

<論 文>

成形加工問題에 대한 힘 平衡法의 應用

崔 載 燦* · 金 鎮 武**

(1986年 4月 14日 接受)

Applications of Force Balance Method to Several Metal Forming Problems

Jae Chan Choi and Jin Moo Kim

Key Words; Force Balance Method(힘 平衡法), Upper Bound Solution(上界解), Strip Forging(板材鍛造), Indentation(壓入), Constant Frictional Stress(一定한 摩擦應力)

Abstract

Two upper bound solutions, by the force balance method and by a kinematically admissible velocity field, are compared for the metal forming problems in plane strain. It is concluded that these two approaches always give identical results when the geometrical configurations of the deformation model remain the same. By detailed derivations for plastic bending of a notched bar, closed die forging, compression of a rectangular block, machining with a restricted contact tool and plane strain backward extrusion, the identity of both approaches is verified.

記 號 說 明

- k_i : 速度不連續面上的剪斷應力, $i=1, 2, \dots, 6$
- l_i : 速度不連續面の 길이, $i=1, 2, \dots, 6$
- m : 摩擦常數
- N_i : 速度不連續面上的 垂直應力 $i=1, 2, \dots, 6$
- N_0, N_7, N_8, N_9 : 垂直應力
- p, p_1, p_2 : 다이와 펀치의 平均壓력
- v_0, v_f : 初期 및 最終速度
- ω : 角速度
- $\alpha, \beta, \gamma, \theta$: 變形모델을 定義한 角變數
- Γ_i : 速度不連續面, $i=1, 2, \dots, 6$
- ϕ : 工具의 上面傾斜角
- 2ϕ : 펀치의 先端角

1. 序 論

金屬을 成形加工할 때 素材를 變形시켜서 所要의 形狀으로 만드는데 必要한 加工力을 豫測하는 것은 重要하다. 그러나 一般적으로 加工力을 正確히 豫測하기는 어려움으로 適切한 假定을 하여 加工力의 近似值를 豫測하는 몇가지 方法들이 提案되었다.

Westwood와 Wallace⁽¹⁾는 上界解를 求하는 方法으로 힘平衡法을 導入하여 다이와 素材 사이에 摩擦이 있다는 假定下에 平面變形 成形問題들에 對해서 上界解를 求하고 摩擦이 없는 경우 同一한 變形 모델을 使用하여 運動學的 可容速度場에서 求한 上界解와 힘平衡法에 依해서 求한 上界解가 同一함을 밝혔다.

最近 B. Avitzur와 J.C. Choi⁽²⁾, B. Avitzur, J.C. Choi와 B.M. Kim⁽³⁾, B. Avitzur, J.C. Choi와 H.S. Kim⁽⁴⁾ 등이 다이와 素材 사이에 一定한 摩擦應力이 作

* 正會員, 釜山大學校 工科學 機械設計學科

** 正會員, 蔚山大學校 工科學 機械工學科

用한다는 假定下에 板材押出, 壓延, 壓入 및 板材鍛造 等 平面變形 成形問題에 關한 上界解를 힘平衡法에 依하여 求했다.

本 論文에는 單一 노치가 있는 棒의 塑性굽힘, 密閉型鍛造, 4 角形블록의 壓縮, 2 次元 切削加工 및 平面變形 後方押出 等 平面變形 成形問題에 對해서 工具와 素材사이에 一定한 摩擦應力이 作用한다는 假定下에 運動學的 可容速度場으로 求한 上界解와 同一한 變形 모델을 使用하여 힘平衡法으로 求한 上界解를 比較·檢討하여 2 가지 接近法으로 求한 上界解가 同一함을 立證하였다.

2. 힘 平衡法에 의한 上界解

2.1 單一노치가 있는 棒의 塑性굽힘

單一 노치가 있는 Fig. 1(a)와 같은 棒에 初期降伏이 일어나도록 純粹한 굽힘모우멘트 M 을 加한다. 棒의 最小두께는 a 이고 幅은 두께에 比하여 크므로 棒은 平面變形狀態로 굽혀지고 있다. Fig. 1(a)는 剛性영역 I 과 II가 靜止된 剛性영역 ABCDA의 周圍를 角速度 ω 로 回轉하며 圓弧 \widehat{ABC} 와 \widehat{ADC} 를 따라서 棒은 剪斷에 依하여 降伏이 일어난다는 假定下에 運動學的 可容速度場으로 上界解를 求하기 爲한 變形모델이다⁽⁶⁾. 힘平衡法으로 上界解를 求한 때에도 Fig. 1(b)와 같이 Fig. 1(a)와 同一한 變形모델을 使用한다. Fig. 1(b)에서 圓弧 \widehat{ADC} 에는 降伏剪斷應力 k 와 垂直應力 N_1 과 N_2 가 各各 作用하는 것으로 假定한다. 剛性영역 II에서 D 點을 지나고 紙面에 垂直한 軸에 對한 굽힘모우멘트의 합과 水平 및 垂直한 分力들의 합은 各各 0이다.

$$\sum M = 0$$

$$M - \int_0^\alpha N_1 R^2 \sin \theta d\theta - \int_0^\alpha N_2 R^2 \sin \theta d\theta - 2 \int_0^\alpha k R^2 (1 - \cos \theta) d\theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_H = 0$$

$$\int_0^\alpha N_1 R \cos \theta d\theta - \int_0^\alpha N_2 R \cos \theta d\theta + \int_0^\alpha k R \sin \theta d\theta - \int_0^\alpha k R \sin \theta d\theta = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_V = 0$$

$$\int_0^\alpha N_1 R \sin \theta d\theta + \int_0^\alpha N_2 R \sin \theta d\theta - 2 \int_0^\alpha k R \cos \theta d\theta = 0 \quad (3)$$

여기서 R 은 圓弧 \widehat{ADC} 의 曲率半徑이고 2α 는 中心角이다. 式(2)를 풀면 $N_1 = N_2$ 이고 이것을 式(3)에 代入하면

$$N_1 = N_2 = k \sin \alpha / (1 - \cos \alpha) \quad (4)$$

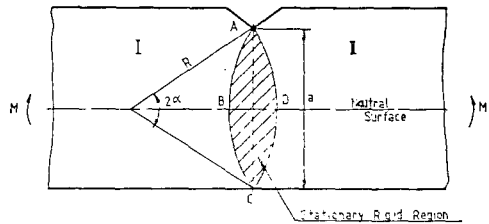
르 된다. 式(4)를 式(1)에 代入하면 굽힘모우멘트 M 은 다음 式으로 된다.

$$M = 2 k R^2 \alpha \quad (5)$$

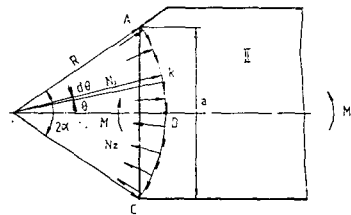
Fig. 1(a)의 幾何學的인 關係에서 $R = a / 2 \sin \alpha$ 이고 이 式을 式(5)에 代入하면 굽힘모우멘트 M 은

$$M = \frac{k a^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \quad (6)$$

으로 된다.



(a) Pattern of velocity discontinuities



(b) Force balance one half of complete pattern
Fig. 1 Plane strain bending of a notched bar

2.2 密閉型 鍛造

Fig. 2 (a)는 4 角形블록의 平面變形 密閉型 鍛造를 나타낸 것으로 길이 L 인 한 雙의 다이가 垂直方向으로 相對速度 2로 壓縮하여 4 角形블록을 側方向으로 밀어 내고 있다. W. Johnson은 Fig. 2(a)와 2(b)인 變形 모델과 호도그래프를 使用하여 運動學的 可容速度場에 依한 上界解를 求했다^{(5), (6)}.

同一한 變形모델을 Fig. 2(c)와 같이 힘 平衡法에 依한 上界解를 求하기 爲하여 使用한다. 剛性영역 I에서 水平分力의 합은 0이다. 即,

$$N_1 l_1 \sin \beta - k_1 l_1 \cos \beta = 0 \quad (7)$$

여기서 $l_1 = h / 2 \sin \beta$ 이다. 式(7)로부터

$$N_1 = k_1 \cot \beta \quad (8)$$

剛性영역 II에서 垂直 및 水平分力의 합은 0이다.

$$\sum F_V = 0$$

$$N_1 l_1 \cos \beta + k_1 l_1 \sin \beta - N_2 l_2 \cos \gamma + k_2 l_2 \sin \gamma + N_3 l_3 \cos \theta + k_3 l_3 \sin \theta = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \\ -N_1 l_1 \sin \beta + k_1 l_1 \cos \beta - N_2 l_2 \sin \gamma - k_2 l_2 \cos \gamma \\ + N_3 l_3 \sin \theta - k_3 l_3 \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $l_2 = (H-h)/2 \sin \gamma$ 이고 $l_3 = H/2 \sin \theta$ 이다. 式(8)을 式(9)와 (10)에 代入하고 그 結果式에서 N_2 와 N_3 을 求하면

$$N_2 = \left\{ k_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \right) \frac{\sin \theta}{\sin \beta} + k_2 \cos(\theta - \gamma) + k_3 \left(\frac{l_3}{l_2} \right) \right\} / \sin(\theta - \gamma) \quad (11)$$

$$N_3 = \left\{ k_1 \left(\frac{l_1}{l_3} \right) \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + k_2 \left(\frac{l_2}{l_3} \right) + k_3 \cos(\theta - \gamma) \right\} / \sin(\theta - \gamma) \quad (12)$$

로 된다. 剛性영역 III, IV 및 V에서 水平分力과 垂直分力들의 平衡式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \text{ (剛性영역 III)} \\ -N_3 l_3 \sin \theta + k_3 l_3 \cos \theta + N_4 l_4 \sin \theta - k_4 l_4 \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \text{ (剛性영역 IV)} \\ N_4 l_4 \cos \theta + k_4 l_4 \sin \theta - p_1 H \cot \theta = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \text{ (剛性영역 V)} \\ N_2 l_2 \cos \gamma - k_2 l_2 \sin \gamma - p_2 (H-h) \cot \gamma = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $l_4 = H/2 \sin \theta$ 이고 p_1 과 p_2 는 各各 剛性영역 IV와 V의 다이위에 作用하는 壓力이다. 式(12)를 式(13)에 代入하여 N_4 를 求하면

$$N_4 = \left\{ k_1 \left(\frac{l_1}{l_3} \right) \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + k_2 \left(\frac{l_2}{l_3} \right) + k_3 \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} + k_4 \cot \theta \sin(\theta - \gamma) \right\} / \sin(\theta - \gamma) \quad (16)$$

式(16)을 式(14)에 代入하고, 式(11)을 式(15)에 代入하여 p_1 과 p_2 를 求하면

$$p_1 = \frac{\sin \theta}{H \sin(\theta - \gamma)} \left\{ k_1 l_1 \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + k_2 l_2 + k_3 l_3 \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} + k_4 l_4 \frac{2 \sin(\theta - \gamma)}{\sin 2\theta} \right\} \quad (17)$$

$$p_2 = \frac{\sin \gamma}{(H-h) \sin(\theta - \gamma)} \left\{ k_1 l_1 \frac{\sin \theta}{\sin \beta} + k_2 l_2 \frac{\cos \theta}{\cos \gamma} + k_3 l_3 \right\} \quad (18)$$

다이위에 作用하는 平均壓力 p 는 式(17)과 (18)로부터 다음과 같은 式으로 된다.

$$\begin{aligned} p &= \{ p_1 H \cot \theta + p_2 (H-h) \cot \gamma \} / (L/2) \\ &= \frac{2}{L \sin(\theta - \gamma)} \left\{ \frac{k_1 h \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \beta} \right. \\ &\quad + \frac{k_2 (H-h) \cos \theta}{\sin \gamma} + \frac{k_3 H \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \theta} \\ &\quad \left. + \frac{k_4 H \sin(\theta - \gamma)}{2 \sin^2 \theta} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

k 를 剪斷降伏應力이라 하면 非硬化性 材料에 對해서

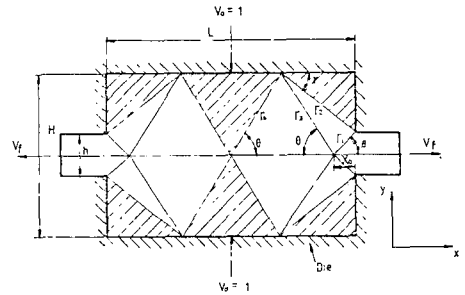
는 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ 이므로 式(19)는

$$\begin{aligned} \frac{p}{2k} &= \left\{ \frac{h \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \beta} + \frac{(H-h) \cos \theta}{\sin \gamma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{H \cos \gamma}{\sin \theta} \right\} / L \sin(\theta - \gamma) \end{aligned} \quad (20)$$

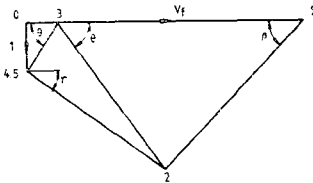
으로 된다.

式(20)의 角變數를 Fig. 2(c)의 幾何學的 關係式으로 變換하면 式(20)은 다음 式으로 된다.

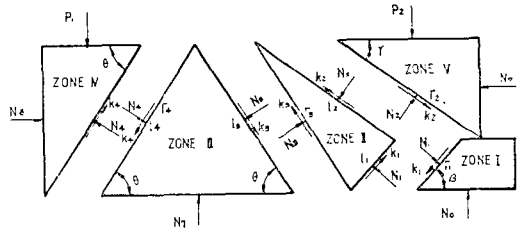
$$\frac{p}{2k} = \left[2(4X_0^2 h^2) \left\{ 2hX_0 + L(2H-h) \right\} \right]$$



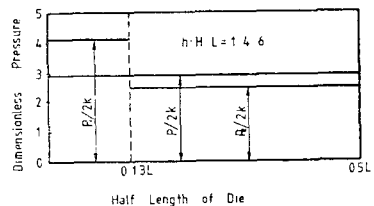
(a) Pattern of velocity discontinuities



(b) Hodograph for (a) one quarter of complete pattern



(c) Force balance one quarter of complete pattern



(d) Comparison of P_1 and P_2 with P

Fig. 2 Closed die forging of a rectangular bar

$$\begin{aligned}
 &+h(L-2X_0)\left\{\left(L+2X_0\right)^2+4(H-h)^2\right\} \\
 &+h(L+2X_0)\left\{\left(L-2X_0\right)^2+4H^2\right\} \\
 &/4hL\left\{2(2H-h)X_0+hL\right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

다이위에 작용하는 平均壓力 p 를 最小로 하는 $(X_0)_{opt}$ 는

$$(X_0)_{opt} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cos \frac{\lambda}{3} \quad (22)$$

로 된다. 여기서 $a = (3q - p^2)/3$, $b = (2p^3 - 9pq + 27r)/27$, $p = \{L(4H^2 - 6hH + 5h^2)\}/4h(2H - h)$, $q = L^2(H - h)/2(2H - h)$, $r = L(8hH^2 + hL^2 - 2HL^2 - 8H^3)/16(2H - h)$ 및 $\cos \lambda = (-b/2)/\sqrt{-a^3/27}$ 이다.

예컨데 $h : H : L = 1 : 4 : 6$ 일 때 $(X_0)_{opt} = 1.44h$ 이고 이것을 式(17), (18) 및 (21)에 代入하면

$$p_1/2k = 4.16, \quad p_2/2k = 2.50, \quad p/2k = 2.94$$

를 얻는다. 위의 結果를 그림으로 나타낸 것이 Fig. 2(d)이다.

2.3 4角形 블록의 壓縮

Fig. 3(a)는 두께가 $2T$ 인 4角形블록을 幅이 $2W$ 인 펀치로 壓縮하는 것을 나타낸 變形모델이다⁽⁷⁾. 펀치의 兩側으로 突出되어 나온 部分은 剛體로 假定하고 빗금친 部分은 테드메탈域이다. 素材의 內部에 그린 交叉線들은 速度不連續線이고 펀치와 共히 2θ 의 角을 이루고 있다.

Fig. 3(b)는 힘平衡法에 依하여 上界解를 求하기 爲하여 Fig. 3(a)와 同一한 變形모델을 採用하여 힘의 平衡狀態를 나타낸 그림이다.

剛性영역에 I에서 水平分力の 合은 0이므로

$$N_1 l_1 \sin \theta - k_1 l_1 \cos \theta = 0 \quad (23)$$

으로 되고 여기서 $l_1 = W \sec \theta/3$ 이다. 平面 Γ_4 위 에 一定한 摩擦應力이 作用한다고 假定하면 剛性영역 II에서 垂直分力과 水平分力の 平衡式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sum F_y = 0 \\
 N_1 l_1 \cos \theta + k_1 l_1 \sin \theta + N_2 l_2 \cos \theta + k_2 l_2 \sin \theta - p_2 l_4 \\
 = 0 \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 \\
 -N_1 l_1 \sin \theta + k_1 l_1 \cos \theta + N_2 l_2 \sin \theta - k_2 l_2 \cos \theta \\
 -m k_4 l_4 = 0 \quad (25)
 \end{aligned}$$

여기서 $l_2 = W \sec \theta/3$, $l_4 = 2W/3$ 및 p_2 는 Γ_4 위 에 作用하는 壓力이다. 式(23)에서 求한 $N_1 = k_1 \cot \theta$ 를 式(25)에 代入하면 N_2 는

$$N_2 = (k_2 + 2mk_4) \cot \theta \quad (26)$$

으로 되고 N_1 과 N_2 를 式(24)에 代入하여 p_2 를 求하면

$$p_2 = \frac{k_1 + k_2}{\sin 2\theta} + mk_4 \cot \theta \quad (27)$$

剛性영역 III과 IV에서도 水平分力과 垂直分力の 合은 0이다. 即,

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 \text{ (剛性영역 III)} \\
 -N_2 l_2 \sin \theta + k_2 l_2 \cos \theta + N_3 l_3 \sin \theta - k_3 l_3 \cos \theta \\
 = 0 \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_y = 0 \text{ (剛性영역 IV)} \\
 N_3 l_3 \cos \theta + k_3 l_3 \sin \theta - p_1 W/3 = 0 \quad (29)
 \end{aligned}$$

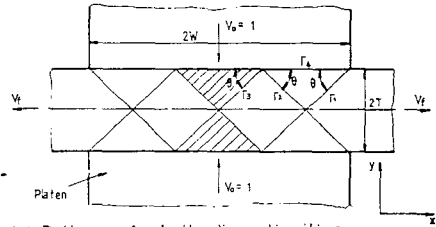
여기서 $l_3 = W \sec \theta/3$ 이고 p_1 은 테드메탈 域위에 作用하는 壓力이다. 式(26)을 式(28)에 代入하여 N_3 를 求하면

$$N_3 = (k_3 + 2mk_4) \cot \theta \quad (30)$$

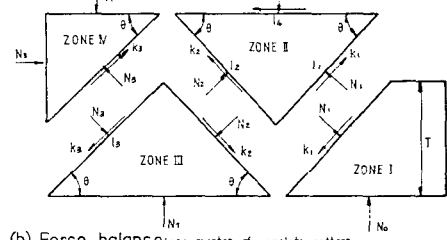
式(30)을 式(29)에 代入하여 p_1 을 求하면

$$p_1 = \frac{2k_3}{\sin 2\theta} + 2mk_4 \cot \theta \quad (31)$$

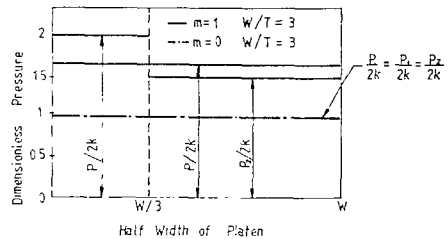
펀치위에 作用하는 平均壓力 p 는 式(27)과 (31)로부터



(a) Pattern of velocity discontinuities



(b) Force balance: one quarter of complete pattern



(c) Comparison of P_1 and P_2 with P

Fig. 3 Compression of a rectangular section block

$$p = \frac{2(k_1+k_2+k_3)}{3 \sin 2\theta} + \frac{4}{3}mk_4 \cot \theta \quad (32)$$

로 된다. 非硬化性材料인 경우 $k_1=k_2=k_3=k_4=k$ 이므로 式(32)는 다음 式으로 된다.

$$\frac{p}{2k} = \left(\frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{2}{3}m \cot \theta \right) \quad (33)$$

편차와 素材사이에 摩擦이 없다면 式(33)은

$$p/2k = 1/\sin 2\theta \quad (34)$$

로 된다.

式(33)에 $T = W \tan \theta/3$ 인 關係를 代入하면

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r}{9} (3+4m) + \frac{3}{r} \right\} \quad (35)$$

로 된다. 여기서 $r = W/T$ 이다.

例컨대 $r=3$ 일 때 式(27), (31) 및 (33)으로 부터 p_1 과 p_2 를 求하면 Table 1 과 같다.

Table 1 p, p_1 and p_2 ($r=3$)

m	0	0.5	1.0
$p/2k$	1	1.33	1.67
$p_1/2k$	1	1.50	2.0
$p_2/2k$	1	1.25	1.50

Fig.3(c)는 위의 結果를 그림으로 나타낸 것이다.

2.4 限定된 接觸길이를 가진 工具에 의한 切削加工

Fig. 4(a)는 接觸길이가 l_0 인 工具로 2次元 切削하는 것을 나타낸 그림이다. 工作物의 上面은 工具傾斜面의 上端과 同一面上에 있다고 假定한다. 運動學의 可容速度場에 依한 上界解를 求할 때 使用한 接線速度不連續系와 호도그래프는 Fig. 4(a) 및 4(b)와 같다⁽⁸⁾. 호도그래프상에 칩이 工具의 上面보다 垂直線에 對해서 더 傾斜진 方向으로 流動하도록 나타낸 것은 實際 切削加工에서 觀察되는 現象과 一致하기 때문이다.

Fig. 4(c)는 힘 平衡法에 依한 上界解를 求하기 爲하여 Fig. 4(a)와 同一한 變形모델을 擇한 것에 힘의 平衡狀態를 나타낸 것이다.

剛性영역 I에서 水平分力과 垂直分力の 合은 0이다. 即,

$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ -N_1 l_1 \sin 45^\circ - k_1 l_1 \cos 45^\circ + N_2 l_2 \cos(\psi + \theta) \\ &+ k_2 l_2 \sin(\psi + \theta) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sum F_V &= 0 \\ N_1 l_1 \cos 45^\circ - k_1 l_1 \sin 45^\circ + N_2 l_2 \sin(\psi + \theta) \\ - k_2 l_2 \cos(\psi + \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

式(36)과 (37)에서 N_2 는

$$N_2 = \frac{(2k_1+k_2) - k_2 \tan(\psi + \theta)}{1 + \tan(\psi + \theta)} \quad (38)$$

로 된다. 여기서 $l_1 = \sqrt{2} l_0 \cos(\psi + \theta)$ 이고 $l_2 = l_0$ 이다. 剛性영역 II에서 工具의 윗면에 平行한 分力과 垂直分力の 合은 各 0 이다.

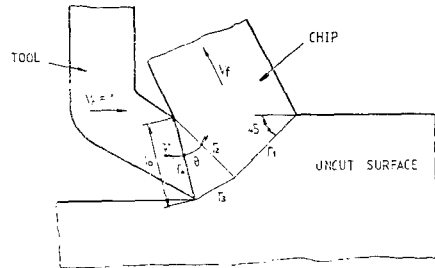
$$\begin{aligned} \sum F_T &= 0 \\ -N_2 l_2 \sin \theta + k_2 l_2 \cos \theta + N_3 l_3 \cos \frac{\theta}{2} - k_3 l_3 \sin \frac{\theta}{2} \\ -m l_4 &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sum F_N &= 0 \\ N_4 l_4 - N_2 l_2 \cos \theta - k_2 l_2 \sin \theta - N_3 l_3 \sin \frac{\theta}{2} \\ -k_3 l_3 \cos \frac{\theta}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

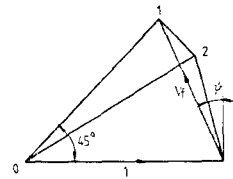
여기서 $l_3 = 2l_0 \sin \frac{\theta}{2}$ 이고 $l_4 = l_0$ 이다. 式(38)을 式(39)

에 代入하여 N_3 를 求하면

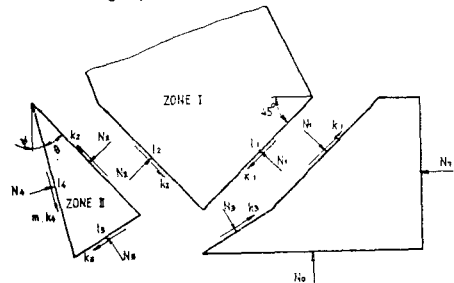
$$N_3 = \frac{(2k_1+k_2) - k_2 \tan(\psi + \theta)}{1 + \tan(\psi + \theta)}$$



(a) Movement in the physical plane



(b) Hodograph to a)



(c) Force balance in machining

Fig. 4 The mode of deformation in chip formation

$$+ \frac{k_3 - (k_2 + k_3) \cos \theta + mk_4}{\sin \theta} \quad (41)$$

式(41)을 式(40)에 代入하면

$$N_4 = \frac{(2k_1 + k_2) - k_2 \tan(\phi + \theta)}{1 + \tan(\phi + \theta)} + (k_2 + 2k_3 + mk_4) \tan \frac{\theta}{2} \quad (42)$$

로 된다. 切削力 F_c 는 $N_4 l_0$ 와 $mk_4 l_0$ 의 水平分力의 合과 같으므로

$$F_c = (N_4 \cos \phi + mk_4 \sin \phi) l_0 = t \left\{ \frac{(2k_1 + k_2) - k_2 \tan(\phi + \theta)}{1 + \tan(\phi + \theta)} + (k_2 + 2k_3) \tan \frac{\theta}{2} + mk_4 \left(\tan \frac{\theta}{2} + \tan \phi \right) \right\} \quad (43)$$

여기서 t 는 切削깊이이다. 非硬化性材料인 경우 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ 이므로 式(43)은 다음 式으로 된다.

$$F_c = kt \left\{ \frac{3 - \tan(\phi + \theta)}{1 + \tan(\phi + \theta)} + 3 \tan \frac{\theta}{2} + m \left(\tan \frac{\theta}{2} + \tan \phi \right) \right\} \quad (44)$$

2.5 平面變形 後方押出

Fig. 5(a)는 素材가 單位速度로 運動하는 펀치에 依하여 後方押出되는 것을 나타낸 變形모델이고 Fig. 5(b)는 變形모델에 對한 호도그래프이다⁽⁸⁾. 펀치의 先端角은 2ϕ 이고 펀치의 物체와 加工된 部分사이에는 摩擦이 없는 것으로 假定하고 펀치의 先端部와 素材, 容器와 素材사이에는 一定한 摩擦應力이 作用한다고 假定한다.

힘 平衡法에 依한 上界解를 求하기 爲하여 Fig. 5(a)와 同一한 變形모델에 힘의 平衡狀態를 나타낸 것이 Fig. 5(c)이다.

剛性영역 I에서 垂直分力의 合은 0이다. 即,

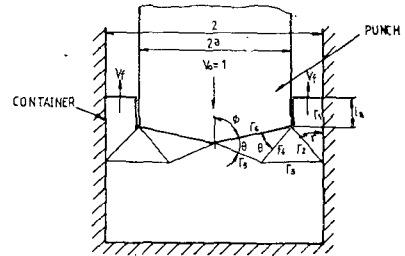
$$N_2 l_2 \sin \gamma - k_2 l_2 \cos \gamma - mk_1 l_1 = 0 \quad (45)$$

여기서 $2a$ 는 펀치의 幅이고 $l_1 = \{a \cos \gamma / (2 \sin \phi \cos \theta) + l_0\}$ 이며 $l_2 = a / (2 \sin \phi \cos \theta)$ 이다. 式(45)에서

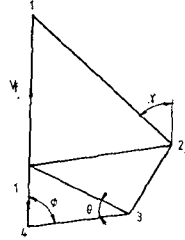
$$N_2 = k_2 \cot \gamma + \frac{mk_1}{\sin \gamma} \left(\cos \gamma + \frac{2l_0}{a} \sin \phi \cos \theta \right) \quad (46)$$

으로 된다. 剛性영역 II에서 垂直分力과 水平分力의 合은 0이다. 即

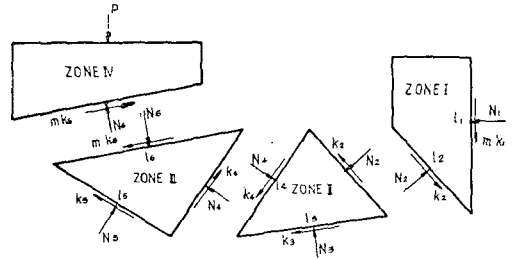
$$\begin{aligned} \sum F_V = 0 \\ -N_2 l_2 \sin \gamma + k_2 l_2 \cos \gamma + N_3 l_3 \cos \left(\frac{\theta + \gamma - \phi}{2} \right) \\ - k_3 l_3 \sin \left(\frac{\theta + \gamma - \phi}{2} \right) - N_4 l_4 \sin(\phi - \theta) - k_4 l_4 \cos(\phi - \theta) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$



(a) Pattern of velocity discontinuities



(b) Hodograph to (a) one half of complete pattern



(c) Force balance one half of complete pattern

Fig. 5 Plane strain backward extrusion

$$\sum F_H = 0$$

$$\begin{aligned} -N_2 l_2 \cos \gamma - k_2 l_2 \sin \gamma - N_3 l_3 \sin \left(\frac{\theta + \gamma - \phi}{2} \right) \\ - k_3 l_3 \cos \left(\frac{\theta + \gamma - \phi}{2} \right) + N_4 l_4 \cos(\phi - \theta) - k_4 l_4 \sin(\phi - \theta) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

여기서 $l_3 = a \left\{ \sin \left(\frac{\phi + \gamma - \theta}{2} \right) / \sin \phi \cos \theta \right\}$ 이고 $l_4 = a / 2 \sin \phi \cos \theta$ 이다. 式(47)과 (48)에서 N_4 를 求하면

$$N_4 = \frac{mk_1}{\sin \gamma} \left(\cos \gamma + \frac{2l_0}{a} \sin \phi \cos \theta \right) + k_2 \cos \gamma + (k_2 + k_3 + k_4) \tan \left(\frac{\phi + \gamma - \theta}{2} \right) \quad (49)$$

剛性영역 III에서 水平分力과 垂直分力의 合은 各各 0이다.

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 \\ -N_4 l_4 \cos(\phi - \theta) + k_4 l_4 \sin(\phi - \theta) - N_5 l_5 \cos(\theta + \phi) \end{aligned}$$

$$-k_5 l_5 \sin(\theta + \phi) + N_6 l_6 \cos \phi - m_6 k_6 l \sin \phi = 0 \quad (50)$$

$$\Sigma F_V = 0$$

$$N_4 l_4 \sin(\phi - \theta) + k_4 l_4 \cos(\phi - \theta) + N_5 l_5 \sin(\theta + \phi) - k_5 l_5 \cos(\theta + \phi) - N_6 l_6 \sin \phi - m k_6 l_6 \cos \phi = 0 \quad (51)$$

여기서 $l_5 = l_4 = l_2 = a/2 \sin \phi \sin \theta$ 이고 $l_6 = a/\sin \phi$ 이다. 式(49)를 式(50)과 (51)에 代入한 後 그 結果式에서 N_6 를 求하면

$$N_6 = \frac{m k_1}{\sin \gamma} \left(\cos \gamma + \frac{2 l_0}{a} \sin \phi \cos \theta \right) + k_2 \cos \gamma + (k_2 + 2 k_3 + k_4) \tan \left(\frac{\phi + \gamma - \theta}{2} \right) - k_4 \cot 2\theta + k_5 / \sin 2\theta + m k_6 \cot \theta \quad (52)$$

剛性영역 IV에서 垂直分力の 合이 0인 平衡式에 式(52)를 代入하면

$$p = (N_6 l_6 \sin \phi + m k_6 l_6 \cos \phi) / a = \frac{m k_1}{\sin \gamma} \left(\cos \gamma + \frac{2 l_0}{a} \sin \phi \cos \theta \right) + k_2 \cot \gamma + (k_2 + 2 k_3 + k_4) \tan \left(\frac{\phi + \gamma - \theta}{2} \right) - k_4 \cot 2\theta + k_5 / \sin 2\theta + m k_6 (\cot \theta + \cot \phi) \quad (53)$$

으로 된다. 非硬化性 材料인 경우 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k$ 이므로 式(53)에서 펀치에 作用하는 平均壓力 $p/2k$ 는

$$\frac{p}{2k} = \left\{ 4 \tan \left(\frac{\phi + \gamma - \theta}{2} \right) + \cot \theta + \cot \gamma + m \left(\cot \gamma + \cot \theta + \cot \phi + \frac{2 l_0 \sin \phi \cos \theta}{a \sin \gamma} \right) \right\} / 2 \quad (54)$$

3. 結果 및 考察

힘 平衡法에 依하여 上界解를 求한 各 경우들에 對하여 同一한 變形 모델을 使用하여 運動學的 可容速度場으로부터 求한 上界解는 다음과 같다.

(1) 單一 노치가 있는 棒을 塑性굽힘할 때 Fig.1 (a)의 變形 모델을 利用하여 運動學的 可容速度場에 依한 上界解⁽⁵⁾는

$$M = k a^2 \alpha / 2 \sin^2 \alpha$$

(2) 平面變形狀態에서 密閉型 鍛造를 할 때 Fig. 2(a)와 2(b)인 變形 모델과 호도그래프를 使用하여 W. Johnson^(5,6)이 求한 上界解는

$$\frac{p}{2k} = \left\{ \frac{H}{2 \sin^2 \theta} + \frac{H \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \theta \sin(\theta - \gamma)} + \frac{(H-h) \cos \theta}{\sin \gamma \sin(\theta - \gamma)} + \frac{h \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \beta \sin(\theta - \gamma)} \right\} / L$$

$$= \left\{ \frac{h \sin(\theta + \gamma)}{2 \sin^2 \beta} + \frac{(H-h) \cos \theta}{\sin \gamma} + \frac{H \cos \gamma}{\sin \theta} \right\} / L \sin(\theta - \gamma)$$

(3) 4角形 블록을 平面變形狀態로 壓縮할 때 Fig. 3(a)인 變形 모델을 使用하여 運動學的 可容速度場으로부터 求한 上界解는

$$\frac{p}{2k} = \left(-\frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{2}{3} m \cot \theta \right)$$

이고 펀치와 素材사이에 摩擦이 無하다고 假定할 때 上界解⁽⁷⁾는 다음 式과 같다.

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{\sin 2\theta}$$

(4) 限定된 接觸길이를 가진 바이트로 2次元 切削을 할 때 Fig. 4(a)와 4(b)인 變形 모델과 호도그래프⁽⁸⁾를 利用하여 求한 上界解는

$$F_c = k t \left[2 \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\cos(\phi + \frac{\theta}{2}) - \sin(\phi + \frac{\theta}{2})}{\cos \frac{\theta}{2} \{ \cos(\phi + \theta) + \sin(\phi + \theta) \}} + \frac{2 \cos(\phi + \theta)}{\cos(\phi + \theta) + \sin(\phi + \theta)} + \frac{m \sin(\phi + \frac{\theta}{2})}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \phi} \right] = k t \left\{ \frac{3 - \tan(\phi + \theta)}{1 + \tan(\phi + \theta)} + 3 \tan \frac{\theta}{2} + m \left(\tan \frac{\theta}{2} + \tan \phi \right) \right.$$

(5) 平面變形 後方押出할 때 Fig. 5(a)와 5(b)인 變形 모델과 호도그래프⁽⁸⁾를 使用하여 求한 上界解는

$$\frac{p}{2k} = \left\{ 4 \tan \left(\frac{\phi + \gamma - \theta}{2} \right) + \cot \theta + \cot \gamma + m \left(\cot \gamma + \cot \theta + \cot \phi + \frac{2 l_0 \sin \phi \cos \theta}{a \sin \gamma} \right) \right\} / 2$$

以上과 같이 運動學的 可容速度場에 依한 上界解를 同一한 變形 모델을 使用하여 힘平衡法으로 부터 求한 上界解, 式(6), 式(20), 式(33)과 (34), 式(44) 및 式(54)와 比較하면 同一한 結果임을 알 수 있다. 密閉型 鍛造와 4角形 블록의 壓縮인 경우 運動學的 可容速度場에 依한 上界解는 다리와 펀치 全길이에 作用하는 平均壓力이지만 힘平衡法에 依하면 다리와 펀치에 作用하는 平均壓力 以外에 局部的으로 다리와 펀치에 作用하는 壓力을 式(17)과 式(18), 式(27)과 式(31)에 依해서 求할 수 있다. Fig. 2(d)와 Fig.3(c)는 局部的으로 다리와 펀치에 作用하는 壓力을 나타낸 그림이다.

4. 結 論

本 論文에는 單一 노치가 있는 棒의 塑性굽힘, 密閉型 鍛造, 4角形 블록의 壓縮, 2次元 切削加工 및 平面

變形後方押出 等の 平面變形 成形問題에서 工具와 素材 사이에 一定한 摩擦應力이 作用한다는 假定下에 힘 平衡法에 依해 求한 上界解가 同一한 變形모델을 使用하여 運動學的 可容速度場에 依해 求한 上界解와 同一함을 立證하였다. 또 힘 平衡法에 依해 上界解를 求하면 工具에 作用하는 全길이에 對한 平均壓力 以外에 局部的으로 工具에 作用하는 壓力도 同時에 얻을 수 있다.

參 考 文 獻

- (1) D. Westwood and J.F. Wallace, "Upper-Bound Values for the Loads on a Rigid-Plastic Body in Plane Strain", J. of Mech. Sci., Vol. 2, No. 3, pp. 178~187, 1960
- (2) B. Avitzur and J.C. Choi, "Compatibility of the Upper-Bound Approach and the Balance of Forces for the Treatment of Metal Forming Processes", in Journal of Mechanical Working Technology, Vol. 13, pp. 141~150, 1986
- (3) B. Avitzur, J.C. Choi and B.M. Kim, "Upper Bound Solutions for Several Metal Forming Processes", to be Published in NAMRC XIV Conference Proceedings(1986, May)
- (4) B. Avitzur, J.C. Choi and H.S. Kim, "Upper-Bound Approach and Balance of Forces on Strip Rolling Process", to be Published.
- (5) W. Johnson and P.B. Mellor, "Engineering Plasticity", pp. 422~423, 432~440, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1978
- (6) W. Johnson, "Over Estimates of Load for Some Two-Dimensional Forging Operations", Proc. 3rd. U.S. Cong. appl. Mech., pp. 571~579, 1958
- (7) R.A.C. Slater, "Engineering Plasticity", pp. 365~366, Macmillan Press, London, 1977
- (8) H. Lippman, "Engineering Plasticity", pp. 98~111, Springer Verlag, Wien-New York, 1977