이다.

다음에 熱流束을 調査해 보면

$$\dot{q}_w = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\lambda\left(\frac{x}{\ell}\right)\cdot\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right)_{\bar{y}=0}$$

$$= -\lambda\left(\frac{x}{\ell}\right)\sqrt{\frac{\bar{U}_\infty}{\nu\cdot\bar{x}}}\,(\bar{T}_w - \bar{T}_\infty)\left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0}$$

$$= -\lambda\left(\frac{\sqrt[3]{3\ell^2}\,\bar{x}^{\frac{1}{3}}}{\ell}\right)\sqrt{\frac{\bar{U}_\infty}{\nu\bar{x}}}\cdot B\cdot\bar{x}^n\left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0}$$

$$= -\lambda\cdot B\sqrt[3]{\frac{3}{\ell}}\sqrt{\frac{C}{\nu}}\left(\frac{dF}{d\eta}\right)_{\eta=0}\cdot\bar{x}^{\left(\frac{m}{2}+n-\frac{1}{6}\right)}$$

$\dot{q}_w$ = Constant 이므로

$$\frac{m}{2}+n-\frac{1}{6}=0$$

$m=\frac{1}{3}$은 이미 決定한 바이므로 $n=0$이다. 또 式(2-17)에 依해서

$\frac{N_{ux}}{\sqrt{R_{ex}}} = \frac{\bar{N}_{ux}}{\sqrt{\bar{R}_{ex}}}\cdot\left(\frac{r^2x}{\int_0^x r^2dx}\right)^{\frac{1}{2}}$ 이 되므로 여기에 $r(x)=x$ 를 代入하면

$$\frac{N_{ux}}{\sqrt{\bar{R}_{ex}}} = \frac{\bar{N}_{ux}}{\sqrt{\bar{R}_{ex}}}\times\sqrt{3}$$

結局 三次元流의 熱傳達은 軸對稱二次元流의 값을 $\sqrt{3}$ 倍하면 된다.

$m=\frac{1}{3}$, $n=0$ 의 境遇

$\frac{\bar{N}_{ux}}{\sqrt{\bar{R}_{ex}}} = 0.440P_r^{0.4}$ 이므로

$$\frac{N_{ux}}{\sqrt{R_{ex}}} = 0.440P_r^{0.4}\times\sqrt{3} = 0.763\,P_r^{0.4}$$

즉 $N_{ex} = 0.763\,P_r^{0.4}R_{ex}^{0.5}$ 이다 …………(2-19)

(다음 號에 계속)

參 考 文 獻

12. Milme-Thomson : Theoretical Hydrodynamics, The Mcmillan Company, New York, 3nd Edi, (1955).
13. 甲藤好郎 : 傳熱概論, 養賢堂, p.149, (1978).
14. W. Mangler : Z. f. angew, Math, U. Mech., 28, 97, (1948).