행렬의 고유치의 수치해법

李 斗 星
<建國大學校 數學科 敎授>

1. 머리 말

고유치는 여러 공학문제에서 중요하다. 예를 들어 비행기의 안전성은 어떤 행렬(matrix)의 고유치에 의해서 결정된다. 보의 고유진동수는 실제로 행렬의 고유치이다. 좌굴(buckling) 해석도 행렬의 고유치를 구하는 문제이다. 고유치는 여러 수학적인 문제의 해석에서도 자연히 발생한다. 상수계수 一階연립상미분방정식의 해는 그 계수행렬의 고유치로 구할 수 있다. 또한 행렬의 제곱의 수렬 $A, A^2, A^3, \cdots$의 거동은 A의 고유치로서 가장 쉽게 해석할 수 있다. 이러한 수렬은 연립일차방정식(비선형)의 반복해에서 발생한다. 따라서 이 강좌에서는 행렬의 고유치를 수치적으로 구하는 문제에 대하여 고찰 하고자 한다.

實 또는 複素數 λ가 행렬 B의 고유치라 함은 영이 아닌 벡터 $\boldsymbol{y}$가 존재하여

$$B\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{y}$$

가 성립할 때이다. 여기서 벡터 $\boldsymbol{y}$를 고유치 λ에 속하는 B의 고유벡터라 한다. 윗식은 또 $(B-\lambda I)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$의 형으로도 써 줄 수 있다. 행렬의 고유치를 수치적으로 구하는 방법에는 여러가지 방법이 있으나 그 중에서 효과있는 Danilevskii 방법[1]을 소개 하고자 한다. 이 Danilevskii 방법에 의하여 특성다항식(Characteristic polynomial)을 얻을 수 있고 이 다항식의 근을 얻는 방법 中에 Bairstow 방법[2,3](또는 Hitchcock 방법)이 있는데 이에 대하여 아울러 고찰하고자 한다.

2. Danilevskii의 방법

두 행렬 A와 B가 유사하다(similar) 함은 어떤 역이 존재하는 행렬 C에 대하여

$$A=C^{-1}BC \qquad (1)$$

가 성립할 때이다. 유사한 행렬들은 동일한 고유치를 갖고 한 행렬의 고유벡터는 다른 행렬의 고유벡터로 표시해 줄 수 있다. 실제로 만일 어떤 영이 아닌 벡터 $\boldsymbol{x}$에 대해서 $(B-\lambda I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$이 성립하고 또 $A=CBC^{-1}$이면 $C\boldsymbol{x}$도 영이 아니고 $AC=CB$이다. 따라서 $(A-\lambda I)C\boldsymbol{x}=C(B-\lambda I)\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$이다. 간단히 말해서 B의 한쌍의 고유치—고유벡터 $(\lambda, \boldsymbol{x})$에 대해서 A의 한쌍의 고유치—고유벡터 $(\lambda, C\boldsymbol{x})$가 대응된다. 따라서 B의 고유치를 계산하는 첫째 단계로 어떤 의미에서 고유치를 구하기가 보다 쉬운 유사행렬 $A=C^{-1}BC$로 변환하는 방법을 생각할 수 있다.

(가) 이제 $A=[a_{ij}]$를 차수(order) n인 정방행렬이라 하자. $a_{21}\neq 0$이라하고 M_1을 차수 n인 단위 행렬에서 그 둘째 列(column)을 $-a_{11}/a_{21}$, $1/a_{21}$, $-a_{31}/a_{21}, \cdots, -a_{n1}/a_{21}$으로 치환한 행렬이라 하자. 그러면 그 역행렬 M_1^{-1}은 단위 행렬에서 둘째 列을 행렬 A의 첫째 列로 치환한 행렬로 주어진다. 이것은 두 행렬의 곱의 연산에서 곧 증명할 수 있다.

(나) $A^{(1)}=M_1AM_1^{-1}$이라 하면 $A^{(1)}$의 첫째 列의 요소들은, 둘째 行에 있는 1을 제외하고는 전부 0이다. 왜냐하면 $A^{(1)}$의 요소(element)를 $a_{ij}^{(1)}$, M_1와 M_1^{-1}의 요소들을 각각 m_{ij}, m_{ij}^{-1}로 표시하면

$$a_{k1}^{(1)}=\sum_{i=1}^{n} m_{ki}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, m_{k1}^{-1}=\sum_{i=1}^{n} m_{ki}\, a_{i1}$$
$$=\delta_{k_2}$$

이 되기 때문이다. 여기서 δ_{k_2}는 Kronecker delta 이다.

(다) 이러한 과정을 $n-1$번 계속하면 A는 소위 Frobenius 행렬이라고 하는 다음과 같은 형의 similar 행렬 P가 된다.

$$P=\begin{pmatrix} 0\ 0 & \cdots\cdots & -a_n \\ 1\ 0 & \cdots\cdots & -a_{n-1} \\ 0\ 1 & \cdots\cdots & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ 0 & \cdots\cdots & -a_1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

이것은 한단계 수행할 때마다 그 전단계에서 생긴 0요소에 영향을 주지 않기 때문이다. 그 이유는 아래에서 알 수 있다. 이제 $A^{(k)}$를 $(k-1)$번째 이런 과정에서 얻어진 행렬이라 하자. 따라서 $A=A^{(1)}$이고 $P=A^{(n)}$이 된다. 또

$$A^{(k+1)}=M_kA^{(k)}M_k^{-1}$$

이고 여기서

$$M_k=\begin{array}{cc} \begin{array}{c}(k+1)\text{-렬} \\ \downarrow\end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1\ 0 \cdots & -\dfrac{a_{1k}^{(k)}}{a_{k+1,k}^{(k)}} & \cdots\ 0 \\ 0\ 1 \cdots & -\dfrac{a_{2k}^{(k)}}{a_{k+1,k}^{(k)}} & \cdots\ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots \cdots & \dfrac{1}{a_{k+1,k}^{(k)}} & \cdots\ 0 \\ 0 \cdots \cdots & \dfrac{a_{nk}^{(k)}}{a_{k+1,k}^{(k)}} & \cdots\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow (k+1)\text{-行} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

로 주어지고 그 역행렬은

$$M_k^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{c}(k+1)-\text{렬} \\ \downarrow\end{array} \\ \begin{pmatrix} 1\ 0 \cdots & a_{1k}^{(k)} & \cdots\ 0 \\ 0\ 1 \cdots & a_{2k}^{(k)} & \cdots\ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots\cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

로 주어진다.

행렬 $A^{(k+1)}$를 두 단계로 계산하는 것이 좋다. 먼저 보조행렬 $B^{(k)}=M_kA^{(k)}$를 계산한다. 행렬 M_k의 구조에 비추어 이 작업은 행렬 $A^{(k)}$의 $(k+1)$-行의 元을 $\dfrac{1}{a_{k+1,k}^{(k)}}$로 곱하면 $B^{(k)}$의 $(k+1)$번째 행의 元이 되고 $B^{(k)}$의 나머지 행은 $A^{(k)}$의 元에서 이미 얻은 $B^{(k)}$행렬의 $(k+1)$行에다 행렬 $A^{(k)}$의 k째 列의 대응하는 元들을 곱하여 빼면 얻을 수 있다. 즉 수식으로 표시하면

$$b_{k+1,j}^{(k)}=\frac{1}{a_{k+1,k}^{(k)}}\cdot a_{k+1,j}^{(k)} \qquad (3)$$

$$b_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k)}-a_{ik}^{(k)}\ b_{k+1,j}^{(k)}$$
$$(i\neq k+1) \qquad (4)$$

윗 식으로 부터 이런 연산에 대해서 처음 $(k-1)$렬은 변하지 않음을 쉽게 알 수 있다. k-렬은 $(k+1)$번째 위치에 1이 있고 나머지 요소는 전부 0이 된다. 이렇게 얻은 $B^{(k)}$를 M_k^{-1}로 오른쪽에 곱하면 $A^{(k+1)}$를 얻는다. 이 행렬은 다만 한 렬-$(k+1)$번째-만 변하고 나머지는 불변이다. $(k+1)$번째 렬이

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(k)}a_{jk}^{(k)},\ \sum_{j=1}^{n} b_{2j}^{(k)}a_{jk}^{(k)},\ \cdots,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{nj}^{(k)}a_{jk}^{(k)}$$

임은 쉽게 알 수 있다.

따라서 $A^{(k)}$에서 $A^{(k+1)}$를 다음의 공식에 의해서 얻을 수 있다.

$$a_{ij}^{(k+1)}=b_{ij}^{(k)} \qquad (5)$$

$$a_{i,k+1}^{(k+1)}=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(k)}\ a_{jk}^{(k)} \qquad (6)$$

결국 $MAM^{-1}=P$가 된다. 여기서 $M=M_1M_2\cdots M_{n-1}$이다. 따라서 A와 P는 서로 유사하다.

(라) 특성 다항식은

$$P(\lambda)=|P-\lambda I|=(-1)^n(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}$$
$$+a_2\lambda^{n-2}\cdots+a_n)=0$$

이다. 이것은 수학적 귀납법에 의해서 알 수 있다. $n=2$일때 명백하다. $n-1$일때 참(眞)이라고 하자. 그러면 행렬식

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots\cdots & -a_n \\ 1 & -\lambda\ 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1\ -\lambda & \cdots & -a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -a_1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

에서 처음 row에 대해서 전개하면

$$-\lambda(-1)^{n-1}(\lambda^{n-1}+a_1\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1})$$
$$-(-1)^{n+1}a_n=(-1)^n(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}$$
$$+\cdots+a_n)=0$$ 이기 때문이다.

3. Bairstow 方法

고유치를 구하기 위하여는 다항식

$$p(\lambda)=\lambda^n+\cdots+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$$

의 근을 결정해야 한다. 이와같은 대수방정식의 해를 구하는 방법중에서 Bairstow에서 의해서 최초로 발견되고 Hitchcock 및 다른 사람들에 의하여 재발견된 반복법에 대하여 생각하고자 한다.

만일 다항식

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n \tag{7}$$

을 이차식 $\lambda^2+p\lambda+q$로 나누면

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n\\&=(\lambda^2+p\lambda+q)(\lambda^{n-2}+b_1\lambda^{n-3}\\&\quad+\cdots+b_{n-3}\lambda+b_{n-2})+R\lambda+S\end{aligned} \tag{8}$$

이고 이 이차식이 $p(\lambda)$의 인수가 되기 위한 조건은

$$R=0,\quad S=0 \tag{9}$$

인 것이다. 여기서 R과 S는 일차잉여항의 계수들이고 매개변수 p와 q의 어떤함수가 된다.

실제적으로 나눗셈을 하지않고 R과 S를 얻는 간단한 방법을 얻기 위하여 식(8)의 양변에서 λ의 같은 멱의 계수를 같게 놓으면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned}&a_1=b_1-p,\quad a_2=b_2+pb_1+q,\quad a_3=b_3+pb_2+qb_1,\\&\cdots,\quad a_k=b_k+pb_{k-1}+qb_{k-2},\cdots, \qquad (10)\\&a_{n-2}=b_{n-2}+pb_{n-3}+qb_{n-4},\quad a_{n-1}=R+pb_{n-2}\\&+qb_{n-3},\quad a_n=S+qb_{n-2}\end{aligned}$$

따라서, 만일 순환방정식

$$b_k=a_k-pb_{k-1}-qb_{k-2}\qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

와 $\qquad b_{-1}=0,\quad b_0=1 \qquad (12)$

를 도입하면 이 공식들은 $k=1,2,\cdots,n-2$에 대해서 식(8)의 몫의 계수들을 산출할 수 있고 또

$$R=b_{n-1}=a_{n-1}-pb_{n-2}-qb_{n-3} \tag{13}$$

$$S=b_n+pb_{n-1}=a_n-qb_{n-2} \tag{14}$$

이다.

따라서 식 $\lambda^2+p\lambda+q$가 $p(\lambda)$의 인수인 필요충분조건은

$$\begin{aligned}R&\equiv a_{n-1}-pb_{n-2}-qb_{n-3}=0\\S&\equiv a_n-qb_{n-2}=0\end{aligned} \tag{15}$$

이다.

다음에 두개 변수의 함수에 대한 Newton-Raphson 반복법의 일반형에 대하여 논한다. 일개변수의 함수에 대한 Taylor의 정리는 간결하게

$$f(p')=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(p)(p'-p)^k}{k!}$$

로 써줄수 있다. 여기서 $f^{(k)}(p)$는 전개점인 p에서 구한 $f(p')$의 k階 도함수이다. 이 정리를 2개 변수의 함수에 확장해 주면[4]

$$\begin{aligned}f(p',q')&=f(p,q)+[(p'-p)\\&\cdot f_p(p,q)+(q'-q)f_q(p,q)]\\&+\frac{1}{2!}\Big[(p'-p)^2f_{pp}(p,q)+2(p'-p)\\&\cdot(q'-q)f_{pq}(p,q)+(q'-q)^2\\&\cdot f_{qq}(p,q)\Big]+\cdots\end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $f_p=\dfrac{\partial f}{\partial p}$, $f_{pp}=\partial^2 f/\partial p^2$, 와 $f_{pq}\equiv\partial^2 f/\partial p\partial q$이고 모두 점$(p,q)$에서 구한 값들이다. 만일 P와 Q가 $f(P,Q)=0$가 성립하는 p와 q의 정확한 값이라면

$$\begin{aligned}f(P,Q)=0=f(p,q)&+(P-p)f_p(p,q)\\&+(Q-q)f_q(p,q)+\cdots\end{aligned}$$

이고 $P=p$와 $Q=q$는 윗식을 만족함을 본다. 정확한 값 P와 Q를 모르므로 전개해 주어야 할 점의 위치 (p,q)도 알수 없다. $\Delta p=P-p$이고 $\Delta q=Q-q$라 놓으면 만일 Δp와 Δq를 적게 만들면 급수가 매우 빨리 수렴하므로 비선형항은 무시해 줄수 있다. 따라서 비선형항을 생략하여 다음의 근사식을 얻는다.

$$\begin{aligned}f(P,Q)=0\cong f(p,q)&+(P-p)\\&\cdot f_p(p,q)+(Q-q)f_q(p,q)\end{aligned}$$

p,q를 초기의 어림값이라하면 새로이 개선된 값 p^*와 q^*에 대하여

$$\begin{aligned}f_1(P,Q)=0\simeq f_1(p,q)&+\Delta pf_{1p}(p,q)\\&+\Delta qf_{1q}(p,q)\\f_2(P,Q)=0\simeq f_2(p,q)&+\Delta pf_{2p}(p,q)\\&+\Delta qf_{2q}(p,q)\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\Delta p = p^* - p$ 이고 $\Delta q = q^* - q$ 이다. 따라서 Δp 와 Δq 는 위의 두방정식을 연립하여 풀면 구할 수 있다.

식 (13)과 (14)

$$R = b_{n-1},\quad S = b_n + p b_{n-1}$$

의 Newton-Raphson 순환식은

$$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q}\Delta q + b_{n-1} = 0$$

이고

$$\left(\frac{\partial b_n}{\partial p} + p\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} + b_{n-1}\right)\Delta p + \left(\frac{\partial b_n}{\partial q} + p\frac{\partial b_{n-1}}{\partial q}\right)\Delta q + b_n + p b_{n-1} = 0$$

이다. 여기서 $\Delta p \equiv p^* - p$ 이고 $q \equiv q^* - q$ 이다. p^*와 q^*는 각각 p와 q의 개선된 값이다. 두번째 식에서 첫째 식에다 p를 곱하여 빼므로써 간단히 하면 두 관계식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p}\Delta p + \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q}\Delta q + b_{n-1} = 0 \\ &\left(\frac{\partial b_n}{\partial p} + b_{n-1}\right)\Delta p + \frac{\partial b_n}{\partial q}\Delta q + b_n = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

b 들은 $p(\lambda)$의 계수들로서 순환방정식 (11)과 (12)에 의해서 정의된 것을 상기하면 식 (16)에서 편미분들만을 결정하면된다. 이 목적을 위해 식 (11)과 (12)로부터 다음의 추가조건을 얻는다.

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial b_k}{\partial p} = b_{k-1} + p\frac{\partial b_{k-1}}{\partial p} + q\frac{\partial b_{k-2}}{\partial p} \\ &\quad (k = 1, 2, \cdots, n) \\ &\quad \frac{\partial b_{-1}}{\partial p} = 0,\quad \frac{\partial b_0}{\partial p} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

와

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial b_k}{\partial q} = b_{k-2} + p\frac{\partial b_{k-1}}{\partial q} + q\frac{\partial b_{k-2}}{\partial q} \\ &\quad (k = 1, 2, \cdots, n) \\ &\frac{\partial b_{-1}}{\partial q} = 0,\quad \frac{\partial b_0}{\partial q} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

따라서, 다음과 같은 새로운 순환방정식을 도입하면

$$\begin{aligned} &c_k = b_k - p c_{k-1} - q c_{k-2} \\ &\quad (k = 1, 2, \cdots, n-1) \\ &c_{-1} = 0,\quad c_0 = 1 \end{aligned} \tag{19}$$

식 (17)로부터

$$\frac{\partial b_k}{\partial p} = -c_{k-1}\quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{20}$$

이고 식 (18)로부터

$$\frac{\partial b_k}{\partial q} = -c_{k-2}\qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{21}$$

이다. 여기서 c 들이 b 로부터 결정되는 것은 마치 b 들이 a 로부터 결정되는 것과 같다.

따라서 c 들의 처음 $n-4$ 개는 다음의 관계식에서의 계수이다.

$$\begin{aligned} &\lambda^{n-2} + b_1\lambda^{n-3} + \cdots + b_{n-3}\lambda + b_{n-2} \\ &\quad = (\lambda^2 + p\lambda + q)(\lambda^{n-4} + c_1\lambda^{n-5} \\ &\quad + \cdots + c_{n-5}\lambda + c_{n-4}) + R'\lambda + S' \end{aligned} \tag{22}$$

그리고 $R' = c_{n-3},\ S' = c_{n-2} + p c_{n-3}$ 이다. (23)

특별히

$$\begin{aligned} &\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} = -c_{n-2},\quad \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} = -c_{n-3}, \\ &\frac{\partial b_n}{\partial q} = -c_{n-2} \end{aligned} \tag{24}$$

이고 따라서 식 (16)의 네개의 계수중 셋은 위의 관계식을 사용하여 식 (19)에서 구할수 있다. $k = n$ 이면 식 (20)으로부터

$$\frac{\partial b_n}{\partial p} = -c_{n-1} \tag{25}$$

를 얻고 따라서 식 (16)의 나머지 계수는

$$\frac{\partial b_n}{\partial p} + b_{n-1} = -\bar{c}_{n-1} \tag{26}$$

여기서, 식 (19)에 의해서

$$\bar{c}_{n-1} = c_{n-1} - b_{n-1} = -p c_{n-2} - q c_{n-2} \tag{27}$$

로 주어진다.

Bairstow 반복법의 기본방정식들은 아래와 같은 간단한 형이다.

$$\begin{aligned} &c_{n-2}\Delta p + c_{n-3}\Delta q = b_{n-1} \\ &\bar{c}_{n-1}\Delta p + c_{n-2}\Delta q = b_n \end{aligned} \tag{28}$$

그리고 이 반복법에서 행해지는 주된 계산은 아래와 같이 배열할 수 있다.

$$\begin{array}{c|cc|} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_{n-4} & c_{n-4} \\ a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} \\ a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ a_{n-1} & b_{n-1} & \bar{c}_{n-1} \\ a_n & b_n & \end{array}$$

여기서 b렬의 모든 元(b_n을 포함)과 마지막 元($\bar{c}_{n-1}$)을 제외한 c렬의 모든 元은 그 윈편에 있는 元에서 그 바로 위의 元에 p를 곱한 것과 두칸 위의 元에 q를 곱한 것을 빼서 얻을 수 있다. 元 $\bar{c}_{n-1}$도 마찬가지로 구할수 있는데 다만 윈편에 있는 元이 0이라고 가정 하면된다.

다음에 연립일차방정식 (28)을 풀어서 p와 q에 더해주면 새로이 개선된 값 p^*와 q^*를 얻을 수 있다.

이것은

$$D = c^2_{n-2} - \bar{c}_{n-1}c_{n-3}$$

와 $D_p = b_{n-1}c_{n-2} - b_n c_{n-3}$, $D_q = -b_{n-1}\bar{c}_{n-1} + b_n c_{n-2}$를 구하면

$$\Delta p = \frac{D_p}{D}, \quad \Delta q = \frac{D_q}{D}$$

로 주어진다.

다음에 애플소프트베이식 (applesoft basic)으로 작성한 프로그램의 한 예를 보인다.

```
]

]PR#1
]LIST

10  CLEAR : PRINT "EIGEN VALUE"
15  DIM A(1000),BB(100),B(100)
20  INPUT "ORDER ==> ";C
30  FOR G = 1 TO C
40  FOR H = 1 TO C
50  PRINT G;"   ";H: INPUT I
60  GOSUB 600
70  A(L) = I: NEXT H: NEXT G
80  FOR E = 1 TO C - 1
90  H = E: FOR G = 1 TO C
100  GOSUB 600
110  BB(G) = A(L): NEXT G
120  D = E + 1:G = D:H = E: GOSUB
     600
130  F = A(L): FOR H = E TO C
140  GOSUB 600
150  A(L) = A(L) / F: NEXT H
160  FOR A = 1 TO C
170  IF A = D GOTO 250
180  G = A:H = E: GOSUB 600
190  F = A(L): FOR H = E TO C
200  G = A: GOSUB 600
210  J = L:G = D: GOSUB 600
220  A(J) = A(J) - F * A(K): NEXT
     H
230  NEXT A: FOR A = 1 TO C
240  F = 0: FOR H = 1 TO C
250  G = A: GOSUB 600
260  J = K:G = H: GOSUB 600
270  F = F + A(J) * BB(L): NEXT H
280  G = A:H = D: GOSUB 600
290  A(L) = F: NEXT A: NEXT E
300  FOR A = 1 TO C
310  G = A:H = C: GOSUB 600
320  J = K:G = C - A + 1: GOSUB 60
     0
330  A(L) = - A(J): NEXT A
340  G = 1: GOSUB 600
350  E = 1:M = C: GOSUB 500
360  FOR E = 1 TO C
370 A(F) = A(L):F = F + 1:L = L +
     1: NEXT E
380 A = 0:B = 0
390  IF 2 > = C GOTO 450
400  GOSUB 800
410  IF ( ABS (F) > = 1 / 10000)
      + ( ABS (G) > = 1 / 10000)
      < > 0 THEN A = A + F:B = B
      + G: GOTO 400
420  GOSUB 900
430  FOR E = 1 TO C - 2: GOSUB 50
     0
440 A(F) = B(I): NEXT E:C = C - 2
     : GOTO 380
450 E = 1: GOSUB 500
460 A = A(F): IF C = 1 THEN PRINT
     CHR$ (7); CHR$ (7); CHR$ (7
     ): PRINT - A,0: END
470 E = 2: GOSUB 500
480 B = A(F): GOSUB 900
490  END
500 G = E:H = G + 1:F = M + H + 1

510 I = H + 1: RETURN
600 L = G:K = C * G + H
610  RETURN
700  GOSUB 500
710 B(I) = A(F) - A * B(H) - B *
     B(G): RETURN
800 E = 1: GOSUB 500
810 B(G) = 0:J = 0:K = 1:B(H) = 1

820  GOSUB 700
830 L = B(I) - A * K - B * J:E =
     E + 1
840  IF C < > E THEN J = K:K = L
     : GOTO 820
850  GOSUB 700
860 H = B(H):I = B(I):D = K * K -
     J * (L - H)
870 F = (H * K - I * J) / D
880 G = (I * K - H * (L - H)) / D

890  RETURN
900  PRINT  CHR$ (7); CHR$ (7); CHR$
     (7):A = A / 2:B = A * A - B:
      IF B = 0 GOTO 930
910 E = SQR ( ABS (B)): IF 0 > B
      THEN  PRINT  - A,E: PRINT  -
     A, - E: RETURN
920  PRINT E - A,0: PRINT  - A -
     E,0: RETURN
930  PRINT  - A,0: PRINT  - A,0: RETURN
```

참 고 문 헌

(1) Faddeev, D.K., and V.H. Faddeeva, Computational methods of Linear Algebra, Freeman, San Francisco, 1963

(2) Householder, A.S., Principles of Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1964

(3) Computer Applications of Numerical Method, 普成文化社編, 1983

(4) Hildebrandt, F.B., Advanced Calculus for Applications, McGraw-Hill, New York, 1956