De-Laval 노즐의 경계층 배제두께의 음수현상

張　　太　　鎬
<대전기계창 실장>

1. 머리 말

유체가 고체표면 위를 흐르게 되면 유체의 점성으로 인하여 경계층이 형성되며 이러한 경계층내의 속도지연은 상대적으로 질량유통의 감소를 일으켜 유효 유동 단면적의 감소효과를 일으킨다는 것은 일반적으로 잘 알려진 사실이다[1,2]. 이것은 비압축성 유체에서는 물론 압축성 유체유동에서도 개념상 큰 차이가 없다. 유체가 가변성인 경우 경계층은 온도에 의존되며[3], 고속의 압축성유체에서는 온도와 유속이 밀접한 관계를 갖고 있기 때문에 속도, 온도등에 따라 많은 변화[4,5]의 가능성이 예측된다. 또 경계층 유동은 운동량 방정식과 에너지 방정식이 항상 서로 연관되어 있기 때문에 쉽게 해결되지는 않는다. 본 해설에서는 이미 De-Laval 노즐에서 실험적 또는 이론적으로 밝혀진 온도 경계층(thermal boundary layer)과 속도경계층(velocity boundary layer)의 두께관계[6,7,11]를 이용하여 경계층내에서의 밀도변화를 타당성이 있다고 생각되는 대표값을 선정하여 운동량방정식을 에너지 방정식과 독립하여 해결함으로써 수렴—확산노즐의 경계층 특성을 조사하였다. 수학적 모델을 선정하여 벽면온도와 가스정체온도비는 일정하고 용삭등의 마멸현상도 없어 노즐벽면이 일정하다는 가정을 적용하였다. 본 모델의 해석결과는 경계층의 두께관계 가정없이 운동량방정식과 에너지방정식을 동시에 만족시키는 해를 통하여 얻어진 결과와[6,7,11] 별 차이를 일으키지 않았다. 따라서 본 해설에서 사용한 간단한 방법으로 De-Laval(수렴-확산) 노즐에서의 유동특성, 특히 잘 알려지지 않은 경계층 변위두께(배제두께) 등을 이해하는데 도움이 될 것이다.

2. 해　　석

2.1 축대칭 일차원 유동

일차원 유동으로의 가정은 많은 실제적인 유동을 해석하는데 아주 편리한 방법이다. 일차원 유동이 되려면 유선(stream line)들이 평행하고 직선이 되야하는 조건이 선행되어야 한다. 그러나 특별한 경우, 흡입(sink)이나 방출(source)이 있는 경우에는 유선들이 직선으로 흡입쪽으로 수렴하거나 방출쪽에서 확산되어 나가면 이 경우에도 일차원 유동으로 해석한다. 따라서 수렴확산의 De-Laval 노즐도 흡입, 방출의 일차원 유동으로 보면 편리하다. 그림 1은 수렴-확산 노즐의 흡입, 방출모델을 표시한 것이며 점 A는 모든 확산유선들이 시작되는 방출점으로, 또 점 B는 모든 수렴 유선들이 모여드는 흡입점으로 가정한 것이다. 이때 유선들과 수직하여 만곡선으로 표시된 것은 유동 특성치들이 일정한 값을 갖는 구면이 되게된다. 일차원 모델은 그림 1에서 보듯이 노즐목 부위에서는 흡입, 방출점이 일정하지 않으며, 흡입이나 방출점 자체가

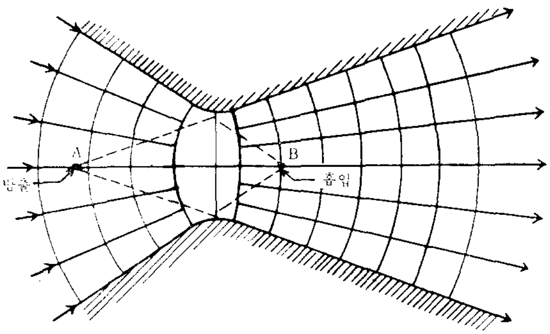

그림 1　수렴-확산 노즐의 흡입, 방출 모델

특별한 의미를 갖고 있는 것은 아니다. 단지 이러한 모델을 선정함으로써 노즐 유동 해석시 경계면 자체를 유선으로 하는 일차원 해석이 가능해진다.

2.2 경계층 해석

이상과 같은 흡입, 방출의 일차원 유동 가정은 자유 유동장 영역에 적용되며 경계면 가까운 곳에서는 점성에 의하여 형성되는 경계층 해석을 적용하여야 한다. 관(pipe)유동의 경우에는 완전 전개된 유동이 일어나는 경우가 많지만 De-Laval 노즐에서는 전개중인 유동이다. 그러므로 이 경우 물체 외부유동에서의 경계층해석을 적용하고 있다[6,7]. 그림 2는 축대칭 물체의 표면 또는 내면 위를 흐르는 일반적인 유동의 경계층을 조사하기 위한 좌표계이다. 검사체적

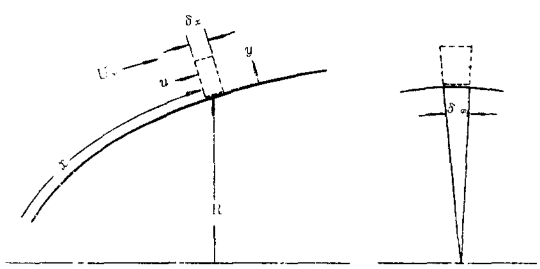

그림 2　축대칭체의 좌표계 및 검사체적

(Control Volume)은 물체표면을 포함하여 선택하고 표면을 따라 X축, 표면과 수직방향으로 Y축으로 정한다. 자유 유동장의 속도를 $U_\infty = U_\infty(x)$로, 곡면은 $R=R(X)$라 한다. 유체의 밀도는 가변성인 경우이다. 경계층의 두께를 δ라 하고 이는 곡면 반경 R에 비하여 아주작은 $\delta \ll R$의 관계를 설정한다. 이와같은 검사체적을 생각하여 질량보존과 운동량 유동식을 적용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다[8].

$$\left[R\delta_\phi\delta_x v_\delta\rho_\delta + R\delta_\phi\int_0^\delta u\rho dy + \delta_\phi\frac{d}{dX}\left(R\int_0^\delta u\rho dy\right)\delta_x\right] = R\delta_\phi\int_0^\delta u\rho dy \qquad (1)$$

$$-\tau_0-\delta\frac{dP}{dX}=\frac{1}{R}\frac{d}{dX}\left(R\int_0^\delta \rho u^2 dy\right)+\rho_\delta v_\delta u_\delta \qquad (2)$$

$$v_\delta\,\rho_\delta = -\frac{1}{R}\frac{d}{dX}\left(R\int_0^\delta u\rho dy\right) \qquad (3)$$

식 (1), (3)을 식 (2)에 대입하고 $u_\delta = U_\infty$로 대치하여 정돈하면 다음과 같은 δ_2에 대한 상미분 방정식을 얻게 된다.

$$\frac{d\delta_2}{dX}+\delta_2\left[\frac{1}{\rho_\infty U_\infty^2}\frac{d}{dX}(\rho_\infty U_\infty^2)+H\frac{1}{U_\infty}\frac{dU_\infty}{dX}+\frac{1}{R}\frac{dR}{dX}\right]=\frac{C_f}{2} \qquad (4)$$

한편

$$\delta_1=\int_0^\delta\left(1-\frac{\rho}{\rho_\infty}\frac{u}{u_\infty}\right)dy \qquad (5)$$

$$\delta_2=\int_0^\delta\frac{\rho u}{\rho_\infty u_\infty}\left(1-\frac{u}{U_\infty}\right)dy \qquad (6)$$

$$H=\delta_1/\delta_2 \qquad (7)$$

의 관계식들이 식 (4)에 이미 적용되었다.

2.3 노즐내의 온도변화

본 해설에서 사용한 모델의 경우 벽면온도와 가스정체 온도비를 일정하게 하였다. 이것은 벽면온도가 노즐의 위치에 따라 다르게 증가되지만 문제를 간단히 하기 위한 가정이다. 이와같이 벽면온도가 일정하다고 하여도 노즐내를 통과하는 가스의 온도는 속도의 변화가 크기 때문에 가스의 정적온도가 변하게 되며 따라서 국부적인 온도비는 위치에 따라 변하게 된다[9].

가스의 정적온도는 정체온도와 마하수에 관계되며

$$T_\infty = T_0 / \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \tag{8}$$

또 마하수는 노즐의 단면적과 노즐목 단면적과의 관계로 연관 되어진다.

$$A/A_t = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{9}$$

여기서 γ는 비열비를 나타내며 식 (8)과 (9)를 사용하면 노즐 위치에서의 정적온도 변화를 알 수 있다. 그림 3은 이러한 가스의 온도변화를 포함하여 압력비, 음속비, 마하수 등을 표시한 것이다. 출구에서의 마하수는 3이며 γ는 1.2이다[10].

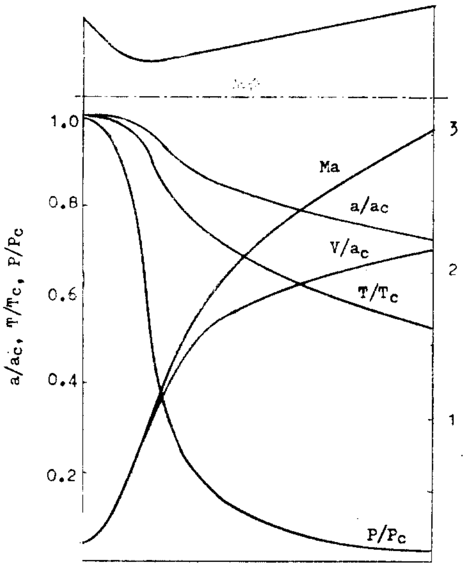

그림 3 노즐에서의 압력온도, 속도등의 변화

3. 수치해석 방법

노즐내에서의 경계층 변화를 알기 위해서는 식 (4)를 풀어야하며 이를 위해서는 경계층내에서의 밀도변화 및 속도변화를 알아야 한다. 속도분포는 난류유동의 7승근 법칙을 사용하고

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{10}$$

밀도분포에 대하여는 $P \sim \frac{1}{T}$의 관계와 함께 이미 알려진 온도경계층 두께가 속도경계층·두께의 3~5배가 된다는 결과에 근거를 두고[6,7] 다음과 같은 방법을 택하였다. 먼저 그림 4를 살펴보면 좌측은 속도, 가운데는 밀도, 맨 우측은 질량유량(mass flux)의 분포이다.

$\delta = \frac{1}{3.5}\delta_t$로 가정하고 그 중간점인 $\frac{1}{7}\delta_t$에서 밀도값을 경계층재에서의 대표값으로 취하면 에너지 방정식과 독립하여 식 (4)를 풀수 있게 된다. 그림에서 알수 있듯이 밀도값이 변하고 있지만 노즐벽 아주 가까운 부분을 제외하고는 평균적인 의미에서 타당한 선정이며, 빗금친 영역 I와 함께 고려해 보면 ρu의 값이 다소 과소평가되는 것으로 간주 할 수 있다.

온도분포 역시 7승근 법칙에 따라

$T = \left[\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{\frac{1}{7}}\left(T_0 - T_w\right)\right] + T_w$로 표시되며

$T_{\frac{1}{2}\delta} = T_{\frac{1}{7}\delta_t} = \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{7}}\left(T_0 - T_w\right)\right] - T_w$가 되고 이것을 경계층내에서의 대표값으로 하면 식 (5), (6) 적분항에 포함된 밀도비는 식 (11)이 된다.

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T_\gamma} = \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{7}}\left(\frac{T_0}{T_\infty} - \frac{T_w}{T_\infty}\right) + \frac{T_w}{T_\infty}} \tag{11}$$

다음으로 식 (4)우변의 표면 마찰계수항, $\frac{C_f}{2}$에 대하여는 압축성 가스에 대한 보정계수 σ를 적용한후 식 (4)에 $\delta_2^{\frac{1}{4}}$를 곱하면 식 (12)가 된다.

$$\frac{d\delta_2}{dX} + 5/8 d_2^{5/4}\left[\frac{M^2 - 2H - 3}{1 - M^2}\right]\frac{d}{dX}\ln\,(A/A_t) = 5/4\,(0.0225)\,\sigma\left[\frac{\mu_0}{\rho_{tw} U_{t\infty}}(\delta_2/\delta)\right.\left.(A/A_t)\right]^{\frac{1}{4}} \tag{12}$$

또 σ는 국부위치에 따라 밀도와 점성 계수를 보정하는 인자로서 자세한 것은 참고문헌 9에

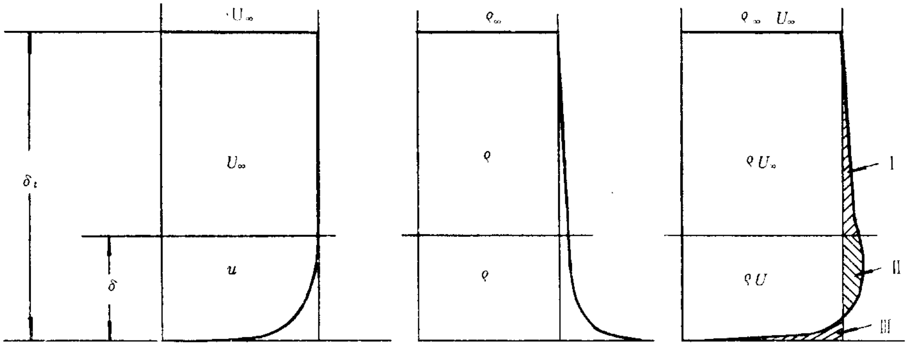

그림 4 경계층과 속도, 밀도 질량의 분포

나타나 있다. 식 (8), (9)를 사용하여 Newton-Raphson 방법으로 각 위치에서의 마하수를 구하고 식 (12)를 Runge-Kutta 방법으로 계산한다. 이때 일차원 유동 모델과 같이 노즐벽면을 따라 X축 노즐벽에 수직으로 Y축 또 노즐의 축방향을 Z축으로 한다.

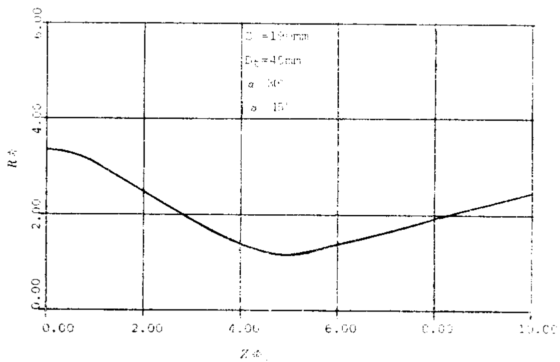

그림 5 무차원 노즐 형상도

4. 수치결과 및 고찰

그림 5와 같은 노즐의 형상에 연소실 압력, P_0는 20.5기압 연소실 가스 정체온도, T_0는 2500°K, 그리고 비열비 γ는 1.2와 정체온도하에서 점성계수, μ_0는 6.21×10^{-4}g/cm·sec 또 노즐목에서의 특성치로 $\rho_{t\infty}U_{t\infty}=135.0$g/cm²·sec를 갖는 것에 대하여 수치결과를 조사하였다. 노즐은 수렴반각이 30°이고 확산반각은 15°, 또 노즐의 중심축 길이 Z는 190mm이다. 표 1과 2에는 경계층의 형태를 나타내 주는 특성치들의 계산결과를 주어진 온도비에 따라 표시하였다.

표 1은 벽면온도와 가스정체 온도비가 0.4이

표 1 De-Laval 노즐의 일정 벽면 온도 ($T_w/T_0=0.4$)하에서의 경계층변화를 나타내는 특성값

면적비 (A/A_t)	마하수	배제두께 (δ_1/δ)	운동량두께 (δ_2/δ)	형상계수 (δ_1/δ_2)
3.26	0.18	−0.0289	0.114	−0.253
1.33	0.51	−0.0262	0.114	−0.229
1.00	1.00	−0.0174	0.113	−0.153
1.33	1.63	0.0019	0.110	0.017
1.98	2.05	0.0190	0.109	0.174
3.68	2.55	0.0444	0.106	0.419

표 2 De-Laval 노즐의 일정 벽면 온도 ($T_w/T_0=0.8$) 하에서의 경계층 변화를 나타내는 특성값

면적비 (A/A_t)	마하수	배제두께 (δ_1/δ)	운동량두께 (δ_2/δ)	형상계수 (δ_1/δ_2)
3.26	0.18	0.0795	0.102	0.779
1.33	0.51	0.0840	0.102	0.823
1.00	1.00	0.0979	0.100	0.979
1.33	1.63	0.1280	0.096	1.333
1.98	2.05	0.1537	0.094	1.635
3.68	2.55	0.1903	0.089	2.138

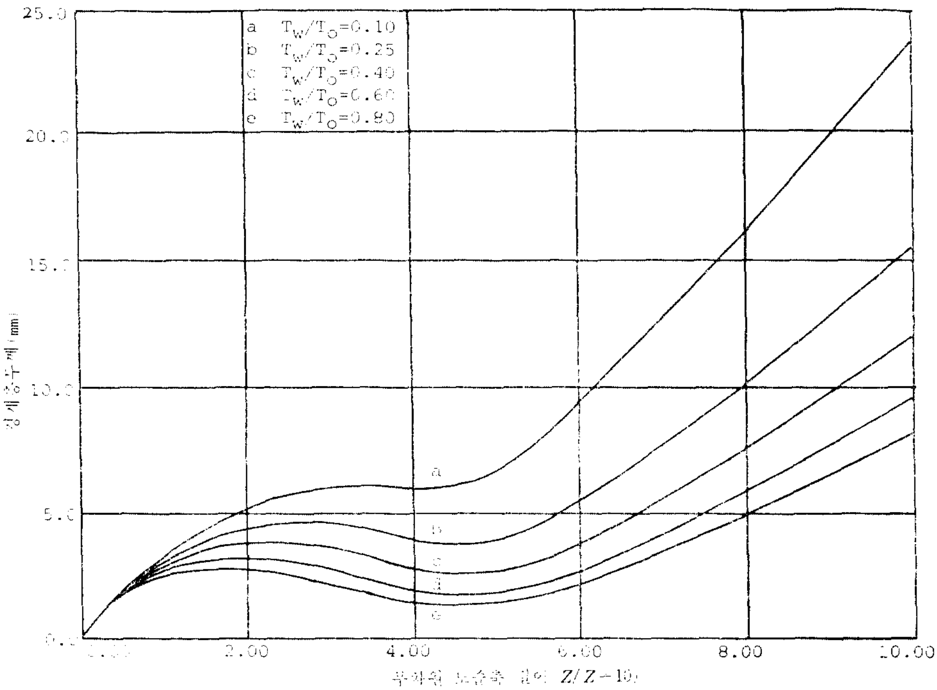

그림 6 경계층 두께

고 표 2는 0.8에 대한 것으로 온도비가 낮은 0.4의 아음속 영역에서는 배제두께, δ_1과 형상계수가 음의 값을 나타내다가 초음속 영역에서는 양의 값으로 바뀌고 있으며 온도비가 높은 표 2에서는 모두가 양의 값이다. 이것은 온도비가 낮더라도 초음속 영역에 이르면 가스의 정적온도 자체도 떨어지게 되어 가스온도와 벽면온도비, (T_w/T)는 점차 커져 밀도비의 차가 적어지기 때문이며 온도비가 비교적 큰 경우에는 처음부터 밀도비에 대한 효과가 나타나지 않기 때문이다. 그림 6부터 8에는 경계층 두께, 운동량 두께, 배제두께등을 보여주고 있다. 그림 6의 경계층 두께는 온도비 (T_w/T_0)가 작을수록 경계층 두께가 커지고 있다. 이것은 그림 7의 운동량 두께 변화와 같은 경향으로서 운동량 두께는 식 (6)을 보면 알 수 있듯이 온도비가 1보다 작으면 작아질수록 밀도비 값이 점점 1보다 커지게 되어 운동량 두께도 커지게 된다.

경계층 두께의 온도에 대한 변화는 이러한 운동량두께의 변화와 같은 경향을 보여주는 것이며, 노즐을 따라서는 노즐목 부위에서 두께가 가장 작다가 그 이후 다시 증가하고 있는데 이것은 노즐목 수렴부위에서 속도증가율이 상대적으로 큰 때문이다. 끝으로 그림 8은 경계층 배제두께를 보여주고 있다. 이것은 밀도가 일정하다고 가정되는 비압축성 유체의 경우와는 많은 차이를 나타낸다. 경계층 배제두께의 개념은 서론에서 논한 것처럼 경계층내에서의 속도지연 때문에 생긴 유동면적 감소에 상응하는 두께이다. 따라서 일반적으로 이 값은 양(+)으로 생각되어 지고 있다. 그러나 압축성 유체의 경우 밀도차가 큰 역할을 하게되고 온도비가 작아지면 보통때의 관념과는 달리 배제두께가 음(−)의 값을 갖게된다. 이것은 벽쪽에 저온 고밀도 가스가 흐르게 되어 속도지연을 보상하고도 남기 때문이다. 이러한 배제두께에 대하여 그림 4 우측의 질량유동을 살펴보자.

영역 I과 영역 II는 자유 유동장에서 보다 밀

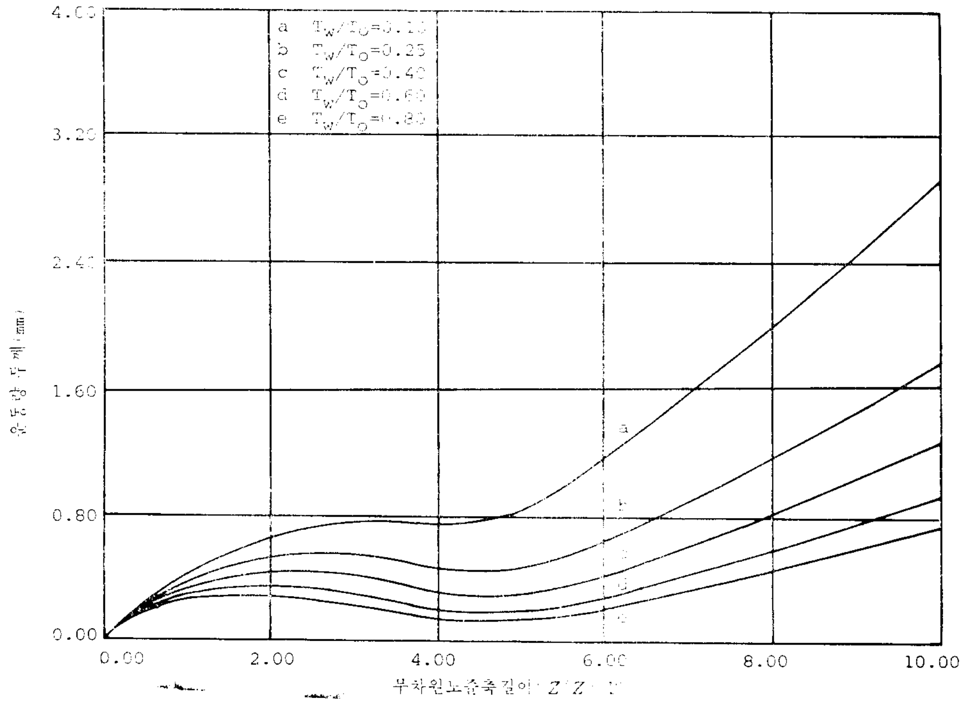

그림 7 운동량 두께

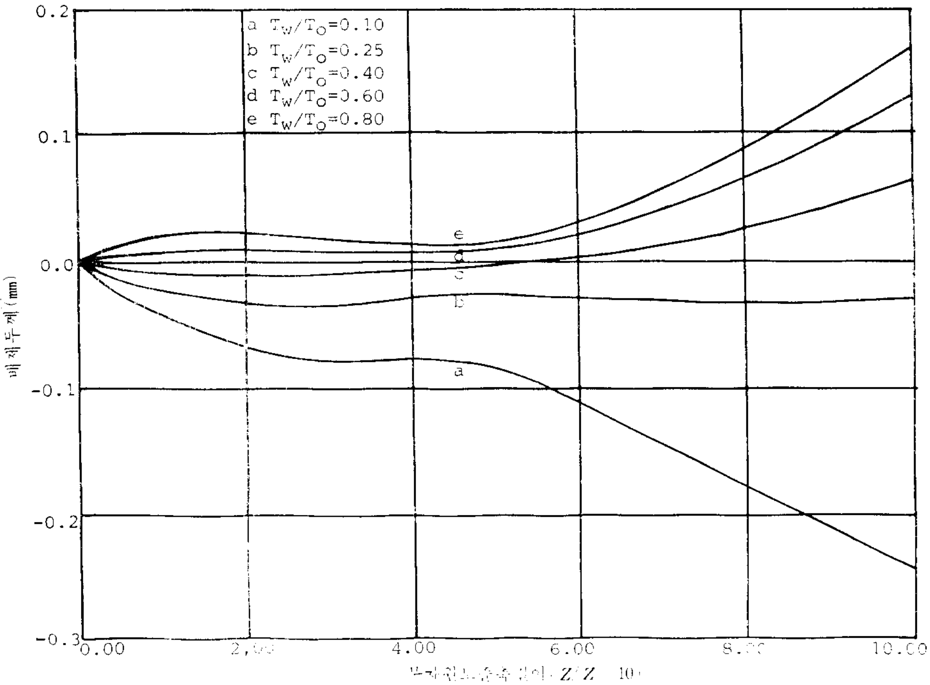

그림 8 배제 두께

도가 크기 때문에 상대적으로 질량유동이 큰 부분이고 영역 Ⅲ은 흔히 생각하는 질량유동이 작은 부분이다. 영역 Ⅲ에서 밀도는 가장크며 영역 Ⅰ의 속도는 자유 유동장과 같고 밀도는 온도경계층 내이므로 온도경계층 바깥보다 큰 부분이다. 이러한 배제두께의 변화는 추진기관의 압력변화에도 영향을 주게 된다.

5. 맺음 말

이상으로 De-Laval 노즐에서 경계층 배제두께의 음수현상에 대하여 수학적 모델을 통한 수치 고찰 한 결과 배제두께 뿐만 아니라 다음과 같은 경계층의 특성을 알 수 있었다.

(1) 온도비 (T_w/T_0)가 작아질수록 경계층 두께가 상대적으로 커진다.

(2) 운동량두께의 변화도 단열벽면이 아닌 경우에는, 비압축성(ρ=const) 유체 보다. 온도비가 작을수록 항상 커진다.

(3) 경계층 배제두께는 온도비가 작은 경우 음(−)의 값을 나타내고 있어, 유효유동 단면적의 확대 현상을 보이고 있다.

참 고 문 헌

(1) H. Schlichting, Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, 1968
(2) F.M. White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, 1974
(3) J.N. Chung, Tae-Ho Chang, A Mathematical Model of a Condensation Heat and Mass Transfer in a Pure Vapor, ASME J. of Heat Transfer, Vol. 106, No. 2, 1984
(4) M. Sichel, Effect of the Boundary Layer upon the Flow in a Conical Hypersonic Nozzle, AIAA J. Vol. 2, 1964
(5) R.L. Thornock, E.F. Brown, An Experimental Study of Compressible Flow Through Convergent Nozzles, J. of Basic Engineering, 1972
(6) J.P. Harnett, T.F. Irvine Jr., Advances in Heat Transfer, Vol. 2, pp. 1~109, 1965
(7) L.H. Bach, R. F. Cuffel, P. F. Massier, Laminarization of a Turbalent Boundary Layer in a Nozzle Flow, J. of Heat Transfer, 1970
(8) W.M. Kays, M.E. Crawford, Convective Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1980
(9) 장태호, 고온 고속 연소관 노즐에서 점성소산에 의한 특성치와 열복사가 열전달에 미치는 영향, 한국항공우주학회지, 제 13 권 제 2 호, pp. 42~54, 1985
(10) J.W. Cornellisse, Rocket Propulsion and Space Flight Dynamics, Pitman Publishing, London, 1979
(11) 장태호, 이방업, 배주찬, 수학적 모델을 통한 De-Laval 노즐의 난류경계층 특성, 대한기계학회 춘계학술대회 초록집, pp. 225~229, 1986