

<論 文>

확률적 선형화를 이용한 철도차량의 횡방향 진동에 관한 연구

임 종 순\* · 박 윤 식\*\*

(1986년 6월 28일 접수)

A Study on the Lateral Vibration of a Railway Vehicle Utilizing Statistical Linearization Technique

Jong-Soon Im and Youn-Sik Park

Key Words; Railway Vehicle(철도차량), Hunting(진동현상), Statistical Linearization(확률적 선형화), Creep Force(크리이프 힘), Contact Point(접촉점)

Abstract

The lateral vibrating motion of a railway vehicle over a certain critical speed is a well known problem in the field of train dynamics. It is known that the train equations of motion are strongly coupled and highly nonlinear with the motion and causing that it is very difficult to solve the equations simultaneously. In this paper, a 8 degree of freedom model of a railway vehicle was suggested to solve the rail vehicle lateral motion. In stead of solving the nonlinear equation simultaneously, statistical linearization technique was adopted to solve those equations.

The analysis results from the statistical linearization method were directly compared with those from direct nonlinear equations and found that the linearization technique can be very effective and economical for railroad vehicle analysis.

By the way, it was found that the analysis results can analytically explain the intermittent hunting phenomena which has been frequently observed in experiments.

기 호 설 명

- $C_{px}$  : 1차 현가장치(primary suspension)에서의  $x$  방향(주행방향) 감쇠계수
- $C_{py}$  : 1차 현가장치(primary suspension)에서의 횡방향 감쇠계수
- $C_{sz}$  : 2차 현가장치(secondary suspension)에서의 횡방향 감쇠계수

- $C_{sz}$  : 2차 현가장치(secondary suspension)에서의  $z$  방향(지면에 수직) 감쇠계수
- $F_{Lxi}, F_{Rxi}$  :  $i$ 번째 wheelset의 좌측 및 우측 wheel에 작용되는 주행방향 크리이프 힘
- $F_{Ly_i}, F_{Ry_i}$  :  $i$ 번째 wheelset의 좌측 및 우측 wheel에 작용되는 횡방향 크리이프 힘
- $F_{suspi}$  :  $i$ 번째 wheelset에 작용되는 현가장치에 의한 힘.
- $I_c$  : 차체 톨링 관성 모우멘트
- $I_{w_i}$  : Wheelset의 pitch 관성 모우멘트

\* 正會員, 한국과학기술원 기계시스템실

\*\* 正會員, 한국과학기술원 기계공학과

- $I_\phi$  : 대차의 Yawing 관성 모우먼트
- $K_{px}$  : 1 차 현가장치(primary suspension)에서의  $x$  방향(주행방향) 강성계수
- $K_{py}$  : 1 차 현가장치(primary suspension)에서의 횡방향 강성계수
- $K_{sx}$  : 2 차 현가장치(secondary suspension)에서의  $x$  방향(주행방향) 강성계수
- $K_{sy}$  : 2 차 현가장치(secondary suspension)에서의 횡방향 강성계수
- $K_{sz}$  : 2 차 현가장치(secondary suspension)에서의  $z$  방향(지면에 수직) 강성계수
- $M_c$  : 차체 질량( $W_c = M_c g$ )
- $M_{Lzi}, M_{Rzi}$  :  $i$  번째 wheelset 의 좌측 및 우측 wheel에 작용되는 크리이프 모우먼트
- $M_{Lzspi}$  :  $i$  번째 wheelset 의 현가장치에서 발생하는 모우먼트
- $M_i$  : 대차의 질량
- $M_w$  : Wheelset 의 질량
- $N_{Li}, N_{Ri}$  :  $i$  번째 wheelset 의 좌측 및 우측 wheel에 작용되는 반력
- $V$  : 주행속도
- $a$  : Wheel 접촉점간 거리의 1/2
- $b$  : Wheelset 간 거리의 1/2( $K_{py}$  스프링사이 거리의 1/2)
- $d_p$  :  $K_{px}$  스프링 사이거리의 1/2
- $d_s$  :  $K_{sx}$  스프링 사이거리의 1/2
- $d_{sz}$  :  $K_{sz}$  스프링 사이거리의 1/2
- $f_{ij}$  : 크리이프턴 계수
- $h_c$  : 차체중심과  $K_{sy}$  스프링간의  $z$  방향 거리
- $r_L, r_R$  : 좌측 및 우측 wheel 의 굴름반경
- $r_0$  : Wheelset 이 중심위치에 있을때의 굴름반경
- $y_c$  : 차체의 횡방향 변위
- $y_i$  :  $i$  번째 wheelset 의 횡방향 변위
- $y_i$  : 대차의 횡방향 변위
- $\delta_L, \delta_R$  : 좌측 및 우측 wheel 과 레일의 접촉각
- $\xi$  : Creepage
- $\phi_c$  : 차체의 roll 각
- $\phi_i$  :  $i$  번째 wheelset 의 roll 각
- $\psi_i$  :  $i$  번째 wheelset 의 yaw 각
- $\psi_i$  : 대차의 yaw 각

1. 서 론

레일 위를 주행하는 철도차량 동역학 문제는 매우 오

래 전부터 연구되어 왔으며 레일 및 바퀴의 비선형적 기하학적 형상이 철도차량 운동에 매우 중요하다는 것은 잘 알려진 사실이다. 특히 측방향 자력 진동현상(hunting)은 안정성 문제와 관련하여 한계 사이클(limit cycle) 문제로 많은 연구 결과가 발표 되었고 그 결과, 철도차량의 현가장치, 레일 및 바퀴의 형상을 정하는 많은 기준과 자료를 얻을 수 있었다. 그러나 최근 철도 차량의 고속화에 따라 기존의 한계 사이클 문제뿐 아니라 철도차량 바퀴(wheelset)와 레일 사이의 상대운동에서 발생하는 측방향 힘에 의한 강제진동 현상을 해석하므로써 안정성과 승차감을 고려한 최적 주행 속도를 결정하거나 주행능 향상을 위한 철도차량 대차(bogie)의 동적변수 수정을 시도하고 있다.

지금까지 발표된 이론해석 및 실험연구 결과<sup>(1,2)</sup>를 보면 철도차량 측방향 진동은 레일과 바퀴의 접촉위치와 그에 따라 발생하는 접촉력등이 비선형으로 나타나며 이에 의하여 측방향 강제진동 응답도 강한 비선형성을 갖게된다. 이와같은 비선형 방정식을 해석하는데 있어 직접적인 수치적분을 통하여 모든 방정식을 동시에 푸는 것이 가능하나 각 변수간의 상호 연관(coupling) 및 강한 비선형으로 인하여 시간증분(time interval)을 아주 짧게 잡아야 하며 그에 따른 계산시간과다로 다자유도 동적 시스템을 직접 해석하는에는 많은 어려움이 있다. 또한 비선형 요소를 급수 전개하여 단순 선형화법으로 해석하기에는 비선형 요소가 너무 강하므로 좋은 해석 결과를 얻을 수 없다. Hull과 Cooperrider<sup>(3)</sup>은 Quasi-Linearization 법을 사용하여 레일과 바퀴의 형상을 단순화하고 각 변수의 측방향 운동에의 영향을 연구하였으며 확률적 선형화 방법(statistical linearization technique)을 철도 차량 해석에 도입하여 직선레일위를 주행하는 철도차량의 측방향 강제 진동 및 안정성을 해석하였으며 Yokose<sup>(4)</sup>는 현가장치에서의 마찰력에서 기인하는 비선형 요소를 갖는 철도차량이 정현함수(sinusoidal function)의 불규칙성을 갖는 레일 위를 주행할 때 측방향 강제 진동을 해석하였으나 정현함수의 레일형태를 가정하였으므로 실제 적용에는 적합치 않다.

본 연구에서는 레일의 불규칙성을 가우시안 분포(Gaussian distribution)를 갖는 랜덤함수로 보고 레일과 바퀴의 비선형기하학적 형상을 확률적 선형화 방법으로 단순화하여 측방향 강제진동 응답을 구하였다. 또 구하여진 rms 응답 스펙트럼은 비선형 방정식을 직접 수치적분하여 구한 결과와 비교하므로써 확률적 선형화방법의 효용성을 보였다. 또한 열차 주행 속도를

변화 시키면서 강제 진동 응답을 시간 영역에서 구하였으며 그로부터 지금까지 실험결과에서 나타나고 있는 간헐적헌팅(intermittent hunting)에 대한 현상을 설명하였다.

2. 모델 및 운동방정식

보통 철도차량은 차체에 2대의 대차(bogie)가 있으며 각 대차에 2세트의 바퀴가 달려있다. 즉 열차 전체에 대한 동운동해석 모델을 얻기 위하여는 많은 자유도가 필요하나<sup>(5)</sup> 많은 경우에 중요하지 않은 자유도를 생략하여 축소된 모델을 사용하며 본 연구에서도 Fig. 1, 2와 같이 차체 절반에 해당되는 Pseudo Carbody의 roll과 횡운동(lateral), 대차와 2바퀴세트의 yaw와 횡운동만을 고려한 8자유도 모델을 수립하였다. 철도차량이 랜덤한 불규칙성을 갖는 레일 위를 일정 속도로 직선 주행하는 경우 대차의 roll, pitch...등은 바퀴의 횡운동에 미미한 영향만을 주므로 무시하였다. 이와같은 8 자유계의 모델은 기차의 동적 특성을 작은 오차로써 충분히 나타낼 수 있다<sup>(1,6)</sup>. 철도차량의 운동방정식은 Wikens<sup>(7)</sup>에 의해 정립된 이후 꾸준히 발전되어 거의 일반화 되었으며 본 연구에서 다루어진 8 자유도 운동방정식은 다음과 같다(자세한 내용은 참고문헌 (5) 및 (8) 참조).

차체 횡운동( $y_c$ )

$$M_c \ddot{y}_c + 2C_{sy} (\dot{y}_c + h_c \dot{\phi}_c - \dot{y}_i) + 2K_{sy} (y_c + h_c \phi_c - y_i) = 0 \tag{1}$$

차체 roll( $\phi_c$ )

$$I_c \ddot{\phi}_c + 2h_c \{ C_{sy} (\dot{y}_c - \dot{y}_i) + K_{sy} (y_c - y_i) \} + 2h_c^2 (C_{s2} \dot{\phi}_c + K_{s2} \phi_c) - 2d_{s2}^2 (C_{s2} \dot{\phi}_c + K_{s2} \phi_c) + W_c h_c \phi_c = 0 \tag{2}$$

대차 횡운동( $y_i$ )

$$M_i \ddot{y}_i + 2C_{py} (2\dot{y}_i - \dot{y}_1 - \dot{y}_2) + K_{py} (2y_i - y_1 - y_2) + 2C_{sy} (\dot{y}_i - \dot{y}_c - h_c \dot{\phi}_c) + 2K_{sy} (y_i - y_c - h_c \phi_c) = 0 \tag{3}$$

대차 yaw( $\psi_i$ )

$$I_i \ddot{\psi}_i + 2C_{py} b (2b\dot{\psi}_i - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 2K_{py} b (2b\psi_i - y_1 + y_2) + 2C_{px} d_p^2 (2\dot{\psi}_i - \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) + 2K_{px} d_p^2 (2\psi_i - \psi_1 - \psi_2) + 2C_{sx} d_s^2 \dot{\psi}_i + 2K_{sx} d_s^2 \psi_i = 0 \tag{4}$$

Wheelset 횡운동( $y_i$ )  $i=1, 2$

$$M_w \ddot{y}_i = F_{Ryi} + F_{Lyi} + F_{su3pyi} + N_{Ri} \sin(\delta_{Ri} - \phi_i) - N_{Li} \sin(\delta_{Li} + \phi_i) \tag{5}$$

Wheelset yaw( $\phi_i$ )  $i=1, 2$

$$I_w \ddot{\phi}_i = -I_{wy} \frac{V}{r_0} \dot{\phi}_i + (F_{Ryi} - F_{Lyi}) a \phi_i$$

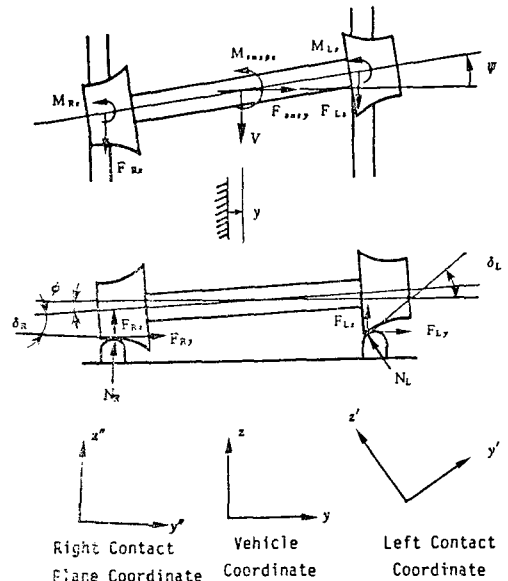


Fig. 2 Wheelset free body diagram and coordinate system

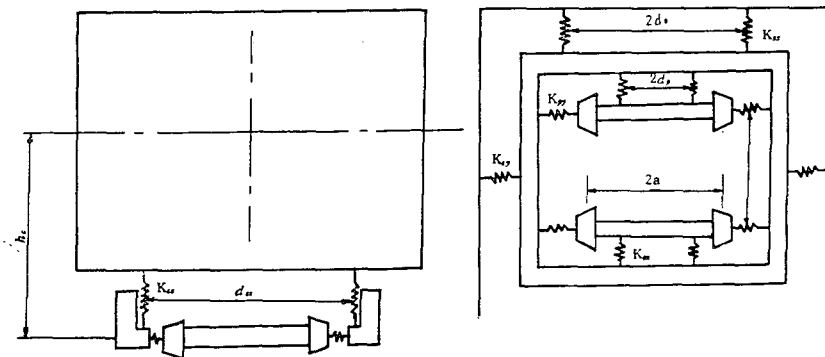


Fig. 1 Vehicle model including a pseudo carbody, a bogie and two wheelset

$$\begin{aligned}
 & + (F_{Rx_i} - F_{Lx_i})a + [N_{Ri} \sin(\delta_{Ri} - \phi_i) \\
 & + N_{Li} \sin(\delta_{Li} + \phi_i)] a \psi_i \\
 & + M_{Lz_i} + M_{Rz_i} + M_{zusp_{z_i}} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Fig. 2로부터

$$\begin{aligned}
 F_{zusp_{y_i}} &= 2C_{py}(\dot{y}_i + b\phi_i - \dot{y}_i) + 2K_{py}(y_i + b\phi_i - y_i) \\
 F_{zusp_{y_2}} &= 2C_{py}(\dot{y}_i - b\phi_i - \dot{y}_i) + 2K_{py}(y_i - b\phi_i - y_i) \\
 F_{zusp_{z_i}} &= 2d_p^2 C_{pz}(\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_i) + 2d_p^2 K_{pz}(\phi_i - \phi_i) \\
 N_{Ri} &= \frac{\{a - r_0 \tan(\delta_{Li} + \phi_i)\} N_0}{[2a - r_0 \{ \tan(\delta_{Li} + \phi_i) + \tan(\delta_{Ri} - \phi_i) \}] \cos(\delta_{Ri} - \phi_i)} \\
 N_{Li} &= \frac{\{a - r_0 \tan(\delta_{Ri} - \phi_i)\} N_0}{[2a - r_0 \{ \tan(\delta_{Li} + \phi_i) + \tan(\delta_{Ri} - \phi_i) \}] \cos(\delta_{Li} + \phi_i)} \quad (7)
 \end{aligned}$$

식 (1)~(7)을 보면 철도차량 및 대차의 운동은 wheelset의 운동과 관련되어지며 wheelset의 운동은 크리이프힘에 강한 영향을 받음을 알 수 있다. 크리이프힘은 Kalker<sup>(9)</sup>의 크리이프 이론을 근간으로 Horak<sup>(1)</sup> 등에 의해서 비선형성이 고려된 수정된 관계식이 유도 사용된다. 즉 Fig. 2에 표시된 좌표계를 사용하여 크리이프힘과 그에 대응되는 creepage를 나타내면

$$\begin{aligned}
 F_{x_i} &= -f_{33} \xi_{x_i} \\
 F_{y_i} &= -f_{11} \xi_{y_i} - f_{12} \xi_{z_i} \\
 M_{z_i} &= f_{12} \xi_{y_i} - f_{22} \xi_{z_i} \quad (8) \\
 \xi_{x_{Li}} &= \frac{1}{V} \left\{ V \left( 1 - \frac{r_{Li}}{r_0} \right) - a \phi_i \right\}, \\
 \xi_{x_{Ri}} &= \frac{1}{V} \left\{ V \left( 1 - \frac{r_{Ri}}{r_0} \right) + a \phi_i \right\}
 \end{aligned}$$

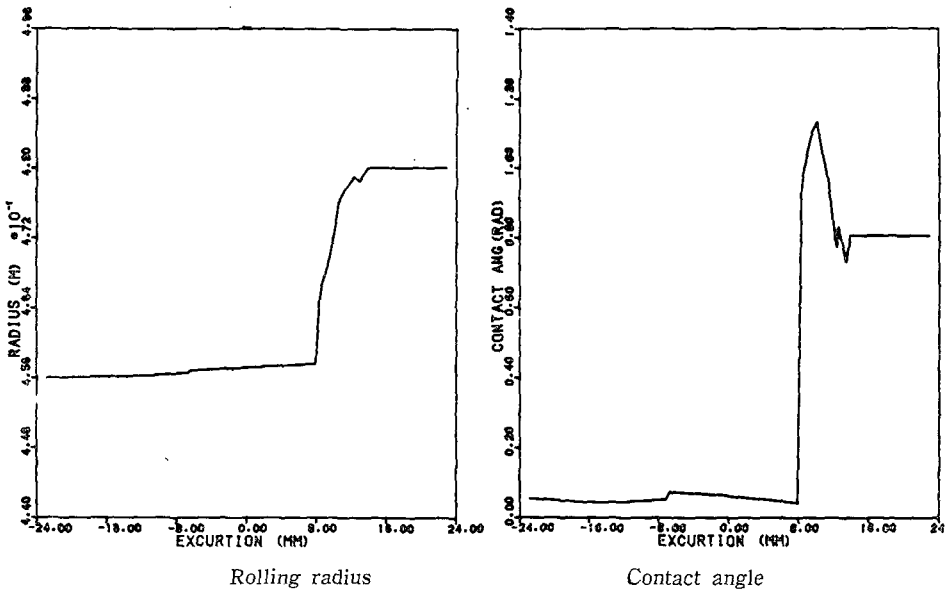


Fig. 3 A typical wheel/rail geometry

$$\begin{aligned}
 \xi_{y'_{Li}} &= \frac{\dot{y}_i + r_0 \dot{\phi}_i - V \phi_i}{V \cos(\delta_{Li} + \phi_i)}, \quad \xi_{y'_{Ri}} = \frac{\dot{y}_i + r_0 \dot{\phi}_i - V \phi_i}{V \cos(\delta_{Ri} - \phi_i)} \\
 \xi_{z_{Li}} &= \frac{1}{V} \left\{ \phi_i \cos(\delta_{Li} + \phi_i) - \frac{V}{r_0} \sin \delta_{Li} \right\}, \\
 \xi_{z_{Ri}} &= \frac{1}{V} \left\{ \phi_i \cos(\delta_{Ri} - \phi_i) + \frac{V}{r_0} \sin \delta_{Ri} \right\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

식 (8)과 (9)를 보면 크리이프힘은 접촉각 굴림반경 (roll radius), 주행속도, wheelset의 roll, yaw 및 횡방향 운동에 의하여 정해짐을 알 수 있다. 바퀴와 레일의 형상을 보면 wheelset의 횡방향 변위에 대하여 굴림반경 및 접촉각은 강한 비선형성을 띄게 되므로 철도차량 동해석 방정식은 전체적으로 변수 상호간의 연관 및 비선형성을 갖게된다. Wheelset 및 레일의 규격, 종류 및 마멸도에 따라서 접촉각 및 굴림반경이 다르게 되며 Fig. 3은 wheel thread 부근의 conicity가 1/20인 AAR(Association of American Railroads)의 마멸되지 않은 wheel(new wheel)의 기하학적 형태를 보여준다<sup>(10)</sup>.

### 3. 확률적 선형화(Statistical Linearization)

확률적 선형화 방법은 비선형량  $f(u)$ 를 입력변수  $u$ 와 최적선형 증비  $K_a$ 의 곱으로 즉  $f(u) \approx K_a u$ 로 확률밀도함수를 사용하여 근사화 하는 방법이다. 이때  $\varepsilon = f(u) - K_a u$ 이라 하면  $E[\varepsilon^2]$ 를 최소화하는  $K_a$  값을 구할 수 있다.  $p(u)$ 를  $u$ 의 확률밀도 함수(probability

density function)라 하면

$$E[\varepsilon^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(u) - K_a u)^2 p(u) du \quad (10)$$

$$\frac{\partial E[\varepsilon^2]}{\partial K_a} = 0 \text{에서}$$

$$K_a = \frac{E[uf(u)]}{E[u^2]} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} uf(u)p(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 p(u) du} \quad (11)$$

즉 비선형량  $f(u)$ 와 입력변수  $u$ 의 확률 밀도함수가 선형증비를 결정하게 된다. 일반적으로 비선형 동적계의 운동방정식은 아래와 같으며

$$[M]\{\dot{y}\} + f(\{y\}, \{\dot{y}\}) = [F]\{r(t)\} \quad (12)$$

비선형 항  $(f\{y\}, \{\dot{y}\})$ 을 확률적 선형화 방법으로 선형증비를 구하여 선형화하면

$$[M]\{\dot{y}\} + [D]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = [F]\{r(t)\} \quad (13)$$

과 같이 표현할 수 있다.

철도차량의 운동방정식 식 (1)~(9)를 보면 Fig. 3에서 보여진바와 같은 wheel 및 레일의 기하학적 형상에 의한 비선형성과  $f_{ij}$  즉 크리이프힘 계수의 비선형성에 의한 비선형 크리이프힘으로 대별할 수 있다. 먼저 기하학적 형상에 의한 비선형성은 식 (14)와 같이 4개의 선형증비로 선형화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{r_L - r_R}{2} &\cong \lambda u \\ \frac{N_0 \{\tan(\delta_L + \phi) - \tan(\delta_R - \phi)\}}{2 - \frac{r_0}{a} \{\tan(\delta_L + \phi) + \tan(\delta_R - \phi)\}} &\cong K_a u \\ \phi &\cong \alpha u \\ \sin \delta_L - \sin \delta_R &\cong \Delta u \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

- $\lambda$  : Effective concity
- $K_a$  : Gravitational stiffness
- $\alpha$  : Effective roll slope
- $\Delta$  : Effective contact angle slope

또한 크리이프힘의 비선형성은 크리이프힘 계수  $f_{ij}$ 의 비선형성에서 기인한다고 알려져 있으므로 식 (15)와 같이 선형화 할 수 있다.

$$f_{ij} = \tau f_{ijn} \quad (15)$$

여기서  $f_{ijn}$  : 정하중상태에서 계산된 크리이프힘 계수 (nominal value)

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(u) p(u) du \quad (16)$$

$\alpha$  : 크리이프힘 계수의 비선형 형태

식 (14)~(16)에 표시된 선형증비는 입력변수  $u$ 의 확률밀도 함수  $p(u)$ 가 주어지면 식 (11)로부터 구할 수 있다. 불규칙한 형상을 갖는 레일 위를 철도차량이

일정속도로 주행할때의 레일과 바퀴사이 변위 (excursion)는 바퀴의 횡방향 진동변위와 레일 불규칙량의 차이이며 그 크기를 입력변수  $u$ 로 볼 수 있다. 헌팅과 같이 횡방향 진폭이 아주 크게 되지않은 범위에서는 입력변수  $u$ 는 평균값이 영이고 가우시안 분포를 갖는다고 가정할 수 있으며 그 경우  $p(u)$ 는 식 (17)과 같이 주어진다.

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \text{EXP}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma_u}\right)^2\right\} \quad (17)$$

즉 입력변수의 분산 (variance)  $\sigma_u$ 가 주어진다면  $p(u)$ 가 정해지며 선형증비를 확률적 선형화 방법으로 구할 수 있고 선형화 되어진 운동방정식은 일반적으로 식 (13)과 같이 표시된다. 식 (13)을 주파수 영역으로 바꾸면

$$\{y(j\omega)\} = [[k] - \omega^2[M] + j\omega[D]]^{-1}[F]\{r(j\omega)\} \quad (18)$$

여기서  $r(j\omega)$ 는 레일의 불규칙성을 나타내는 항이다. 계의 입력변수  $u$ 는  $y-r$ 로 나타낼 수 있으며 모든 자유도에 대하여 일반적으로 표시하면

$$\begin{aligned} \{u(j\omega)\} &= \{y(j\omega)\} - \{r(j\omega)\} \\ &= [H(j\omega)]\{r(j\omega)\} - \{j\omega\} \\ &= [H'(j\omega)]\{r(j\omega)\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\therefore \{u(j\omega)\} \{u(-j\omega)\}^T = [H'(j\omega)]\{r(j\omega)\} \{r(-j\omega)\}^T [H'(-j\omega)]^T \quad (20)$$

$$\therefore [S_u(j\omega)] = [H'(j\omega)][S_r(j\omega)][H'(-j\omega)]^T \quad (21)$$

레일 alignment 불규칙성을 나타내는  $S_r(j\omega)$ 항은 일반적으로 레일 등급에 따라 식 (22)와 같이 파워스펙트럼으로 나타낸다.

$$S_r(\Omega) = \frac{A Q_c^2}{(\Omega^2 + \Omega_a^2)(\Omega^2 + \Omega_c^2)} \text{ [m}^2/\text{(rad/m)]} \quad (22)$$

$A$  : Roughness factor

$\Omega_a, \Omega_c$  : Break wave number

여기서 유효한 주파수는 50Hz 이내<sup>(5)</sup>

본 연구에서는 가장 일반적인 레일인 6등급 레일을 사용하였으며 이때

$$A = 8.425 \times 10^{-7}, \Omega_a = 0.05, \Omega_c = 0.824$$

의 값을 갖게 된다.

식 (22)로부터 철도차량이 속도  $V$ 로 주행한다면  $\omega = 2\pi f = V\Omega$ 의 관계식을 이용하여

$$S_r(\omega) = \frac{A Q_c^2 V^3}{(\omega^2 + V^2 \Omega_a^2)(\omega^2 + V^2 \Omega_c^2)} \text{ [m}^2/\text{(rad/sec)]} \quad (23)$$

식 (21), (23)에서 입력변수  $u$ 의 파워스펙트럼  $[S_u$

( $j\omega$ )를 구할수 있으며 입력 변수  $u$ 는 평균값이 영으로 가정할수 있으므로 분산  $\sigma_u$ 는 식 (24)와 같이 구하여진다.

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(j\omega) d\omega \quad (24)$$

즉 확률적 선형화를 위하여 식 (17)에서 가정된  $\sigma_u$  값과 확률적 선형화후 운동방정식의 해를 구하는 과정에서 식 (24)에서 구한  $\sigma_u$  값이 일치되는 경우에만 완전한 등가의 선형계로 되었다고 할 수 있으며 그렇지 않은

경우의 확률적 선형적 해석 결과는 옳지 않다고 판단할 수 있다.

#### 4. 수치해석

본 연구에서 사용된 철도차량의 질량, 길이, .....등 각 상수값은 미국 AMTRAK 의 자료를 사용하였으며 Table 1에 나타나 있다.

Table 1 Baseline parameters for railway vehicle analysis

$f_{12}$	23760	(N·m)	$W_c$	409.263	(N)
$f_{22}$	154.97	(N·m <sup>2</sup> )	$I_{cz}$	$2.341 \times 10^6$	(kg·m <sup>2</sup> )
$f_{13}$	$11.23 \times 10^6$	(N)	$I_{cx}$	103,500	(kg·m <sup>2</sup> )
$f_{11}$	$9.98 \times 10^6$	(N)	$M_c$	41,740	(kg)
$a$	0.716	(m)	$K_{py}$	7,296,958	(N/m)
$N_0$	137.152	(N)	$K_{px}$	14,593,917	(N/m)
$M_w$	1751	(kg)	$C_{py}$	29,187	(N/m/s)
$I_{wx}$	761	(kg·m <sup>2</sup> )	$C_{px}$	58,375	(N/m/s)
$I_{wy}$	152	(kg·m <sup>2</sup> )	$K_{iy}$	350,254	(N/m)
$I_{wz}$	761	(kg·m <sup>2</sup> )	$K_{iz}$	323,968.5	(N/m)
$r_0$	0.4572	(m)	$C_{iy}$	27,512	(N/m/s)
$d_p$	0.06096	(m)	$C_{iz}$	29,187	(N/m/s)
$b$	1.295	(m)	$C_{psi}$	21,693	( $\frac{N \cdot m}{rad/s}$ )
$I_{iz}$	3371	(kg·m <sup>2</sup> )	$K_{ipsi}$	1,355,818	( $\frac{N \cdot m}{rod}$ )
$M_i$	3649	(kg)			
$d_i$	1.163	(m)			
$h_c$	0.8961	(m)			

전장에서 언급한 바와 같이 비선형 운동방정식을 확률적 선형화 기법을 도입하여 해석 하였으며 확률적 선형화 기법의 타당성을 보이기 위하여 몇가지 경우에 비선형 방정식을 직접 적분법으로 해석하여 그 결과를 비교하여 보았다. 확률적 선형화에 의한 해석과정은 Fig. 4와 같다.

#### 5. 해석 결과 및 토의

입력변수  $u$ 의 평균값은 영으로 가정하였으므로 분산  $\sigma_u^2$ 은 평균제곱(meansquare) 값과 같게 되며 분산을 가정하는 것은 rms 값을 가정하는 것은 동일한 결과를 얻게된다. 본 해석에서는 각 주행속도별로 비선형 요소에 의한 영향을 조사하기 위하여 열차 주행 속도를 30m/sec에서 80m/sec까지 증가시켜 가면서 응답의 rms 값을 가정하고 확률적 선형화하여 다시 진동

응답의 rms 값을 구하는 방법으로 계산하여 Fig. 5와 같은 결과를 얻었다.

Fig. 5를 보면 직선  $op$ 와 계산된 값이 만나는 점들이 가정된  $\sigma_u$  (또는 rms 값)와 진동응답의  $\sigma_u$  (또는 rms 값)과 일치하는 점이므로 확률적 선형화가 합당히 이루어진 조건으로 볼수 있고 그 점에서의 rms 값만이 실제적으로 발생가능한 진동응답으로 판단할 수 있다. 즉 상대적으로 저속에서는 직선  $op$ 와 만나는 점은 1점만이 존재하며 그점은 대개 rms 값이 2~3mm에서 존재하므로 매우 안정된 미소 진동만이 발생하게 되나 주행속도가 80m/sec에 가까워지면 직선  $op$ 와 1점에서만 만나게 되나 그 값이 약 8mm에 가까움을 알 수 있다. 즉 매우 큰 진동현상을 나타나게 되며 이러한 현상을 레일이 바퀴의 fringe와 계속 접촉하는 헌팅 현상으로 해석할 수 있다. 안정한 속도영역과 불안정 영역의 중간범위인 65m/sec~75m/sec에서는 직선  $op$

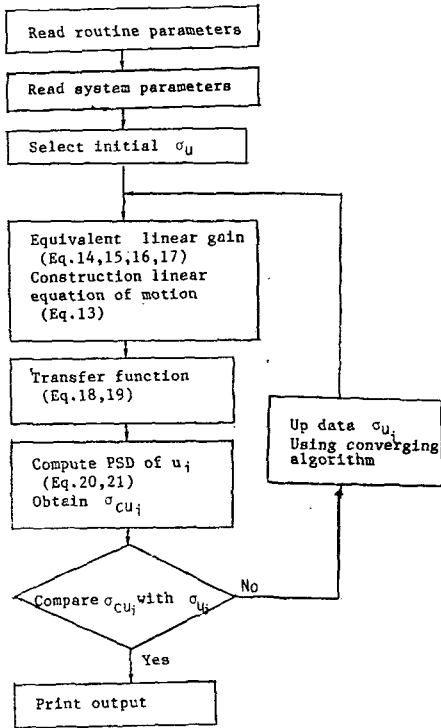


Fig. 4 Calculation flow chart

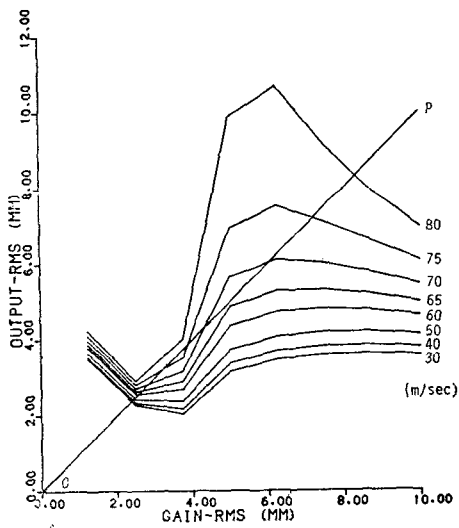
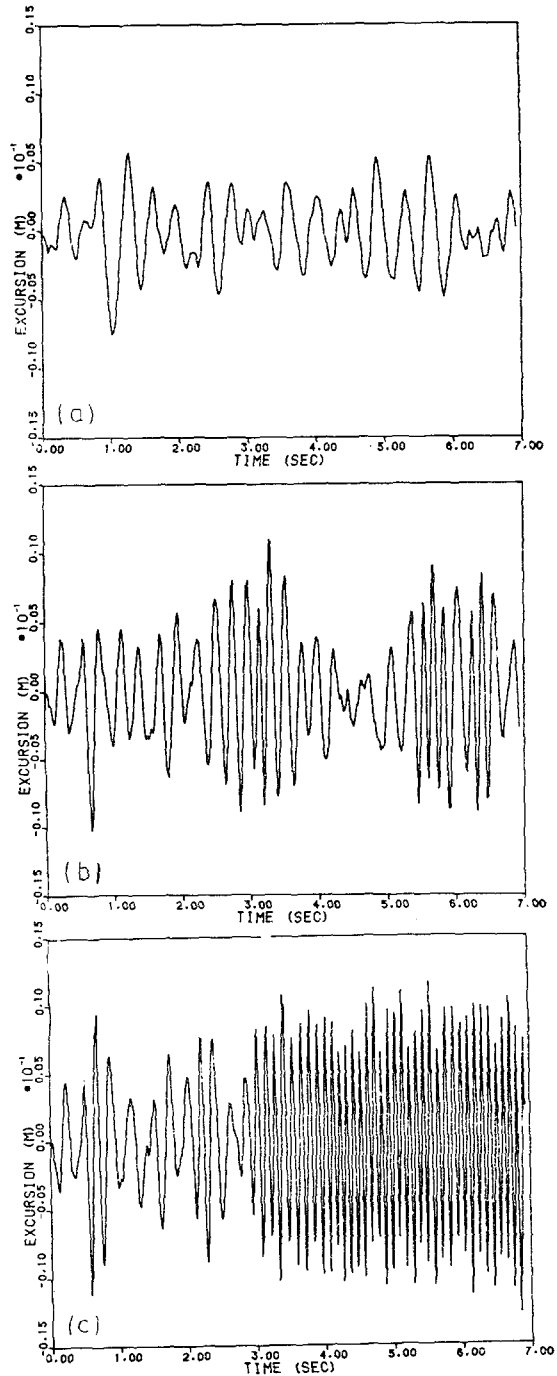


Fig. 5 Calculated wheelset excursion using statistical linearization technique



(a) (V=50m/sec) (b) (V=72m/sec)  
(c) (V=80m/sec)

Fig. 6 Directly calculated rms wheelset excursion

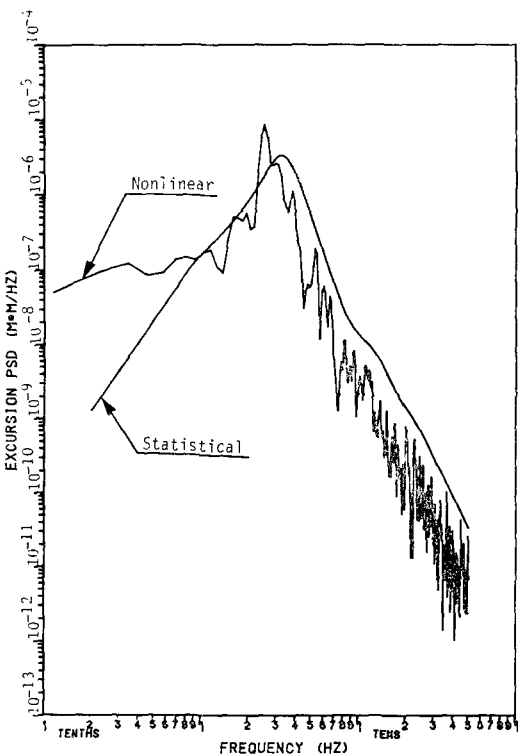
와 2점 이상에서 만나게 되며 그 값은 작은 진동은 3 mm~4mm 큰 진동은 6mm~7mm 부근에서 파상적으로 발생하며 이와같은 현상은 간헐적 헌팅으로 해석되어 질수 있다.

확률적 선형화에 의한 wheelset 횡방향 진동해석 결과의 타당성을 보기 위하여 비선형운동 방정식을 시간영역에서 직접 적분법으로 해석하였다. 이와같은 직접적분법은 많은 계산시간이 소요되므로 안전영역, 완전 헌팅영역, 중간영역을 대표하여 50m/sec, 80m/sec, 72 m/sec에 대하여서만 해석하였으며 그 결과는 Fig. 6에 보여준다. Fig. 6(a)는 시간영역에서 미소진동을 하는 것을 알수 있으며 직접적분법에 의하여 구한 시간영역에서 진동응답의 rms 값은 2.31mm로서 Fig. 5의 확률적 선형화 방법에서 구한값 2.51mm와 비슷한 결과를 얻었다. Fig. 6(b)는 미소진동과 큰 진동이 파상적으로 발생하는 것을 시간영역에서 beating 형태로 알수 있으며 이것은 Fig. 5에서 예측된 간헐적 헌팅으로 볼수 있다. Fig. 6(c)에서는 peak-peak 값이 크게는 20mm에 가깝도록 극렬하게 진동하는 현상을 볼수 있으며 이것은 Fig. 5에서 예견된 헌팅 현상을 나타낸다.

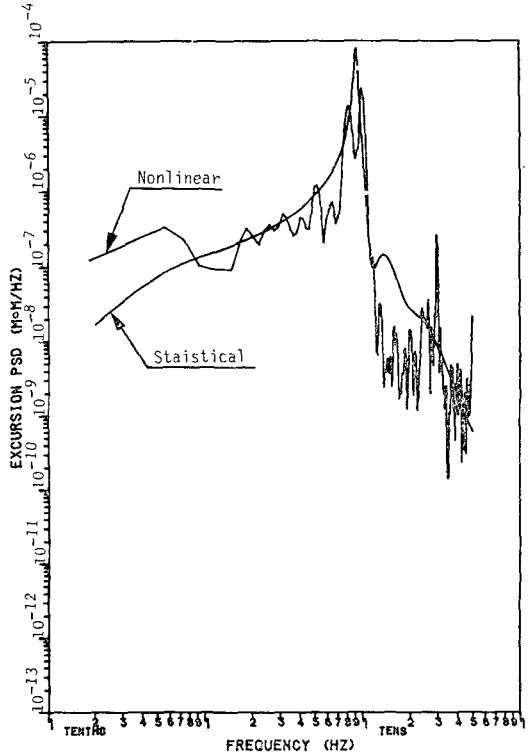
단 Fig. 6(b,c)에서 구하여진 rms 값은 계산된 0 초~7초 까지의 시간영역에서 산술적으로 구한 값으로 leading period[예를들면 Fig. 6(c)의 0초~3초 구간의 헌팅의 완전 발전되지 않은 영역]의 영향이 포함되어진 것이므로 Fig. 5의 결과와는 수치적으로 차이가 있다. 그러나 충분히 발전된 진동형태에서는와 매우 근사한 것을 알 수 있다.

Fig. 5와 6을 얻기 위한 컴퓨터 계산시간을 비교하여 보면 Fig. 6의 한 속도에 대한 시간영역 함수를 얻기 위하여 CDC Cyber 170-835로 150 unit가 소요된데 비하여 Fig. 5의 전체를 해석하는데는 단 79unit가 소요되었다.

다음으로는 비교적 정상상태에 있는 주행속도가 50 m/sec 인 경우와 80m/sec 의 경우에 대하여 등가선형화 방법과 직접적분법으로 구한 wheelset 진동 PSD (power spectrum density)을 계산하여 비교하였다. Wheelset의 횡방향 진동의 관심영역이 0.35Hz 이상인 점을 고려할 때 Fig. 7에 보인 등가선형화 방법에 의한 PSD가 직접적분법 결과와 매우 적은 오차만이 존재함을 알수 있다.



(a)  $V=50\text{m/sec}$



(b)  $V=80\text{m/sec}$

Fig. 7 Comparison of wheelset excursion



## 6. 결 론

확률적 등가 선형화 방법을 이용한 철도차량의 횡방향 진동해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 확률적 등가 선형화 방법을 통하여 비선형 운동 방정식을 매우 경제적이고 정확하게 해석이 가능함을 알 수 있다.

(2) 확률적 등가선형화 해석법을 사용하여 정상상태에서의 미소진동뿐 아니라 간헐적 헌팅(intermittent hunting)도 해석 가능함을 알 수 있었으며 그것은 지금까지 해석적, 실험적으로 밝혀진 결과와도 잘 일치한다.

## 참 고 문 헌

- (1) D. Horak, and D.N. Wormley, "Nonlinear Stability and Tracking of Rail Passenger Trucks", Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control Vol. 104, pp. 256~263, 1982
- (2) R.H. Fries, N.K. Cooperrider, and E.H. Law, "Experimental Investigation of Freight Car Lateral Dynamics", Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control Vol. 103, pp. 201~210, 1981
- (3) R. Hull, and N.K. Cooperriderrider, "Influence of Nonlinear Wheel/Rail Contact Geometry on Stability of Rail Vehicles", Transactions of ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 172~185, 1977
- (4) K. Yokose, K. Thuchiya, "On Analysis of Lateral Forced Vibration of Rail Vehicle Truck running on Rail with Sinusoidal Irregularity", Bulletin of JSME, Vol. 28, No. 235, pp. 139~147, 1985
- (5) Vijay K. Garg, and Rao V. Dukkipati, "Dynamics of Railway Vehicle Systems", Academic Press 1984
- (6) J.A. Hadden, and E.H. Law, "Effects of Truck Design on Hunting Stability of Railway Vehicles", Transactions of ASME Journal of Engineering for Industry, pp. 162~171, 1977
- (7) A.H. Wickens, "The Dynamic Stability of Railway Vehicle Wheelsets and Bogie Having Profiled Wheels", International Journal of Solid Structures, qp. 319~341, Vol. 1965
- (8) 임종순, "확률적 선형화를 이용한 철도차량의 측방향 진동에 관한연구", 한국과학기술원 석사학위논문, 1986
- (9) J.J. Kalker, The "Tangential Force Transmitted by Two Elastic Bodies Rolling Over Each Other with Pure Creepage", Wear II. pp. 421~430, 1968
- (10) N.K. Cooperrider, E.H. Law, R. Hull, P. S. Kadala, and J.M. Tuten "Analytical and Experimental Determination of Nonlinear Wheel/Rail Geometric Constraints", Proceedings of a Symposium on Rail Road Equipment Dynamics ASME, pp. 41~69, 1976