

<論 文>

De-Laval 노즐의 난류 경계층 유동이 연소실 압력에 미치는 영향

장 태 호\* · 이 방 업\* · 배 주 찬\*

(1986년 2월 20일 접수)

A Turbulent Boundary Layer Effect of the De-Laval Nozzle on the Combustion Chamber Pressure

Tae Ho Chang, Bang Eop Lee and Joo Chan Bae

Key Words; Compressible Turbulent Boundary Layer(압축성 난류 경계층), Integral Equation (적분 방정식), De-Laval Nozzle(De-Laval 노즐), Combustion Chamber Pressure (연소실 압력), Negative Displacement Thickness(음(-)의 배제두께)

Abstract

A Compressible turbulent boundary layer effect of the high temperature, accelerating gas flow through the De-Laval nozzle on combustion chamber pressure is numerically investigated. For this purpose, the coupled momentum integral equation and energy integral equation are solved by the Bartz method, and 1/7 power law for both the turbulent boundary layer velocity distribution and temperature distribution is assumed. As far as the boundary layer thicknesses are concerned, we can obtain reasonable solutions even if relatively simple approximations to the skin friction coefficient and Stanton number have been used.

The effects of nozzle wall cooling and/or mass flow rate on the boundary layer thicknesses and the combustion chamber pressure are studied. Specifically, negative displacement thickness is appeared as the ratio of the nozzle wall temperature to the stagnation temperature of the free stream decreases, and, consequently, it makes the combustion chamber pressure low.

기 호 설 명

A : 노즐 단면적

a : 식 (30)

b : 식 (30)

C<sub>f</sub> :  $2\tau_w/\rho_e u_e^2$ , 표면마찰계수

C<sub>h</sub> :  $q_w/\rho_e u_e c_p (T_{aw} - T_w)$ , Stanton 수

c : 식 (30)

c<sub>p</sub> : 연소가스의 정압비열

c\* : 특성속도, 식 (5)

D : 노즐 내경

h : 연소속도 계수, 식 (3)

L : 노즐 길이

\* 정회원, 대전기계창

- $M$  : Mach 수
- $m$  : 경계층 상관지수, 식 (25)
- $\dot{m}$  : 질량 유동률
- $n$  : 압력지수, 식 (3)
- $P$  : 압력
- $P_r$  : Prandtl 수
- $q_w$  : 노즐 벽에서의 열전달률
- $R$  : 기체상수
- $R_c$  : 회복인자 (recovery factor)
- $R_c^*$  : 식 (22)
- $r$  : 반경
- $r_b$  : 연소속도
- $r_c$  : 노즐 목의 곡률반경
- $S_b$  : 연소면적
- $T$  : 온도
- $t_0$  : 경계층 내의 정체온도
- $u$  :  $x$  방향 속도
- $x$  : 노즐 벽면에 평행한 좌표
- $y$  : 노즐 벽면과 직교하는 좌표
- $z$  : 노즐 중심축 방향의 좌표
- $\Gamma$  : Vandekerckhove 함수, 식 (2)
- $\gamma$  : 비열비
- $\Delta$  : 열경계층 두께
- $\delta$  : 점성경계층 두께
- $\delta^*$  :  $\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$ , 배제 두께
- $\epsilon$  : 반복계산 수렴 한계치
- $\zeta$  : 식 (30)
- $\eta$  : 식 (30)
- $\theta$  :  $\int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$ , 운동량 두께
- $\mu$  : 연소가스의 점성계수
- $\rho$  : 연소가스의 밀도
- $\rho_p$  : 연료의 밀도
- $\sigma$  : 식 (23)
- $\tau_w$  : 노즐 벽 전단응력
- $\phi$  :  $\int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{t_0 - T_w}{T_0 - T_w}\right) dy$ , 에너지 두께
- $\omega$  : 점성-온도 지수, 식 (19)

상 첨 자

- : 비압축성, 일정 성질
- ' : 노즐 목에서의 배제두께를 고려한 값

하 첨 자

- $t$  : 노즐 목

- 0 : 정체조건, 연소실조건
- $aw$  : 단열벽
- $w$  : 벽
- $r$  : 기준온도 조건
- $e$  : 자유유동 조건

1. 서 론

일반적으로 연소실의 연소특성을 지배하는 가장 큰 인자는 연소실압력이다. 연소가스가 초음속 De-Laval 노즐을 통해 유동할 경우, 연소실압력은 노즐목에서의 유동단면적에 직접 관련되고 그 관계는 노즐유동에 대한 기체역학이론과 연소속도에 대한 De-Vieille 법칙으로부터 유도된다<sup>(1)</sup>. 이때 노즐목에서의 유동면적으로서 기하학적 단면적을 사용하는 것이 보통이지만 노즐 벽면을 따라 형성되는 점성경계층의 배제두께 (displacement thickness)를 고려한 유효 유동단면적을 사용하는 것이 연소실압력을 예측하는 보다 적절한 방법일 것이다<sup>(2)</sup>. 특히 2000~3000K 정도의 고온의 연소가스가 유동하는 경우에는 노즐벽면의 냉각온도에 따라 노즐목에서의 배제두께가 음(-)이 되기도 하여<sup>(3-6)</sup> 경계층의 영향을 무시할 때 보다 오히려 연소실 예측 압력이 감소하는 결과를 초래할 것으로 예상된다. 본 논문은 이와 같은 현상과 관련하여 초음속 De-Laval 노즐에서의 유동조건과 노즐벽면의 냉각온도에 따른 점성경계층 및 연소실압력의 변화를 고찰하고자 한다.

초음속 De-Laval 노즐유동에서와 같이 고온 고속의 압축성유동을 수반하는 난류 경계층유동은 (유동조건에 따라 층류화 (laminarization)<sup>(4)</sup>가 발생할 수도 있으나 대부분의 관심의 대상이 되는 유동은 난류이다) 난류 구조에 대한 제한된 지식과 점성에 의한 에너지소산 (viscous energy dissipation)<sup>(7,8)</sup> 심한 압력구배<sup>(9,10)</sup>, 압축 및 온도에 따른 연소가스 성질의 변화<sup>(3-5,7,11)</sup>, 화학반응 및 질량확산<sup>(3,12,13)</sup> 등의 인자들이 복합적으로 작용하기 때문에 정확한 해를 구한다는 것은 아직까지는 불가능한 일이다. 대부분의 경계층유동에 대한 연구가 표면마찰계수 또는 대류 열전달계수를 예측하는 것에 그 목적을 두고 있으나 본 논문에서는 연소실압력과 관련하여 점성경계층의 배제두께를 예측하는 데 목적을 두고 있으며, 이를 위하여 화학반응 및 물질확산 (mass diffusion)을 무시하고 운동량 적분방정식과 에너지 적분방정식을 Bartz의 방법<sup>(3)</sup>을 이용하여 수치 해석한다.

## 2. 기본방정식

### 2.1 노즐목 내경과 연소실압력 관계식

노즐벽면의 얇은 경계층 바깥의 자유유동장을 정상 1차원, 등엔트로피 유동으로 가정하고 연소가스를 완전기체로 가정하면<sup>(2)</sup> 노즐 내의 질량유동을  $\dot{m}$ 는 다음과 같이 표시된다<sup>(1)</sup>.

$$\dot{m} = \Gamma \frac{P_0}{\sqrt{RT_0}} A_t \quad (1)$$

여기서  $\Gamma$ 는 Vandekerckhove 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma = \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2)$$

또한 De-Vicille 법칙을 수정한

$$r_b = kP_0^n \quad (3)$$

의<sup>(1)</sup> 연소속도에 대한 식을 이용하여  $\dot{m}$ 를 다음과 같이 표시할 수도 있다.

$$\dot{m} = \rho_p S_b r_b = k \rho_p S_b P_0^n \quad (4)$$

여기서  $k$ 와  $n$ 은 일정한 압력범위에서 상수값을 갖는다.

한편 다음과 같이 정의되는 특성속도<sup>(1)</sup>

$$c^* = \frac{P_0 A_t}{\dot{m}} = \frac{\sqrt{RT_0}}{\Gamma} \quad (5)$$

(두번째 등식은 식 (1)을 대입하여 유도된 것임)를 식 (1)과 식 (4)로부터 유도되는  $P_0$ 에 대한 식에 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$P_0 = \left( k \rho_p c^* \frac{S_b}{A_t} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (6)$$

일반적으로 높은 범위의  $P_0$ 에 대한 연소에서의  $P_0$ 의 작은 변화에 따른  $T_0$ 의 변화는 극히 미미하여 무시될 수 있다. 따라서,  $c^*$ 은 일정한 값으로 취급하여, 경계층의 배제두께를 고려한 노즐목에서의 유효 유동단면적  $A_t'$ 을 적용할 때의 연소실압력  $P_0'$ 과 노즐목의 기하학적 단면적을 적용할 때의 연소실압력  $P_0$ 의 비를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{P_0'}{P_0} = \left( \frac{A_t'}{A_t} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (7)$$

여기서

$$A_t' = \frac{\pi}{4} D_t'^2 \quad (8)$$

$$D_t' = D_t - 2\delta_i^*$$

### 2.2 경계층유동 방정식

노즐 내의 정상 난류경계층유동에 대한 운동량 적분

방정식과 에너지 적분방정식은 Fig. 1의 좌표계에 대해 다음과 같이 표시된다<sup>(3,7)</sup>.

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \theta \left[ \left( 2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \right] \quad (9)$$

$$\frac{T_{aw} - T_w}{T_0 - T_w} C_h = \frac{d\phi}{dx} + \phi \left[ \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} + \frac{1}{T_0 - T_w} \frac{d(T_0 - T_w)}{dx} \right] \quad (10)$$

여기서 주의할 것은, 기호설명에 정의되어 있는 것처럼, Stanton 수( $T_{aw} - T_w$ )에 대해 정의한 점이다. 이제 완전기체에 대한 정상-1차원-등엔트로피 노즐유동 이론으로부터 유도되는

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} &= \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{1}{M} \frac{dM}{dx} \\ &= -\frac{1}{M^2} \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx} = -\frac{2}{1-M^2} \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \end{aligned} \quad (11)$$

의 식을 이용하면 식 (9)와 식 (10)을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{2} \left[ \frac{3+2\frac{\delta^*}{\theta} - M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right] \frac{1}{M} \frac{dM}{dx} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{aw} - T_w}{T_0 - T_w} C_h &= \frac{d\phi}{dx} - \phi \left[ \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} - \frac{1}{T_0 - T_w} \frac{d(T_0 - T_w)}{dx} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)와 식 (13)은  $C_f$ ,  $C_h$ ,  $\delta^*/\theta$ 에 대한 식들을 필요로 하며 이를 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

(1) 경계층 내의 속도분포 및 정체온도와 벽면온도 차이의 분포는  $\sqrt{2}$ 승근 법칙을 따른다.

(2) 노즐벽면에서의 국소표면마찰계수와 국소 Stanton 수는 그 위치에서의 동일한 자유유동장 조건, 운동량두께, 에너지두께 및 벽면온도를 갖는 일정 온도의 평판 위에서의 난류경계층유동에 대한 값과 같다.

가정 (1)과 (2)는 Bartz<sup>(3)</sup>, Mayer<sup>(14)</sup> 등이 초음속 De-Laval 노즐유동에 대해서 적용한 것으로서, 먼저 가정 (1)을 식으로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{u}{u_e} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (14)$$

$$\frac{t_0 - T_w}{T_0 - T_w} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (15)$$

Back 등<sup>(4,5)</sup>의  $T_w/T_0$ 가 0.5 근처인 초음속 De-Laval 노즐유동에 대한 실험에 의하면 식 (14) 및 (15)의 7승근 법칙이 온도분포에 대해서는 측정치의 잘 일치

하지만 속도분포에 대해서는 측정치 보다 낮게 예측되는 결과를 나타낸다. 그러나  $\delta^*$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ 에 대한 예측치와 실험치는 잘 일치하고 있음을 보여주며, 또한 식 (14)와 식 (15)의 지수를 1/5에서 1/11 까지 변화시켜도 이것이  $\delta^*$ 와  $\theta$ 의 값에 미치는 영향은 극히 작은 것으로 알려져 있으므로<sup>(3)</sup>, 본 논문에서도 가정 (1)을 비교적 타당하게 적용할 수 있을 것으로 판단한다.

가정 (2)에 대한 전개를 위하여 우선 평판 위의 비압축성 난류경계층유동의 표면마찰계수  $\bar{C}_f$ 에 대한 다음의 식을 생각한다.

$$\frac{\bar{C}_f}{2} = 0.0125 \left( \frac{\rho_e u_e \theta}{\mu_e} \right)^{-1/4} \quad (16)$$

이 식은 식 (14)의 속도분포를 사용하여 유도된 참고 문헌 (7)의 식 (10.20)을 인용한 것이다. 식 (16)을 압축 및 온도의 영향에 따른 밀도와 점성계수의 변화를 고려하여 압축성 난류경계층유동에 대한  $C_f$ 와 관련시키면 다음의 식이 얻어진다<sup>(3,7,14)</sup>.

$$\frac{C_f}{C_f} = \left( \frac{\rho_r}{\rho_e} \right)^{3/4} \left( \frac{\mu_r}{\mu_e} \right)^{1/4} \quad (17)$$

여기서 하첨자  $r$ 은 기준온도  $T_r$ 에 대한 값을 표시한다. 본 논문에서는  $T_r$ 에 대하여 다음의 Eckert 식<sup>(7)</sup>을 사용한다.

$$T_r = 0.5(T_w + T_e) + 0.22(T_{aw} - T_e) \quad (18)$$

이제 식 (16)과 식 (18)을 식 (17)에 대입하고 점성계수와 온도의 관계식<sup>(11)</sup>, 즉

$$\mu \sim T^w \quad (19)$$

와 경계층 내에서의  $y$  방향으로의 압력구배를 무시함으로써 얻어지는

$$\rho(y) \sim 1/T \quad (20)$$

의 식을 이용하여 정리하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\frac{C_f}{2} = 0.0125 \sigma \left( \frac{D_i}{R_e^*} \frac{A}{A_i} \frac{1}{\theta} \right)^{1/4} \quad (21)$$

여기서

$$R_e^* = \frac{(\rho_e u_e)_i D_i}{\mu_0} = \frac{P_0}{C^*} \frac{D_i}{\mu_0} \quad (22)$$

$$\sigma = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r-1}{2} M^2 \right) \frac{T_w}{T_0} + 0.22 \left( 1 + R_e \frac{r-1}{2} M^2 \right) + 0.28 \right] \left[ 1 + \frac{r-1}{2} M^2 \right]^{-\frac{w}{2}} \quad (23)$$

이며  $R_e$ 는 회복인자(recovery factor)로서  $P_r^{1/3}$ 의 값을 가진다.

$C_h$ 에 대해서도  $C_f$ 와 마찬가지로, 참고문헌 (7)의 식 (12.14), 즉

$$\bar{C}_h = 0.0125 P_r^{-0.4} \left( \frac{\rho_e u_e \phi}{\mu_e} \right)^{-1/4} \quad (24)$$

를 사용하여 유도하면 다음의 식이 얻어진다.

$$C_h = \frac{C_f/2}{P_r^{-0.4} (\phi/\theta)^{1/4}} \left( \frac{\phi}{\theta} \right)^n \quad (25)$$

여기서  $(\phi/\theta)^n$ 은 노즐벽면의 온도에 따라  $\theta$ 와  $\phi$ 가 상당한 차이를 나타낼 수 있음을 고려하여 그 비가  $C_h$ 에 미치는 영향을 보상해 주는 인자이다<sup>(3)</sup>.

Bartz<sup>(3)</sup>는 식 (21) 대신에 Cole의 표면마찰계수에 대한 식을, 그리고 식 (25) 대신에 von Karman의 Reynolds 상사(相似)에 대한 식을 사용하였다. Back 등<sup>(5)</sup>은 이 Bartz의 해석결과와 그들의 실험결과를 비교하여  $C_f$ 는 상당한 차이를 나타내지만  $\delta^*$ 와  $\theta$ 는 잘 일치함을 확인하였다. 이것으로부터 식 (12)의 운동량 적분방정식과 식 (13)의 에너지 적분방정식을 계산함에 있어  $C_f$ 와  $C_h$ 에 대한 식의 선택이  $\delta^*$ 와  $\theta$ 의 해에 미치는 영향은 크지 않을 것으로 예상된다. 본 논문에서는, 식 (16)과 식 (24)가[따라서 식 (21)과 식 (25)도] 한정된 Reynolds 수의 범위에 대해서만 성립하는 것으로 알려져 있지만<sup>(7)</sup>, 본 연구의 경계층유동 해석이  $\delta^*$ 를 예측하는데 그 목적이 있는 바 상당히 높은 Reynolds 수에 대해서도 이식들이 성립한다고 가정하여 식 (21)과 식 (25)를 사용하며, 실제 계산결과 Bartz의 해석치와 상당히 잘 일치함을 볼 수 있었다(Fig. 2).

계산의 편의를 위하여 식 (21)과 식 (25)를 각각 식 (12)와 (13)에 대입하고 양변에  $\frac{5}{4} \theta^{1/4}$ 과  $\frac{5}{4} \phi^{1/4}$ 을 곱하여 정리하면, 다음의 최종 형태의 식이 얻어진다.

$$\frac{d\theta^{5/4}}{dx} = -\frac{5}{8} \theta^{5/4} \left[ \frac{3 + 2 \frac{\delta^*}{\theta} - M^2}{1 + \frac{r-1}{2} M^2} \right] \frac{1}{M} \frac{dM}{dx} + \frac{5}{4} (0.0125) \sigma \left( \frac{D_i}{R_e^*} \frac{A}{A_i} \right)^{1/4} \quad (26)$$

$$\frac{d\phi^{5/4}}{dx} = \frac{5}{4} \phi^{5/4} \left[ \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} - \frac{1}{T_0 - T_w} \frac{d(T_0 - T_w)}{dx} \right] + \frac{5}{4} (0.0125) \sigma \left( \frac{D_i}{R_e^*} \frac{A}{A_i} \right)^{1/4} \cdot \left( \frac{1 + R_e \frac{r-1}{2} M^2}{1 + \frac{r-1}{2} M^2} - \frac{T_w}{T_0} \right) P_r^{-0.4} \left( \frac{\phi}{\theta} \right)^n \quad (27)$$

### 2.3 형상파라미터 계산

식 (26)과 식 (27)을 계산하기 위해 사용할 형상파라미터들의 유도과정과 결과를 정리하면 다음과 같다. 우선 경계층 내의 정온도  $t_0$ 와 정온도(static temperature)  $T$ 의 관계를 표시한다.

$$t_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} = T + (T_0 - T_e) \left( \frac{u}{u_e} \right)^2 \quad (28)$$

이 식을 식 (15)에 대입하고 식 (20)의 관계와 정상-1차원-등엔트로피 노즐유동 이론을 적용하면 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e} \begin{cases} a \left( 1 + \frac{b}{\zeta} \eta - c \eta^2 \right), & y \leq \delta, \Delta \\ a \left( 1 + \frac{b}{\zeta} \eta - c \right), & \delta < y \leq \Delta \\ a(1 + b - c \eta^2), & \Delta < y \leq \delta \end{cases} \quad (29)$$

여기서

$$\zeta = \left( \frac{\Delta}{\delta} \right)^{1/7}, \quad \eta = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}, \quad a = \frac{T_w}{T_0} \left( 1 + \frac{r-1}{2} M^2 \right), \\ b = \left( \frac{T_0}{T_w} - 1 \right), \quad c = \frac{T_0}{T_w} \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{r-1}{2} M^2} \right) \quad (30)$$

식 (14)와 식 (29)를 기호설명에 정의되어 있는  $\delta^*$ ,  $\theta$ 의 식에 대입하여 정리하면 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \begin{cases} \zeta^7 - \frac{7}{a} (I_1 + I_2), & \zeta \geq 1 \\ 1 - \frac{7}{a} (I_1' + I_2'), & \zeta < 1 \end{cases} \quad (31)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \begin{cases} \frac{7}{a} I_3, & \zeta \geq 1 \\ \frac{7}{a} (I_3' + I_4'), & \zeta < 1 \end{cases} \quad (32)$$

$$\frac{\phi}{\delta} = \begin{cases} \frac{7}{a} \zeta^7 (\zeta I^4 + I^5), & \zeta \geq 1 \\ \frac{7}{a} \zeta^8 I_5', & \zeta < 1 \end{cases} \quad (33)$$

여기서

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\eta^7}{1 + \frac{b}{\zeta} \eta - c \eta^2} d\eta, \quad I_1' = \int_0^{\zeta} \frac{\eta^7}{1 + \frac{b}{\zeta} \eta - c \eta^2} d\eta$$

$$I_2 = \int_1^{\zeta} \frac{\eta^6}{1 + \frac{b}{\zeta} \eta - c} d\eta, \quad I_2' = \int_{\zeta}^1 \frac{\eta^7}{1 + b - c \eta^2} d\eta$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\eta^7 (1 - \eta)}{1 + \frac{b}{\zeta} \eta - c \eta^2} d\eta, \quad I_3' = \int_0^{\zeta} \frac{\eta^7 (1 - \eta)}{1 + \frac{b}{\zeta} \eta - c \eta^2} d\eta$$

$$I_4 = \int_1^{\zeta} \frac{\lambda^7 (1 - \lambda)}{1 + b \lambda - c \zeta^2 \lambda^2} d\lambda, \quad I_4' = \int_{\zeta}^1 \frac{\eta^7 (1 - \eta)}{1 + b - c \eta^2} d\eta$$

$$I_5 = \int_{1, \zeta}^1 \frac{\lambda^6 (1 - \lambda)}{1 + b \lambda - c} d\lambda, \quad I_5' = \int_0^1 \frac{\lambda^7 (1 - \lambda)}{1 + b \lambda - c \zeta^2 \lambda^2} d\lambda$$

한편 식 (32)와 식 (33)에서  $\delta$ 을 소거하면  $\zeta$ 에 대한 다음 식을 얻는다.

$$\zeta = \begin{cases} \left( \frac{\phi}{\theta} \frac{I_3}{I_4 + \frac{I_5}{\zeta}} \right)^{1/8}, & \zeta < 1 \\ \left( \frac{\phi}{\theta} \frac{I_3' + I_4'}{I_5'} \right)^{1/8}, & \zeta \geq 1 \end{cases} \quad (34)$$

### 3. 수치계산 방법

본 문제의 기본방정식은 식 (7), 식 (26), 식 (27)의 세 식으로 표시된다. 이 식들을 풀기 위해서는 식 (26)의  $\delta^*/\theta$ 에 대한 또 하나의 식이 필요하며, 이를 위하여 식 (31)~(34)를 이용한 Bartz의 계산방법<sup>(3)</sup>을 적용, 식 (26)과 식 (27)을 연립하여 반복계산한다. 즉,

첫째,  $\zeta$ 를 적당하게 가정하여 식 (31)~(33)으로부터  $\delta^*/\delta$ ,  $\theta/\delta$ ,  $\phi/\delta$ , 그리고  $\delta^*/\theta$ ,  $\phi/\theta$ 를 계산한다.

둘째, 계산된  $\delta^*/\theta$ 와  $\phi/\theta$ 를 각각 식 (26)과 식 (27)에 대입하고, 이 식들을 Runge-Kutta 방법으로 적분하여  $\theta$ 와  $\phi$ 의 해를 구한다.

셋째, 둘째 단계에서 구한  $\theta$ 와  $\phi$ , 그리고 첫째 단계에서 가정된  $\zeta$ 와 계산된 적분값들을 식 (34)에 대입하여  $\zeta$ 의 값을 다시 구한다.

넷째, 첫째 단계에서 가정  $\zeta$ 와 셋째 단계에서 계산된  $\zeta$ 의 산술평균값을 다시  $\zeta$ 의 새로운 값으로 가정하여 첫째 단계로 돌아가 동일한 계산과정을 반복한다.

이상의 계산과정을 반복계산회수  $i$ 에 대하여 다음의 수렴조건을 만족할 때까지 반복한다.

$$\left| \frac{\zeta^{(i)} - \zeta^{(i-1)}}{\zeta^{(i)}} \right| \leq \epsilon \quad (35)$$

본 논문에서는 위의 둘째 단계를 위하여 4차의 Runge-Kutta 수치적분식<sup>(15)</sup>을 사용하였고, 식 (35)의  $\epsilon$ 값으로  $10^{-4}$ 을 취하였으며, 대체적으로 2~5회 반복계산하면 수렴하였다.

한편 식 (26) 및 식 (27)은, 식 (22)의  $R_e^*$ 와  $P_0$ 의 관계에 의해, 식 (7)과도 연립되며, 이를 위하여 다음과 같이 반복계산한다. 즉, 식 (26)과 식 (27)의 계산에서 구한  $\delta^*$ 를 식 (8)을 통해 식 (7)에 대입하면 수정된 연소실압력  $P_0'$ 을 얻게되며, 식 (26) 및 식 (27)의  $R_e^*$ 항에 대한 식 (22)의  $P_0$ 를 이  $P_0'$ 으로 치환하여  $\delta^*$ 에 대한 새로운 해를 구한다. 이와 같은 과정을 반복계산회수  $i$ 에 대하여

$$\left| \frac{P_0'^{(i)} - P_0'^{(i-1)}}{P_0'^{(i)}} \right| \leq \epsilon \quad (36)$$

의 수렴조건을 만족할 때까지 반복한다. 본 논문에서는 식 (36)의  $\epsilon$ 값으로  $10^{-4}$ 을 취하였으며 대체적으로 2~3회 반복계산하면 수렴하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 해석모델

본 논문에서는 Fig. 1의 De-Laval 노즐에 대하여, 연소가스의 Prandtl 수가 온도에 따라 변하지 않으며 노즐벽면의 온도가 전체 노즐길이에 걸쳐 일정하게 분포되어 있다고 가정하고, Bartz<sup>(3)</sup>가 채택한 Table 1의 기본 유동조건을 해석모델로 선정하였다. 실제 계산은  $T_w/T_0$ 를 0.10에서 0.85까지 0.15 간격으로 변화시키고  $R_e^*$ 를  $2.54 \times 10^5$ ,  $9.76 \times 10^5$ ,  $3.05 \times 10^6$ 으로 변화시키면서 수치계산하였다. 여기서  $R_e^*$ 의 변화의 물리적인 의미를 다음과 같이 설명할 수 있다. 실제 연소에서는 연소실압력  $P_0$ 의 변화에 따라 연소온도  $T_0$ 와 특성속도  $c^*$  및 점성계수  $\mu_0$  등의 변화가 수반되지만, 본 논문에서는 단순히 경계층 형성에 의한 연소실 예측압력의 변화만을 고찰하기 위해서 Table 1의 기본 유동조건은 변하지 않는다고 가정하다. 이러한 가정 하에서, 식 (22)로부터,  $R_e^*$ 의 증가는 곧  $P_0$  또는  $(\rho_e u_e)$ 의 증가를 의미함을 알 수 있으며, 이들의 관계를 표로 나타내면 Table 2와 같다.

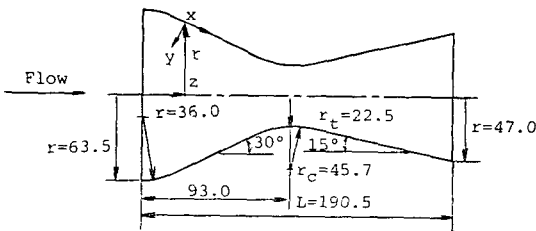


Fig. 1 Nozzle contour and coordinate system  
All dimensions are in mm

Table 1 Basic flow condition

$T_0 \dots 2500\text{K}$	$C^* \dots 1534. \text{m/s}$
$\mu_0 \dots 6.21 \times 10^{-5} \text{kg/m.s}$	$n \dots 0.5$
$\gamma \dots 1.2$	$m \dots 0.1$
$R \dots 395.9 \text{J/kg.K}$	$\omega \dots 0.65$
$P_r \dots 0.83$	

Table 2 Interpretation of  $R_e^*$

$R_e^*$	$P_0 (\text{MPa})$	$(\rho_e u_e) : (\text{kg/m}^2. \text{s})$
$2.54 \times 10^5$	0.54	351.5
$9.76 \times 10^5$	2.07	1350.
$3.05 \times 10^6$	6.47	4218.

4.2 노즐 입구조건의 영향 (Fig. 2)

Fig. 2는  $T_w/T_0=0.25$ ,  $R_e^*=9.76 \times 10^5$  일 때 임의로 선정한 Table 3의 세가지 노즐 입구조건에 대한 계산 결과를 비교한 것이다. 그림에서 점선은 식 (21) 및 식 (25) 대신에 Cole의 표면마찰계수에 대한 식과 von Karman의 Reynolds 상수에 대한 식을 사용하여 계산한 Bartz<sup>(3)</sup>의 해석치를 표시한 것으로서 본 계산 결과와 상당히 잘 일치함을 볼 수 있다.

점성경계층 두께  $\delta$ 은, 입구조건 2와 3의 경우, 노즐 수렴부위에서 아음속 유동장의 가속에 의해 급격히 감소하다가 노즐 목에 다소 못 미쳐 최소로 되고, 다시 발산부위 (즉, 초음속 유동장)에서 증가하는 경향이 노즐의 형상과 비슷하다. 입구조건 1의 경우에는 처음 수렴부위에서 경계층이 전개되면서  $\delta$ 이 급격히 증가하다가 곧 가속의 영향을 받아 감소하고,  $Z/L > 0.35$ 의 영역에서 입구조건 2의 경우와 일치함을 볼 수 있다. 운동량 두께  $\theta$ 도,  $\delta$ 의 약 1/10 크기로,  $\delta$ 과 같은 경향을 보여준다. 또한 열경계층 두께  $\Delta$ 과 에너지 두께  $\phi$ 도 약 10:1의 크기로  $\delta$ 과 유사한 경향을 보인다. 다만 입구조건 1과 2에 대한 결과가 거의 일치하고 있어,  $\theta$ 에 대한 입구조건이  $\phi$ 의 해에는 별로 영향을 미치지 못함을 볼 수 있다. 이것은 운동량적분방정식과 에너지 적분방정식이  $(\phi/\theta)^m$ 에 의해 연립되며, 본 논문에서  $m=0.1$ 로 택하였으므로 그 상관관계가 비교적 약하게 연립되기 때문인 것으로 해석된다.

한편 점성경계층의 배제두께  $\delta^*$ 는 대부분의 유동장에 걸쳐 음(-)의 값을 가진다. 이와 같은 결과는 참고문헌 (3)~(6)에서도 지적되었던 것으로, Table 4에서 볼 수 있듯이,  $\phi/\theta$  또는  $\Delta/\delta$ 이 약 2가 되어 열경계층의 두께가 점성경계층의 두께 보다 비교적 크기 때문에 나타난 현상으로 해석된다. 예를 들어  $T_w \ll T_0$ 가 되어  $\Delta \gg \delta$ 이 되는 극한적인 경우를 생각하여  $\delta^*$ 를 그 정의식으로부터 전개하면 쉽게 이해될 수 있다. 즉

$$\delta^* \equiv \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \approx \int_0^\Delta \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e}\right) dy = \int_0^\Delta \left(1 - \frac{T_w}{T}\right) dy < 0.$$

따라서  $\delta^*$ 의 분포는  $T_w/T_0$ 의 변화에 따라 변할 것을

Table 3 Entrance conditions

Case	$\theta (\text{mm})$	$\phi (\text{mm})$	$\zeta$
1	0.00	0.00	1.00
2	0.45	0.00	0.00
3	0.56	0.61	1.01

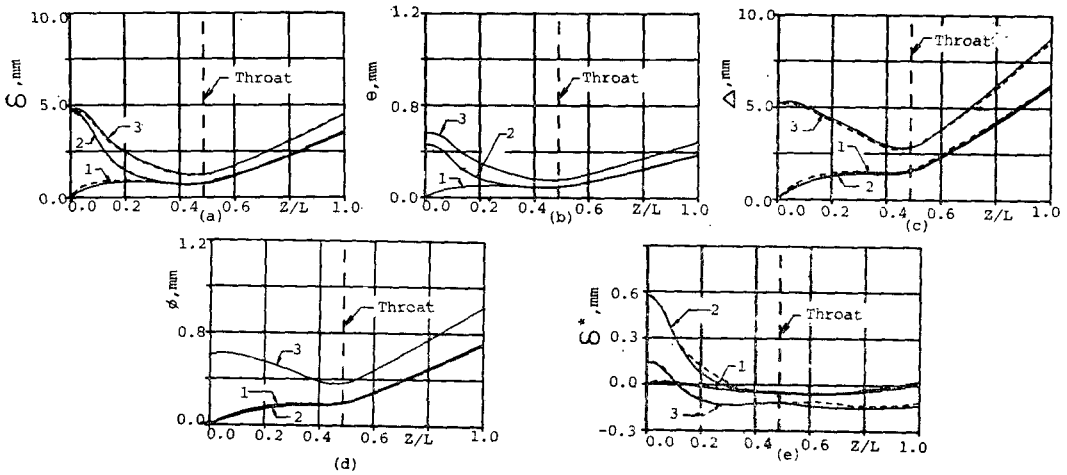


Fig. 2 Effect of entrance conditions on the boundary-layer-thickness distributions for  $R_e^* = 9.76 \times 10^6$ ,  $T_w/T_0 = 0.25$ . Refer to table 3 for the number 1, 2, 3 in the figures. (··· : Prediction of Bartz<sup>(3)</sup>)

예측할 수 있으며, 이에 대해서는 Fig. 3에서 다시 고찰하도록 하겠다.

이상에서 고찰한 것과 같이, 노즐목에서의 각 경계층 두께는 입구조건 1과 2에 대해서는 거의 완전하게 일치하고 있으며 입구조건 3의 경우는 입구조건 1 및 2 보다 높은 값(다만  $\delta^*$ 에 대해서는 낮은 값)을 나타낸다. 본 논문에서는 노즐 입구조건으로서 비교적 두꺼운  $\phi$ 와  $\theta$ 를 가지는 조건 3을 기준으로 하여 계속 고찰하도록 하겠다.

4.3 노즐 벽면온도의 영향(Fig. 3)

Fig. 3은 입구조건 3에 대하여  $R_e^* = 9.76 \times 10^6$ 인 경우의  $\delta$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^*/\theta$ 의 분포를  $T_w/T_0$ 의 값에 따라 그림으로 표시한 것이다.

$\delta$ 은, 노즐입구 가까운 부분( $Z/L < 0.1$ )을 제외하고는,  $T_w/T_0$ 가 감소함에 따라 증가하는 경향을 나타낸

다. 노즐입구 부근에서는 이와 반대의 현상을 보여주는데, 이것은 본 논문에서 입구조건으로  $\theta = 0.56 \text{ mm}$ 로 일정하게 주었기 때문이다. 즉,

$$\theta \equiv \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, \Delta > \delta$$

에서  $T_w/T_0$ 가 감소함에 따라 경계층 내에서  $\rho/\rho_e$ 의 비중이 증가하는 반면에  $\theta$ 는 일정한 값을 가지므로 상대적으로 적분 상한치인  $\delta$ 은 감소하게 되는 것이다.  $\delta^*$ 는, Fig. 2의  $\delta^*$ 에 대한 설명으로부터 예상할 수 있듯이,  $T_w/T_0$ 가 감소함에 따라 음(-)의 방향으로 증가함을 볼 수 있으며, 노즐 목 위치를 기준으로 할 때  $T_w/T_0$ 가 0.75-0.85의 범위까지 음(-)의 값을 가진다.

$\delta^*/\theta$ 는  $T_w/T_0$ 가 감소함에 따라 같이 감소하는 경향을 보이며, 전반적으로 평판 위의 비압축성 난류경계층 유동에 대한 값 1.2-1.5 보다 훨씬 낮은 값을

Table 4 Distributions of  $\phi/\theta$  and  $\Delta/\delta$

Z/L	Entrance condition 1		Entrance condition 2		Entrance condition 3	
	$\phi/\theta$	$\Delta/\delta$	$\phi/\theta$	$\Delta/\delta$	$\phi/\theta$	$\Delta/\delta$
0.0	1.000	1.000	0.000	0.000	1.089	1.010
0.2	1.553	1.523	0.839	0.800	1.804	1.767
0.4	2.068	2.012	1.990	1.939	2.337	2.269
0.488(throat)	2.125	2.054	2.094	2.025	2.357	2.270
0.6	2.097	1.995	2.077	1.976	2.312	2.188
0.8	1.960	1.839	1.942	1.824	2.178	2.027
1.0	1.898	1.764	1.882	1.751	2.107	1.939

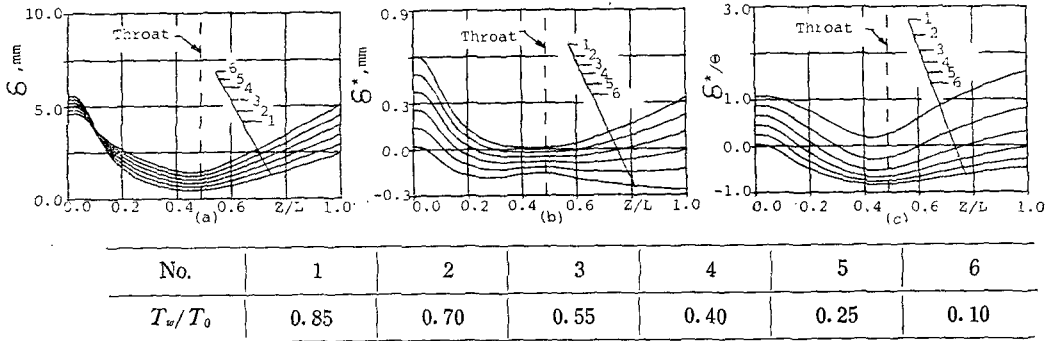


Fig. 3 Effect of wall temperature on the distributions of  $\delta$ ,  $\delta^*$ , and  $\delta^*/\theta$  for  $R_e^*=9.76 \times 10^5$  and entrance condition of case 3. Refer to the following table for the number in the figures

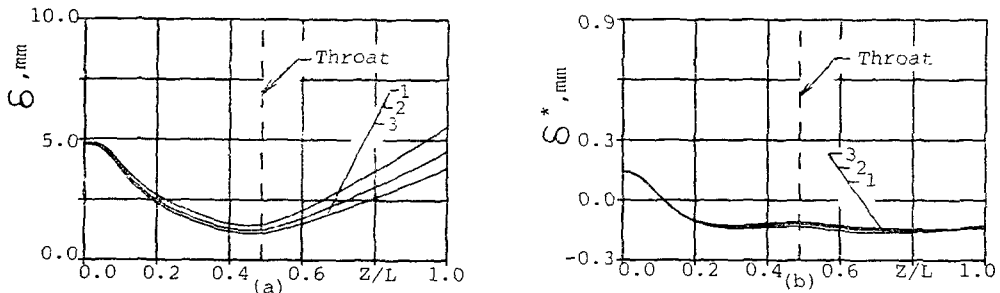
가진다.

4.4  $R_e^*$ 의 영향 및 연소실압력 (Fig. 4, 5)

Fig. 4는 입구조건 3과  $T_w/T_0=0.25$ 인 경우에 대하여  $R_e^*$ 가  $\delta$ ,와  $\delta^*$ 에 미치는 영향을 표시한 것이고, Fig. 5는 입구조건 3에 대하여  $T_w/T_0$  및  $R_e^*$ 가  $\delta$ ,  $\delta^*$ 와  $P_0'/P_0$ 에 미치는 영향을 표시한 것이다.

$\delta$ 은  $R_e^*$ , 즉  $P_0$  또는  $(\rho_0 u_0)$ 의 증가에 따라 감소하는 경향을 나타내며 (Fig. 4.a), 이와 같은 경향은  $T_w/T_0$ 가 감소할 수록 심함을 볼 수 있다 (Fig. 5.a). 반면에  $\delta^*$ 는  $R_e^*$ 의 증가에 따라 현저하지는 않지만 약간 씩의 증가를 보인다 (Fig. 4.b). 그러나 이러한 경향은  $T_w/T_0=0.6$ 을 분기점으로 하여 반전되며  $T_w/T_0$ 가 0.6 보다 감소 또는 증가함에 따라  $R_e^*$ 의 영향이 다소 두드러지게 나타남을 볼 수 있다 (Fig. 5.b). 이러한 현상은 직접 연소실압력에 영향을 미치게 됨을 예상할 수 있으며, 특히 De-Laval 노즐을 가진 연소관 설계에서 노즐 목 내경을 결정하는 데 간과할 수 없는 중요한 인자가 될 수 있다. 즉, Fig. 5.c에서 보는 것

처럼,  $T_w/T_0=0.6$ 에서  $P_0'/P_0=0.993$ 을 기점으로  $R_e^*$ 의 값에 따라  $T_w/T_0=0.85$ 일 때  $P_0'/P_0=1.001-1.004$ , 그리고  $T_w/T_0=0.1$ 일 때  $P_0'/P_0=0.969-0.975$ 의 변화를 나타낸다 (Table 5). 또한,  $P_0'/P_0-T_w/T_0$ 와  $P_0'/P_0-R_e^*$ 의 관계가 거의 선형적이므로, Table 5의 수치를 사용하여 다음과 같은 분석을 할 수 있다. 즉,  $T_w/T_0$ 의 변화율에 대한  $P_0'/P_0$ 의 변화율의 비가  $R_e^*=2.54 \times 10^5$ 인 경우 0.122이고  $R_e^*=3.05 \times 10^6$ 인 경우 0.120이며,  $R_e^*$ 의 변화율에 대한  $P_0'/P_0$ 의 변화율의 비는  $T_w/T_0=0.1$ 인 경우 0.084이고  $T_w/T_0=0.85$ 인 경우 0.083이다. 따라서 연소실압력의 변화는 상대적인 변화율로 보아,  $R_e^*$  보다는  $T_w/T_0$ 에 의해 더 크게 영향을 받게 된다. 특히, 본 논문의 해석모델의 경우,  $T_w/T_0$ 가 0.75-0.80 보다 작을 때는  $\delta^*$ 가 음(-)이 되어 연소실의 예측압력이 노즐 내의 정체층 형성에 의하여 오히려 감소하는 결과를 초래하고,  $\delta^*$ 가 음(-)이 되는  $T_w/T_0$ 의 값은  $R_e^*$ 가 감소함에 따라 다소 감소하는 경향을 나타낼을 볼 수 있다.



1.  $R_e^*=2.54 \times 10^5$ ; 2.  $R_e^*=9.76 \times 10^5$ ; 3.  $R_e^*=3.05 \times 10^6$

Fig. 4 Effect of  $R_e^*$  on the distributions of  $\delta$  and  $\delta^*$  for entrance condition of case 3 and  $T_w/T_0=0.25$ .



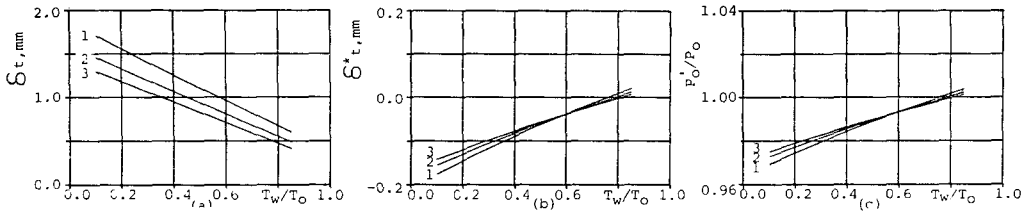


Fig. 5 Effect of wall temperature on the displacement thickness at throat,  $\delta_t^*$ , and chamber pressure. The number in the figures is identical with Fig. 4

Table 5 Values of  $P_0'/P_0$  w.r.t.  $R_e^*$  and  $T_w/T_0$

$R_e^*$ \ $T_w/T_0$	0.10	0.85
$2.54 \times 10^5$	0.96926	1.0037
$3.05 \times 10^6$	0.97521	1.0012

## 5. 결 론

본 논문은 정성적(定性的)으로만 추측해 왔던 De-Laval 노즐을 가진 연소관에서의 연소실 압력과 경계층의 관계를, 본 연구에서의 해석모델을 기준으로 하여,  $T_w/T_0$  및  $R_e^*$  (즉,  $P_0$  또는  $(\rho_0 u_0)_i$ )를 변화시키면서 정량적(定量的)으로 해석한 데 의의가 있다고 하겠으며, 연구 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) De-Laval 노즐 내의 압축성 경계층 유동을 해석하는 데 있어서, 한정된 Reynolds 수의 범위에 대해서만 성립된다고 알려져 있는 비교적 간단한 표며차찰계수에 대한 식 (16)과 Stanton 수에 대한 식 (24)를 사용하고, 이 식들을 Eckert의 기준온도 식을 이용하여 압력 및 온도에 따른 연소가스 성질들의 변화를 고려하는 한편, 경계층의 속도분포 및 온도분포에 대해 7승근 법칙을 적용하여 운동량 적분방정식과 에너지 적분방정식을 풀어, 경계층 두께들을 계산하는 한, 비교적 정확한 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

(2) 연소실 예측압력의 변화는, 상대적인 비율로 보아,  $R_e^*$  보다는  $T_w/T_0$ 에 의해 더 크게 영향을 받는다.

(3) 점성경계층의 배제두께는, 본 해석모델의 경우,  $T_w/T_0$ 가 0.75-0.80 이하이며 음(-)의 값을 가지게 되어 경계층의 영향을 고려함으로써 오히려 경계층을 고려하지 않을 때 보다 연소실의 예측압력이 감소하는 결과를 초래하며, 점성경계층의 배제두께가 음(-)이 되는  $T_w/T_0$ 의 한계는  $R_e^*$ 의 증가에 따라 다소 증가하는 경향을 나타낸다.

## 참 고 문 헌

- (1) J.W. Cornelisse, H.F.R. Schoeyer, K.F. Wakker, Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, Pitman, London, 1979
- (2) E.Y. Wong, Solid Rocket Nozzle Design Summary, AIAA 4th Propulsion Joint Specialist Conference, AIAA paper, No. 68-655, Cleveland, Ohio, June, 1968
- (3) D.R. Bartz, Turbulent Boundary-Layer Heat Transfer from Rapidly Accelerating Flow of Rocket Combustion Gases and of Heated Air, Adv. in Heat Transfer, Vol. 2, pp. 1~108, 1965
- (4) L.H. Back, R.F. Cuffel, P.F. Massier, Laminarization of Turbulent Boundary Layer in Nozzle Flow-Boundary Layer and Heat Transfer Measurements with Wall Cooling, J. Heat Transfer, Vol. 92, pp. 333~344, Aug., 1970
- (5) L.H. Back, R.F. Cuffel, Turbulent Boundary Layer and Heat Transfer Measurements Along a Convergent-Divergent Nozzle, J. Heat Transfer, Vol. 93, pp. 397~407, Nov., 1971
- (6) T.K. Bose, Comparison of Rocket Nozzle Heat Transfer Calculation Methods, J. Spacecraft, Vol. 15, pp. 253~255, 1978
- (7) W.M. Kays, M.E. Crawford, Convective Heat and Mass Transfer, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1980
- (8) 장태호, 고온 고속 연소관 노즐에서 점성소산에 의한 특성치와 열복사가 열전달에 미치는 영향, 한국항공우주학회지, 제13권, 제 2 호, pp. 42~54 1985

- (9) S.C. Lubard, F.L. Feruandez, The Turbulent Boundary Layer with Mass Transfer and Pressure Gradient, *J. Applied Mechanics*, Vol. 38, pp. 688~698, Sep., 1971
- (10) T. Cebeci, A.M.O. Smith, Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic Press, New York, 1974
- (11) F.M. White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill New York, 1974
- (12) M.R. Denison, The Turbulent Boundary Layer on Chemically Active Ablating Surfaces, *J. Aerospace Sciences*, Vol. 28, pp. 471~479, June, 1961
- (13) R.M. Kendall, E.P. Bartlett, R.A. Rindal, C.B. Moyer, An Analysis of the Coupled Chemically Reacting Boundary Layer and Charring Ablator NASA CR-1060, 1968
- (14) E. Mayer, Analysis of Convective Heat Transfer in Rocket Nozzle, *ARS Journal*, Vol. 31, pp. 911~916, July, 1961
- (15) S.D. Conte, C.D. Boor, Elementary Numerical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, Tokyo, 1981