連續體力學의 基礎的 概要(II)

朴 鎭 武
<고려대학교 기계공학과 교수>

4. 보존원리 (Conservation Principles)

연속체가 운동하면 그 질량밀도, 속도, 변형율, 응력, 내부에너지밀도등, 제반 상태가 시간에 따라 변화하며 그 변화를 지배하는 자연법칙은 보존원리로 표현된다. 즉, 물체의 한 부분 P가 닫힌계(closed system)라면 외형적인 변화에도 불구하고 불변의 기본량 $A(P)$가 존재하여

$$\frac{d}{dt}A(P)=0 \tag{41}$$

부분 P가 외계와 상호작용하는 열린 계(open system)이면 기본량의 변화는 그 공급과 같다는 균형원리(balance principle), 즉,

$$\frac{d}{dt}A(P)=\frac{d}{dt}\int_P a dv=\int_P b dv+\int_{\partial P} i_n d_a \tag{42}$$

에 따른다. 윗 식에서 a는 기본량 A의 밀도, b와 i_n은 각각 체적과 표면을 통하여 공급되는 기본량을 표시한다. 이하 질량, 운동량, 운동량의 모우멘트 및 에너지의 보존에 관한 구체적 결과를 도출하기 위한 예비로서 먼저 수송정리(transport theorem)을 정립한다.

식 (42)에서 밀도 a가 공간적 기술 $a^{(E)}$로 표시된 경우에는 적분영역 P가 시간에 따라 변화하므로 기준적 기술 $a^{(L)}$로 바꾸고 식 (40)을 이용하면

$$\frac{d}{dt}\int_P a^{(E)}dv=\frac{d}{dt}\int_{P_0} a^{(L)}JdV=\int_{P_0}(\dot{a}^{(L)}+a^{(L)}\mathrm{div}v)JdV$$
$$=\int_P(\dot{a}^{(E)}+a^{(E)}\mathrm{div}\underset{\sim}{v})dv, \tag{43}$$

즉, 수송정리,

$$\frac{d}{dt}\int_P a^{(E)}dv=\int_P(\dot{a}^{(E)}+a^{(E)}\mathrm{div}\underset{\sim}{v})dv \tag{44}$$

를 얻는다. 또한 식 (35)로부터,

$$\frac{d}{dt}\int_P a^{(E)}dv=\int_P\frac{\partial a^{(E)}}{\partial t}dv+\int_{\partial P}a^{(E)}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}da \tag{45}$$

계 P를 일정한 질점들로 구성된 부분(material volume)으로 잡으면 질량 $M(P)$는 보존되므로

$$\frac{d}{dt}M(P)=\frac{d}{dt}\int_P\rho^{(E)}dv=0$$

수송정리 (44)에 의하여

$$\int_P[\dot{\rho}^{(E)}+\rho^{(E)}\mathrm{div}\underset{\sim}{v}]dv=0$$

윗 식은 임의의 부분 P에서 만족되어야하고 밀도장 $\rho^{(E)}$가 연속이면 국소적으로도 성립해야하므로[4] 다음 연속방정식을 얻는다.

$$\dot{\rho}^{(E)}+\rho^{(E)}\mathrm{div}\underset{\sim}{v}=0,$$

또는

$$\frac{\partial\rho^{(E)}}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho^{(E)}\underset{\sim}{v})=0 \tag{46}$$

기준적 기술법을 쓰면

$$\int_P\rho^{(E)}dv=\int_{P_0}\rho^{(L)}JdV=\int_{P_0}\rho_0 dV$$

국소적 관계식은

$$\rho^{(L)}J=\rho_0 \tag{47}$$

---

* 본 강좌(I)은 대한기계학회지 제25권 제6호('85.12) pp. 497~501에 게재되었음.

윗 식에서 ρ_0은 기준배치에서 질량밀도를 표시한다.

운동량의 균형식을 도출하기 위하여 P부분에 작용하는 힘 $\underset{\sim}{f}(P)$를 P의 체적에 따라 결정되는 체적력 $\underset{\sim}{f}_B(P)$와 ∂P의 표면적의 함수인 표면력 $\underset{\sim}{f}_C(P)$로 분류하고 각각 그 밀도로 표시하면

$$\underset{\sim}{f}(P)=\underset{\sim}{f}_B(P)+\underset{\sim}{f}_C(P),$$

$$\underset{\sim}{f}_B(P)=\int_P \underset{\sim}{b}dm=\int_P \rho\underset{\sim}{b}dv, \tag{48}$$

$$\underset{\sim}{f}_C(P)=\int_{\partial P}\underset{\sim}{t}da$$

힘의 밀도 $\underset{\sim}{b}$와 $\underset{\sim}{t}$는 모두 $\underset{\sim}{x}$와 t의 함수인데, $\underset{\sim}{t}$는 추가적으로 작용면 요소 da의 방향 $\underset{\sim}{n}$에 따라 다르므로,

$$\underset{\sim}{t}=\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{x},t\,;\underset{\sim}{n})\equiv\underset{\sim}{t}^{(\underset{\sim}{n})}(\underset{\sim}{x},t)$$

특히 $\underset{\sim}{n}$이 기준벡터이면

$$\underset{\sim}{t}^{(\underset{\sim}{i}_r)}=t_s^{(\underset{\sim}{i}_r)}\underset{\sim}{e}_s=\sigma_{rs}\underset{\sim}{e}_s, \tag{49}$$

$$\sigma_{rs}\equiv t_s^{(\underset{\sim}{i}_r)}$$

윗 식에서 σ_{rs}는 $\underset{\sim}{i}_r$ 좌표면에 작용하는 표면력 밀도의 s방향 성분을 지시하는데, 이들이 응력"텐서"의 성분인것은 다음 Cauchy의 기본정리[9]로 비로소 밝혀진다.

$$t^{(n_r\underset{\sim}{i}_r)}{}_s=\sigma_{rs}n_r \tag{50}$$

즉, 응력텐서는 $\underset{\sim}{n}$과 $\underset{\sim}{t}$ 사이의 선형연산자로 볼 수 있다.

부분 P의 운동량 균형원리는

$$\frac{d}{dt}\int_P \underset{\sim}{v}\rho dv=\int_P \rho\underset{\sim}{b}dv+\int_{\partial P}\underset{\sim}{t}^{(\underset{\sim}{n})}da \tag{51}$$

식 (49) 및 발산정리 (21)을 써서 정리하면

$$\int_P[\rho\dot{v}_s-\rho b_s-\sigma_{rs,r}]dv=0$$

피적분함수가 연속이고 P가 임의의 부분이므로

$$\sigma_{rs,r}+\rho b_s=\rho\dot{v}_s \tag{52}$$

이것이 공간적 기술법에서의 운동방정식 즉, 운동량 균형식의 국소적 형태이다.

운동량의 모우멘트 균형은

$$\frac{d}{dt}\int_P \underset{\sim}{x}\times\underset{\sim}{v}\rho dv=\int_P \underset{\sim}{x}\times\rho\underset{\sim}{b}dv+\int_{\partial P}\underset{\sim}{x}\times\underset{\sim}{t}^{(\underset{\sim}{n})}da$$

운동량 균형과 같은 방법으로 정리하면

$$\sigma_{rs}=\sigma_{sr} \tag{53}$$

다시 말하면 우력응력(couple stress)[10]을 무시한 경우 Cauchy의 응력텐서는 대칭이 된다.

기준적 기술법에서는 운동량 및 그 모우멘트의 균형원리가 각각 다음과 같이 정립된다[4].

$$P_{Ai,A}+\rho_0 b_i=\rho_0\dot{v}_i, \tag{54}$$

$$x_{i,A}P_{Aj}=x_{j,A}P_{Ai}$$

윗 식에서 P_{Ai}는 (제 1 종의) Piola-Kirchhoff 응력텐서로서 Cauchy 응력텐서 σ_{ij}와의 관계는 다음과 같다.

$$P_{Ai}=J\sigma_{ji}X_{A,j}, \tag{55}$$

$$\int_{\partial P}n_j\sigma_{ji}da=\int_{\partial P_0}N_A P_{Ai}dA$$

위와 같이 P_{Ai}는 기준배치 단위면적당 힘을 지시하므로 공칭응력 텐서라고도 한다.

단위질량당 내부에너지 및 복사열전달을 각각 $\varepsilon(\underset{\sim}{x},t)$와 $r(\underset{\sim}{x},t)$라 하고, 단위표면적에서 열전도로 인한 열유출량을 $h^{(\underset{\sim}{n})}$라 하면, 부분 P의 내부에너지 $E(P)$와 열공급 $H(P)$는 각각 다음과 같다.

$$E(P)=\int_P \varepsilon\rho dv,$$

$$H(P)=\int_P \rho r dv-\int_{\partial P}h^{(\underset{\sim}{n})}da$$

또 P의 운동에너지 $K(P)$와 외력의 일률 $W(P)$

$$K(P)=\int_P \frac{1}{2}\rho\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}dv,$$

$$W(P)=\int_P \rho\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{v}dv+\int_{\partial P}\underset{\sim}{t}^{(\underset{\sim}{n})}\cdot\underset{\sim}{v}da$$

에너지 균형식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}[E(P)+K(P)]=H(P)+W(P)$$

윗 식을 식 (21), (44), (46), (52)를 써서 정리하고 국소적 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\rho r-q_{i,i}-\rho\dot{\varepsilon}+d_{ji}\sigma_{ji}=0 \tag{56}$$

윗 식에서 q_r은 열플럭스로서 $h^{(\underset{\sim}{i}_r)}$에 해당하며, $d_{ji}\sigma_{ji}$는 응력동력(stress power)으로서 외력들의 일률중 운동에너지 증가에 소모되지 않은 부분에 해당한다.

5. 구성방정식(Constitutive Equations)

제 4 절에서 취급한 보존원리는 모든 물체에

적용되는 기본원리이므로 그것만으로 물체의 개별적인 거동을 완전하게 해석할 수 없다. 따라서 제 4절의 국소적 방정식(장방정식)들에 추가하여 각종 연속체의 특성을 나타내는 구성방정식으로 보충해야한다. 구성방정식을 합리적으로 세우기 위해서는, 물질일반의 미시적 상태에 대한 기본해석에서 출발하여 각 물체의 개별적인 구성을 통계적으로 반영 종합하는 방법을 생각할 수 있으나 이와 같은 방법은 아직 극히 제한된 경우에만 유용한 결과를 내고 있는 것으로 보인다.[11]

한편 연속체의 구성방정식은 결국 거시적인 실험으로 검증되어야 한다. 그러나 연속체의 일반적인 구성방정식의 정립은 매우 광범위한 문제로서 단순한 실험결과들의 누적만으로는 도저히 해결될 수 없는 문제이다. 따라서 구성방정식의 기본공준, 관련 변수들의 선정 및 분류, 물질응답함수(material response function)의 제한성, 실험결과의 해석과 정리등 구성방정식이론에 관한 활발한 연구가 계속되고 있다.[12]

이 개요에서는 등온거동(isothermal behavior)에 관한 순수한 역학적 구성방정식에 국한하여 물질응답의 객관성원리(objectivity principle)를 살펴보고 점성유체의 역학과 유한탄성이론에 구체적으로 적용해 본다. 이와 같은 고찰은 그 이론들의 근본 및 상관관계를 밝혀주고, 소성이론, 점탄성이론과 같은 고차적 물질응답의 해석에 기본이 될 뿐 아니라 실험적 연구 일반의 합리적 계획에도 참고가 되리라 생각한다.

순수한 역학적 구성방정식은 응력텐서와 타당한 운동학적 변수의 관계로 성립된다. 많은 운동학적 변수중에서 어느 것을 선택해야하는가 불분명하므로, 응력은 물체가 겪은 전 운동과정에 의해서 결정된다는 자명한 명제에서 시작한다. 즉 응력은 다음과 같은 일련의 운동학적 변수들에 의하여 결정된다.

$$\{\underset{\sim}{x}\ (\text{또는}\ \underset{\sim}{X}), \dot{\underset{\sim}{x}}, \underset{\sim}{F}, \dot{\underset{\sim}{F}}, \underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{\nabla}\dot{\underset{\sim}{F}}, \underset{\sim}{\nabla}^2\underset{\sim}{F}, \cdots\}$$

물체내의 한 점의 응력은 특수한 원격작용(action-at-a-distance)을 제외하면 그 점 주위의 국소적 작용(local action)으로 결정되므로 단순한 물체의 경우에는 위 변수들 가운데 공간변수 $\underset{\sim}{X}$에 관한 2차이상의 도함수는 제거된다. 한편 시간에 관한 일련의 도함수를 고찰하면, 외력을 받아 변형된 탄성체에서 외력을 제거할 때 변형의 과정에 관계없이 외력을 받기전의 자연적 상태로 되돌아간다. 비유하면 탄성체는 자연적 상태만을 기억하고 변형과정은 전혀 기억하지 못 하므로 응력은 최종변형과 자연적 상태의 비교만으로 결정되고 그 과정을 묘사하는 일련의 시간도함수들은 관계가 없음을 추론할 수 있다.

$$\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{X}) \tag{57}$$

반면에 점성유체는 최초상태를 기억하지 못하고 변형과정중 최근의 짧은 기억만을 갖는 특징이 있으므로 그 응력은 다음과 같이 시간에 관한 일차 도함수만으로 결정된다고 할 수 있다.

$$\underset{\sim}{\sigma}+p\underset{\sim}{I}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, \dot{\underset{\sim}{x}}, \dot{\underset{\sim}{F}}) \tag{58}$$

윗 식에서 $p\underset{\sim}{I}$는 운동과 관계없이 존재하는 정수압을 표시한다.

식 (57)과 (58)은 물질의 기억능력이라는 비유적 측면에서 두 극단의 경우인 탄성체와 점성유체의 특징을 표시하며, 더 정확히 말하면, 이 물체들의 이상적 모델을 정의하는 것이다.

식 (57)과 (58)을 실험으로 결정하는 과정을 생각하면, 함수 f와 g는 물질응답이란 자연법칙을 표현하는 것으로 관측자의 개별적 관점을 초월하는 객관적(material objectivity 또는 frame-indifference)[9,13] 원리를 만족해야 한다. 바꾸어 말하면 정지된 실험실에서 물질응답에 관한 실험을 하거나, 비행기 안과 같이 전체적으로 강체운동을 하는 실험실에서 하거나 결과는 불변(invariance under superposed rigidbody motion)[5]이어야 하는 원리를 만족해야 한다.

연속체의 운동이 강체운동인 경우는 식 (22)가 다음과 같이 간단하게 된다.

$$\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{c}(t)+\underset{\sim}{Q}(t)(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{C}), \tag{59}$$

$$\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T=\underset{\sim}{I}, \quad \det\underset{\sim}{Q}=1 \tag{60}$$

강체운동의 속도는

$$\dot{\underset{\sim}{x}}=\dot{\underset{\sim}{c}}+\underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{C}),$$

$$\underset{\sim}{\Omega}=\dot{\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{Q}^T=-\underset{\sim}{\Omega}^T \tag{61}$$

임의의 운동 $\underset{\sim}{\hat{x}}: \underset{\sim}{X} \mapsto \underset{\sim}{x}$에 추가적으로 강체운동을 중첩한 운동을 $\underset{\sim}{\hat{x}}^*: \underset{\sim}{X} \mapsto \underset{\sim}{x}^*$라 하면 식 (59)에 의하여

$$\underset{\sim}{x}^* = \underset{\sim}{c}^*(t) + \underset{\sim}{Q}(t)[\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{c}(t)] \tag{62}$$

속도는

$$\underset{\sim}{v}^* = \dot{\underset{\sim}{c}}^* + \underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x}^* - \underset{\sim}{c}^*) + \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{v} - \dot{\underset{\sim}{c}}) \tag{63}$$

속도구배(velocity gradient), $\underset{\sim}{L}$은

$$\underset{\sim}{L}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{\Omega} \tag{64}$$

속도구배의 대칭부분 $\underset{\sim}{D}$와 비대칭부분 $\underset{\sim}{W}$는 각각,

$$\underset{\sim}{D}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Q}^T, \quad \underset{\sim}{W}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{W}\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{\Omega} \tag{65}$$

강체운동에서는 길이, 면적, 및 체적요소가 불변이므로 질량밀도도 변화하지않는다. 또한 법선 및 견인(traction) 벡터의 회전을 고려하면

$$\underset{\sim}{\sigma}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\sigma}\underset{\sim}{Q}^T \tag{66}$$

균질 점성유체의 경우 구성방정식 (58)에서 변수 $\underset{\sim}{x}$가 제거되고, $\dot{\underset{\sim}{F}}$를 대칭부분 $\underset{\sim}{D}$ 및 비대칭부분 $\underset{\sim}{W}$로 분해하여 쓰면

$$\underset{\sim}{\sigma} + p\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{W}, \underset{\sim}{v}) \tag{67}$$

식 (63), (65), (66)과 중첩된 강체운동에서 불변원리로부터

$$\underset{\sim}{\sigma}^* + p^*\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{D}^*, \underset{\sim}{W}^*, \underset{\sim}{v}^*) \tag{68}$$

강체운동에서는 압력이 불변($p^* = p$)이므로 식 (67)과 (68)에서

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{D}^*, \underset{\sim}{W}^*, \underset{\sim}{v}^*) = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{W}, \underset{\sim}{v})\underset{\sim}{Q}^T \tag{69}$$

식 (69)는 임의의 중첩된 강체운동에서 언제나 성립해야 한다. 그런데 $\underset{\sim}{Q}(t_1) = \underset{\sim}{I}$, $\dot{\underset{\sim}{Q}}(t_1) \neq 0$인 순간 t_1에는 $\underset{\sim}{D}^* = \underset{\sim}{D}$이나 $\underset{\sim}{W}^* = \underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{\Omega}$이므로 $\underset{\sim}{W}$는 응력을 결정하는 변수가 될 수 없다. 같은 방법으로 속도 $\underset{\sim}{v}$도 제외된다. 즉

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Q}^T) = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{D})\underset{\sim}{Q}^T \tag{70}$$

식 (58)에서 도입한 임의의 물질응답함수 $\underset{\sim}{f}$는 이론적 해석만으로 식 (70)을 만족해야하며 따라서 $\underset{\sim}{D}$만의 등방성 함수(isotropic function)임이 밝혀졌다. 등방성함수 $\underset{\sim}{f}$를 전개하면[2]

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{D}) = \phi_0\underset{\sim}{I} + \phi_1\underset{\sim}{D} + \phi_2\underset{\sim}{D}^2 \tag{71}$$

윗 식에서 ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2는 $\underset{\sim}{D}$의 세 불변량(invariant)만의 함수이며 그 구체적 관계는 실험으로 결정될 수 있다.

ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2의 결정실험과 식 (58)의 응답함수 $\underset{\sim}{f}$를 맹목적으로 결정하려는 실험을 비교하면 그 차이는 실로 막대하며 구성방정식이론의 중요성을 알 수 있다.

구성방정식이 식 (71)로 표시되는 물체를 Reiner-Rivlin 유체라하고 그 특례로서 ϕ_0는 제 1 불변량 $T_r\underset{\sim}{D}$에 비례하고 ϕ_1은 상수, $\phi_2 = 0$인 유체를 Newton 유체라 한다. 즉

$$\underset{\sim}{\sigma} + p\underset{\sim}{I} = \lambda(T_r\underset{\sim}{D})\underset{\sim}{I} + 2\mu\underset{\sim}{D} \tag{72}$$

윗식에서 λ와 μ는 점성계수이다.

균질 탄성고체의 경우 운동 $\underset{\sim}{\hat{x}}$로 인한 응력은 식 (57)로부터

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{F}) \tag{73}$$

$\underset{\sim}{\hat{x}}$에 강체운동을 중첩한 운동 $\underset{\sim}{\hat{x}}^*$로 인한 응력은

$$\underset{\sim}{\sigma}^* = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{F}^*),$$

즉, $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\sigma}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F})$

그러므로,

$$\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{F})\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}) \tag{74}$$

변형구배 $\underset{\sim}{F}$를 극분해(Polar decomposition)하면[14]

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U} \tag{75}$$

여기서 $\underset{\sim}{R}$은 국소적 회전을 표시하는 진직교(proper orthogonal)텐서이고 $\underset{\sim}{U}$는 우신장(right stretch)텐서이다. 탄성체의 응답함수 $\underset{\sim}{g}$에 관한 구속조건을 표시하는 식 (74)에서 $\underset{\sim}{Q}$를 특별히 식 (75)의 $\underset{\sim}{R}^T$로 취하면

$$\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{F})\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}) = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{U}) \tag{76}$$

그러므로

$$\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{U})\underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}\underset{\sim}{\bar{g}}(\underset{\sim}{U})\underset{\sim}{R}^T$$

식 (26)에서 $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{U}^2$이므로 균질 탄성체의 유한변형에 관한 구성방정식은 다음과 같이 된다.

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{\bar{g}}(\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{F}^T \tag{77}$$

기준배치에서 기준벡터 $\underset{\sim}{I}_A$를 $\underset{\sim}{I}_A'$로 변환하면

$$\underset{\sim}{I}_A' = Q_{AB}\underset{\sim}{I}_B, \quad \underset{\sim}{C}' = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{Q}^T$$

$$\underset{\sim}{\bar{g}}' = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\bar{g}}\underset{\sim}{Q}^T, \quad \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{Q}^T \tag{78}$$

탄성체가 등방성인 경우에는 모든 진직교텐서 $\underset{\sim}{Q}$에 대하여 $\underset{\sim}{\bar{g}}' = \underset{\sim}{\bar{g}}$이므로 식 (77)로 부터

$$\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{\bar{g}}(\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{F}'\underset{\sim}{\bar{g}}(\underset{\sim}{C}')\underset{\sim}{F}'^T = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{\bar{g}}(\underset{\sim}{C}')\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}^T$$

즉

$$\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\bar{g}}(\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{\bar{g}}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{Q}^T) \tag{79}$$

등방성 함수 $\underset{\sim}{\bar{g}}$를 전개하면

$$\tilde{g}(\underset{\sim}{C}) = \phi_0 \underset{\sim}{I} + \phi_1 \underset{\sim}{C} + \phi_2 \underset{\sim}{C}^2 \qquad (80)$$

6. 맺음 말

제 4 절에서 얻은 연속체 일반의 장방정식들을 제 5 절에서와 같이 각종 물질의 구성방정식으로 보충하므로써, 탄성이론, Newton 유체역학, 비 Newton 유체역학, 소성이론, 점탄성이론, 비균질체역학, 연속체 일반의 열역학…등의 기본적 이론체계를 구성할 수 있다. 또 합당한 경계조건과 함께 구체적 해를 얻는 다양한 연구로 이어진다. 이에 대한 독자의 편의를 위하여 몇개의 문헌을 뒤에 나열한다.[8,15,16,17,18,19]

공학의 한 분야에 전문적인 지식을 얻기 위해서는 공학일반(engineering science)에 대한 선명한 이해가 필수적이며 이를 위해 연속체이론이 꾸준히 연구되고 있다. 그러나 이와 같은 방대한 체계를 E_3해석학의 틀 속에서 선명하게 파악하려하는 것은 어려운 일이다. 결국 대역적해석학(global analysis)의 응용[3,5,20,21,22]이 불가피하지 않나 생각된다. 이 방향의 연구가 선진국에서도 아직 소수의 학자들에 국한된 실정이나, 우리 공학의 획기적 발전을 위하여 독자들의 노력이 계속되었으면 한다.

참 고 문 헌

(9) C. Truesdell, A First Course in Rational Continuum Mechanics, Vol. 1, Academic Press, 1977

(10) W. Jaunzemis, Continuum Mechanics, Mamillan, 1967

(11) E. Lifshitz and L.Pitaevskii, Physical Kinetics, Pergamon, 1981

(12) E. Billington and A. Tate, The Physics of Deformation and Flow, McGraw-Hill, 1981

(13) C. Kittel, W. Knight and M. Ruderman, Mechanics, Berkeley Physics Course, Vol. 1, McGraw-Hill, 1973

(14) M. Gurtin, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, 1981

(15) C. Truesdell (ed.), Mechanics of Solids(4 Vols), Springer-Verlag, 1984

(16) B. Coleman, H. Markovitz and W. Noll, Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids, Springer-Verlag, 1966

(17) L. Kachanov, Fundamentals of the Theory of Plasticity MIR Publishers (Moscow) 1974

(18) Y. Rabotnov, Elements of Hereditary Solid Mechanics, MIR Publishers (Moscow), 1980

(19) W. Day, The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory, Springer-Verlag, 1970

(20) Y. Choquet-Bruhat, et al. Analysis, Manifolds and Physics, North-Holland, 1982

(21) R. Abraham and J. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin/Cummings, 1978

(22) J. Marsden, Lectures on Geometrical Methods in Mathematical Physics, CBMS Vol. 37, SIAM, 1981