

<論 文>

인벌류우트—圓弧 合成齒形의 諸特性

卞俊溍\* · 崔商勳\*\* · 尹甲英\*\*\*

(1986年 7月 21日 接受)

Mechanical Characteristics of Involute-Circular Arc Composite Tooth Profile

Joon Hyung Byun, Sang Hoon Chweh and Kab Young Yoon

**Key Words:** Specific Sliding in Gears(미끄럼율), Nominal Bending Stress in Gears(공칭굽힘응력), Circular-Arc Gear(원호기어), Novikov Gear(노비코프기어), Composite Tooth Profile(합성치형)

Abstract

In this study, full-rounded tip curve of rack and its mating fillet curve of pinion in Involute-circular arc composite tooth profile are derived.

Mechanical characteristics are calculated analytically, i.e., Specific sliding, Nominal bending stress at working root circle and the Contact factor of the arc of contact in circular arc part to the arc of double contact. These characteristics compared with standard involute tooth profile are improved in circular arc part of composite tooth profile.

To obtain more efficient composite tooth profile, we studied these characteristics with regard to the changes of unwound angle and radius of circular arc. And a design method of composite tooth profile is suggested.

Composite tooth profile are compared with standard involute tooth profile.

————— 기 호 설 명 —————	
$A_k$	: 어텐덤
$a$	: 피니언 어텐덤의 원호반경
$B_a$	: 백래시
$b$	: 치폭
$M_c$	: 물림율

$m$	: 모듈
$P$	: 피치원상의 접선하중
$P_n$	: 치면법선하중
$R_1, R_2$	: 피니언 및 기어의 피치원반경
$R_{b1}$	: 피니언의 기초원반경
$r, r_f$	: 기어중심에서의 거리
$X_{ac}, Y_{ac}$	: 랙의 어텐덤치형
$\alpha_0$	: 직선랙의 공구압력각
$\theta_{c,f}$	: 랙의 어텐덤유효치형의 끝점에서의 $\theta_c$ 값
$\theta_{com}$	: 물림각(Ref. 1의 $\theta_1$ )

\* 正會員, 漢陽大學校 大學院  
 \*\* 正會員, 建國大學校 工科大學 機械工學科  
 \*\*\* 正會員, 漢陽大學校 工科大學 機械工學科

- $\lambda$  : 기어의 중심선과 작용선이 이루는 각의 여각
- $\phi_{com}$  :  $\phi_{com} = \theta_{com} + \text{inv}\alpha_0 + \alpha_0$   
( $\text{inv}\alpha_0 = \tan\alpha_0 - \alpha_0$ )

1. 서론

전보<sup>(1)</sup>에서는 인벌류우트치형과 원호치형의 단점을 보완하고 두치형의 장점을 취하기 위하여, 피치점부근에서는 인벌류우트곡선으로 하고 어텐덤부분은 원호로 하는 피니언의 어텐덤치형을 합성하고, 이를 창성하기 위한 랙치형과 피니언의 디텐덤치형을 구하여 랙과 피니언의 유효치형을 구하였으며, 유효치형의 활줄이 끝 두께와 이뿌리두께, 물림울을 구하여 검토하였다.

본보에서는 랙의 이끝부분을 full-rounded tip으로 설계한 후, 이에 의하여 창성되는 피니언의 이뿌리곡선을 구하여 전체치형을 완성하였다.

그리고 합성치형기어의 미끄럼율, 유효이뿌리원에서의 공칭굴림응력과 두쌍접촉호의 길이대 원호부분접촉호의 길이의 비인 접촉계수를 해석적인 방법으로 구하였다. 또한 이들 특성들과 물림울등 제특성을 비교·검토하여 공구압력자, 인벌류우트부분의 크기를 나타내는 물림자 및 원호반경등의 변화에 대한 제특성의 변화를 고려한 합성치형의 성능을 향상시킬 수 있는 설계방법을 구하였으며, 합성치형과 표준인벌류우트치형을 비교하였다.

2. 합성치형의 제특성

2.1 랙의 이끝치형과 피니언의 이뿌리치형

합성치형의 랙치형을 표시한 Fig. 1에서 언더컷의 감소를 위해 이끝을 full-rounded tip으로 설계한다.

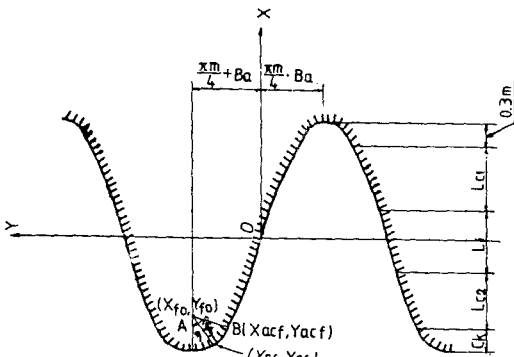


Fig. 1 Tooth profile of rack for composite tooth profile

Fig. 1에서 full-round의 반경을  $r_0$ , 총회전각을  $\eta$  라 하면 각각 식 (1)과 식 (2)로 표시되며 중심점 A는 식 (3)으로 표시된다. 또  $r_0$ 의 임의회전각을  $\xi$ 라하면 full-round의 곡선식은 식 (4)로 표시된다.

$$\eta = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{dY_{ac}}{dX_{ac}} \Big|_{\theta, \xi} \quad (1)$$

$$r_0 = \frac{\frac{\pi}{4}m + B_a - Y_{acf}}{\sin \eta} \quad (2)$$

$$X_{f0} = X_{acf} + r_0 \cos \eta, \quad Y_{f0} = \frac{\pi}{4}m + B_a \quad (3)$$

$$X_{rf} = X_{f0} - r_0 \cos(\eta - \xi), \quad (4)$$

$$Y_{rf} = Y_{f0} - r_0 \sin(\eta - \xi) \quad (4)$$

Fig. 1의 랙과 맞물리는 피니언의 회전각을  $\theta$ 라 하면 피니언과 접촉하는 full-rounded tip곡선의 공통법선의 식은  $Y = \tan(\eta - \xi)X - R_1\theta$ 로 표시되고, X, Y에 식 (4)를 대입하면  $\theta$ 와  $\xi$ 의 관계식 (5)를 얻을 수 있다. 피니언의 이뿌리곡선  $(x_{1df}, y_{1df})$ 은 좌표변환식 (6)에 의해 식 (7)로 구해진다.

$$\theta = \{Y_{f0} - X_{f0} \tan(\eta - \xi)\} / R_1 \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} x_{1df} \\ y_{1df} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{rf} \\ Y_{rf} \end{pmatrix} + R_1 \begin{pmatrix} \cos \theta + \theta \sin \theta \\ \sin \theta - \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$x_{1df} = (X_{rf} + R_1) \cos \theta - (Y_{rf} - R_1\theta) \sin \theta$$

$$y_{1df} = (X_{rf} + R_1) \sin \theta + (Y_{rf} - R_1\theta) \cos \theta \quad (7)$$

(단,  $\theta = \{Y_{f0} - X_{f0} \tan(\eta - \xi)\} / R_1$ )

2.2 합성치형의 미끄럼율<sup>(2)</sup>

Fig. 2의 접촉점 T에서 기어 1, 2의 속도를  $V_1, V_2$ , 접촉점의 이동속도를  $V_3$ , 접촉점의 체적의 법선이  $xr$ 축과 만나는 점을 K,  $\overline{P_0K}$ 를  $k$ 라 두면,  $\overline{Q_1Q_2}$ 는 상대속도의 방향을 나타내므로 기어 1 및 2의 치형접선과 평행한다.

$\mu_1, \mu_2$ 를  $\mu_1 = (V_3 - V_1) / (V_2 - V_1)$ ,  $\mu_2 = (V_3 - V_2) / (V_1 - V_2)$ ,  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ 인 관계를 만족하는 무차원수로 정의하면  $V_3 = \mu_1 V_2 + \mu_2 V_1$ 이 성립한다. 따라서  $\mu_1, \mu_2$

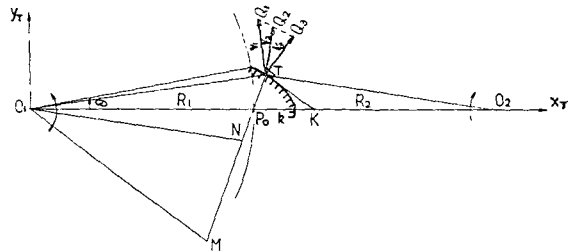


Fig. 2 Locus and velocity of contact point

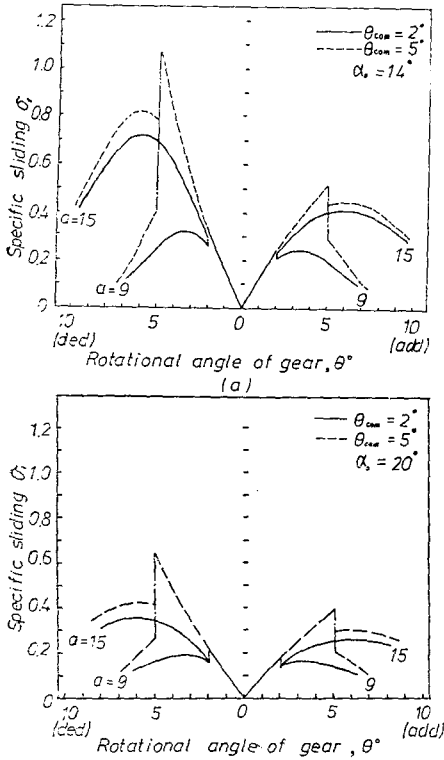


Fig. 3 Specific sliding ( $m=4, z_1=z_2=30$ )

는 식 (8)과 같이 표시할 수 있다.

$$\mu_1 = \frac{1/R_1 + 1/k}{1/R_1 + 1/R_2}, \mu_2 = \frac{1/R_2 - 1/k}{1/R_1 + 1/R_2} \quad (8)$$

기어 1, 2의 미끄름을  $\sigma_1, \sigma_2$ 는 식 (9)와 같이 구해진다.

$$\sigma_1 = \frac{dS_1 - dS_2}{dS_1} = \frac{Q_1 Q_3 - Q_2 Q_3}{Q_1 Q_3} = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 Q_3} = \frac{1}{\mu_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{dS_2 - dS_1}{dS_2} = \frac{Q_2 Q_3 - Q_1 Q_3}{Q_2 Q_3} = -\frac{Q_1 Q_2}{Q_2 Q_3} = \frac{1}{\mu_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{1/R_1 + 1/R}{1/R_1 \pm 1/k}, \sigma_2 = \frac{1/R_2 + 1/R}{1/R_2 \pm 1/k} \quad (9)$$

(단,  $\pm$ 부호는 각각 face와 flank에서의 접촉을 나타낸다.)

잇수비가 1:1이고 잇수  $z=30$ 인 합성치형의 물림을 압력각이  $\alpha_0=14^\circ, 20^\circ$ 인 경우를 Fig. 3에 표시하였다. 횡축의  $0^\circ$ 는 피치점에서의 접촉인 경우를 나타내며 좌·우측방향으로 각각 디텐덤과 어텐덤으로 접촉이 진행되는 기어의 회전각을 나타낸다. Fig. 3에서 압력각( $\alpha_0$ )가 클수록, 풀림각( $\theta_{com}$ )과 원호반경(a)가 작을수록 미끄름율은 작아지며 특히 원호부분의 접촉시 인벌류우트치형보다 미끄름율이 작음을 알 수 있다.

2.3 유효이뿌리원에서의 공칭굽힘응력

합성치형의 유효이뿌리원에서의 공칭굽힘응력  $\sigma_N$ 은

Fig. 4에서 식 (10)으로 표시된다.

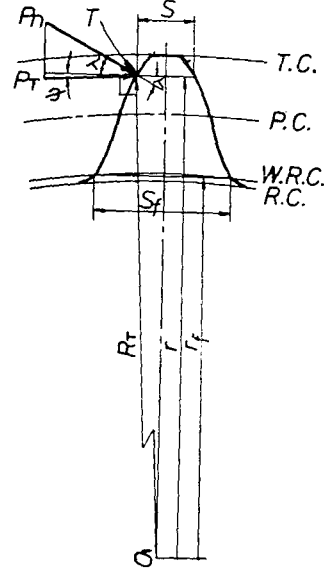


Fig. 4 Calculation of root stress

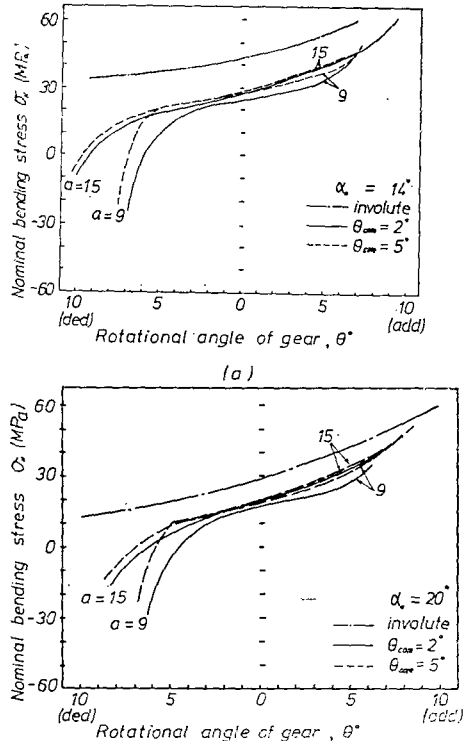


Fig. 5 Nominal bending stress(Tension side) ( $m=4, z=30, b=10 \text{ mm}, P=980 \text{ N}$ )

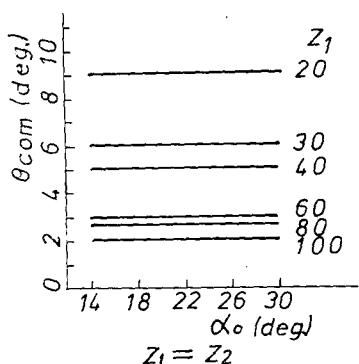


Fig. 6 Maximum value of  $\theta_{com}$  for  $F > 1.0$

$$\sigma_n = P_n \left\{ \pm \frac{6(r-r_f)\cos\lambda}{bS_f^2} \pm \frac{3S\sin\lambda}{bS_f^2} - \frac{\sin\lambda}{bS_f} \right\} \quad (10)$$

(±부호는 복호동순이며 각각 인장축과 압축축을 나타낸다.)

인장축 공칭굽힘응력을 도시한 Fig. 5에서  $\alpha_0$ 가 클수록,  $\theta_{com}$ 과  $a$ 가 작을수록 인장축 공칭굽힘응력이 작아짐을 알 수 있고 표준인벌류우트치형보다 굽힘강도가 큼을 알 수 있다.

### 2.4 접촉계수

두기어가 접촉할 때, 한쌍접촉영역내에서 치면접촉성능이 나쁜 인벌류우트부분을 작게하고 치면접촉성능이 우수한 원호부분을 가능한한 크게하면 합성치형의 치면접촉성능을 향상시킬 수 있다.

따라서 접촉호의 길이중 두쌍접촉호의 길이대 원호부분 접촉호의 길이의 비를 접촉계수( $F$ )라 하고, 물림율을  $M_c$ 라 하면 접촉계수는 식(11)로 나타낼 수 있다.

$$F = \frac{\text{원호부분 접촉호의 길이}}{\text{두쌍 접촉호의 길이}} = \frac{M_c \cdot \pi m - 2R_1 \theta_{com}}{(M_c - 1)\pi m} \quad (11)$$

식(11)에서  $F > 1.0$ 인 경우는 원호부분접촉영역의 일부가 한쌍접촉영역내에 있음을 의미한다.

Fig. 6은  $z_1/z_2=1$ 이고, 잇수와  $\alpha_0$ 를 변화시켰을 때  $F > 1.0$ 을 만족하는  $\theta_{com}$ 의 최대값을 나타내며, 풀림각  $\theta_{com}$ 의 범위는 압력각과 무관하고, 잇수가 많아질수록 줄어들음을 알 수 있다.

### 3. 합성치형의 설계

2절에서 합성치형의 제특성은 인벌류우트곡선과 원

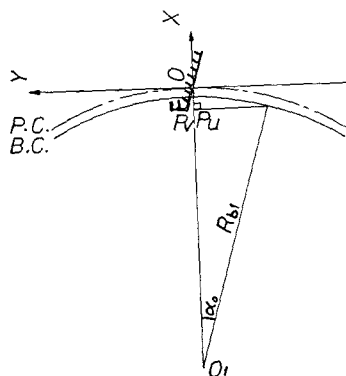


Fig. 7 Interference limit of involute gear

호의 합성위치를 나타내는 풀림각과 원호반경의 합수로 특정지위점을 알 수 있다. 이들 특성을 종합적으로 개선할 수 있는  $\theta_{com}$ 과  $a$ 의 값을 적절히 선택하는 것이 합성치형의 설계에 있어 매우 중요하다.

### 3.1 풀림각의 한계

합성치형에서 풀림각의 제한조건은 첫째, 직선백으로 가공된 인벌류우트부분에 인벌류우트간섭이 생기지 않도록 해야하며 둘째, 합성치형에 있어서 인벌류우트부분의 길이가 이끝원을 넘지않아야 한다. 첫째조건인 간섭이 생기지 않으려면, Fig. 7에서 백의 어떤점치형의 직선부분의 끝을  $P_v$ 라 할 때,  $OP_v > OP_v$ 이어야 한다<sup>(3)</sup>.

점  $P_v$ 의  $X$ 좌표값은  $X_v = -\frac{1}{2}R_1 \sin 2\alpha_0 \cdot \theta_{com}$ 이고 점  $P_v$ 의  $X$ 좌표값은  $X_v = -R_1(1 - \cos^2\alpha_0)$ 이므로  $\overline{OP_v} < \overline{OP_v}$ 는 식(12)로 표시된다.

$$\theta_{com} < \tan \alpha_0 \quad (12)$$

두번째조건에서  $\theta_{com}$ 의 한계식으로서, 합성치형에서 최소한의 원호부분을 갖기위해서는 인벌류우트부분이 이끝원을 넘지 않아야 하므로 식(13)의 조건식이 성립한다.

$$\sqrt{x_{1ai}^2 + y_{1ai}^2} < R_1 + A_k$$

$$R_{b1} \sqrt{1 + (\theta_{com} + \tan\alpha_0)^2} < R_1 + A_k \quad (13)$$

식(12)와 식(13)으로 계산된 값 중에서 작은  $\theta_{com}$ 의 값을  $\theta_{com}$ 의 최대값으로 한계값을 택하면 두가지 조건을 모두 만족한다.

### 3.2 원호반경의 한계

Fig. 8에서 원호 반경의 최소값은, 합성치형의 원호가 이끝원을 지나야하므로, 기어중심으로부터 원호의 중심까지의 거리를  $r$ 이라 하면,  $r+a$ 가  $R_1 + A_k$ 보다

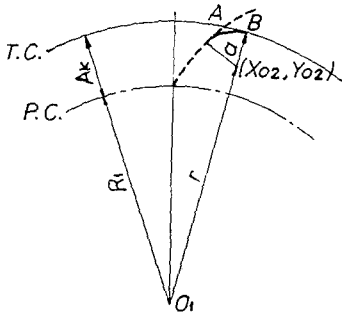


Fig. 8 Limit of  $a$

커야 한다. 따라서  $\sqrt{X_{o2}^2 + Y_{o2}^2} + a \geq R_1 + A_k$ 이며, 정리하면 식 (14)와 같이 원호반경의 최소값을 표시할 수 있다.

$$a \geq \frac{(R_1 + A_k)^2 - R_{o1}^2(1 + \phi_{com})^2}{(2R_1 + A_k - R_{o1} \cdot \phi_{com})} \quad (14)$$

원호반경의 최대값으로서는 Fig. 8에서 인벌류우트치형의 이끝점 A보다 합성치형의 이끝점 B가 치중심선쪽에 있어야 하므로, 원호반경의 최대값은 점 A와 점 B가 일치할 때의 원호반경의 크기로 한다.

### 3.3 모두울, 풀림각 및 원호반경이 제특성에 미치는 영향

모두울( $m$ )의 변화에 대한 물림율( $M_c$ ), 접촉계수( $F$ ), 인장축 공칭굽힘응력( $\sigma_N$ )의 변화를 표시한 Fig. 9에서, 모두울의 변화에 관계없이  $M_c$ 와  $F$ 는 항상 일정하나  $\sigma_N$ 은 모두울의 크기에 반비례함을 알 수 있다.  $\alpha_0, \theta_{com}, a$ 의 변화에 대한 제특성의 변화를 나타낸 Fig. 10에서  $\alpha_0$ 가 클수록,  $\theta_{com}$ 과  $a$ 가 작을수록  $M_c$ 는 작아지는 반면,  $F$ 는 커지고  $\sigma_N$ 은 감소함을 알 수 있다.

### 3.4 합성치형의 적정설계

합성치형의 치면접촉성능을 향상시키기 위하여 인벌류우트부분의 길이가 짧아야 하므로 풀림각이 작아야 한다. 앞절에서 나타난바와 같이 미끄럼율을 작게 하여 치면의 접촉성능을 높이고,  $F$ 를 크게 하며,  $\sigma_N$ 을 작게 하기 위해서는 잇수와  $\alpha_0$ 가 일정할 때  $\theta_{com}$ 과  $a$ 가 작을수록 좋다.

그러나 상대적으로 물림율이 작아지므로 물림이 원활하기 위해서는  $\theta_{com}$ 과  $a$ 를 함부로 줄일수는 없다. 또,  $\theta_{com}$ 과  $a$ 가 커져서 물림율이 플래의 하중분담계수를 고려하면 미끄럼율,  $F, \sigma_N$  등에 미치는 부정적인

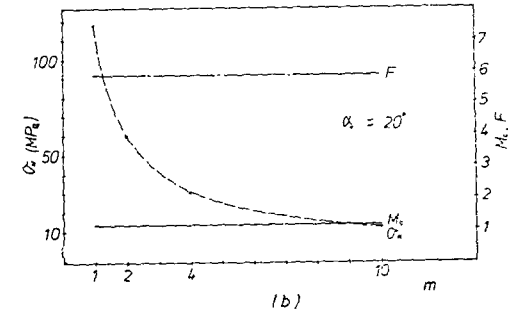
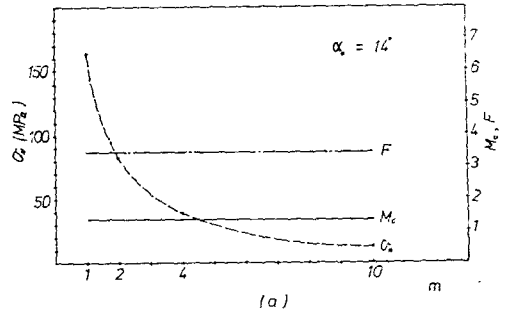


Fig. 9 Relation of  $\sigma_N, F$  and  $M_c$  with  $m$  ( $z=30, \theta_{com}=1^\circ, a=3m$ )

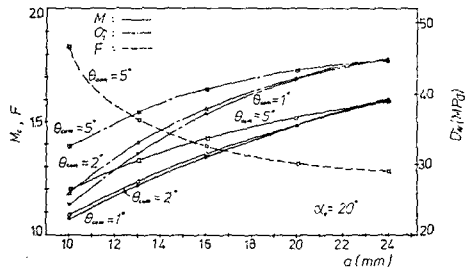
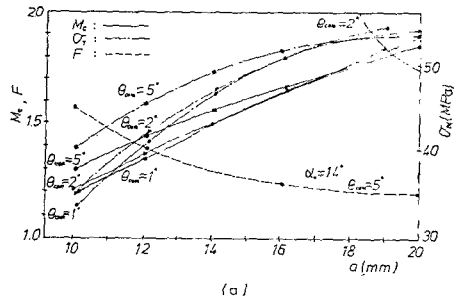


Fig. 10 Relation of  $\sigma_N, F$  and  $M_c$  with  $\alpha_0, \theta_{com}$  and  $a$

영향도 감소될 수 있다.

따라서 본 논문에서는 물림율은 일반적으로 사용되는 인벌류우트치형의 물림율인 1.3~1.8 범위이고  $F > 1.0$ 이며 다른특성이 가장좋은 합성치형중에서  $\theta_{com}$ 이

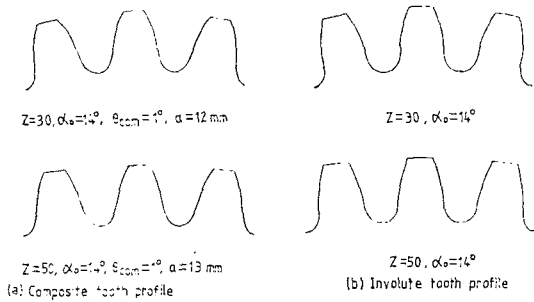


Fig. 11 Comparison between composite tooth profile and standard involute profile

작은것을 우선 택한 후  $a$  값을 결정한다. 이때의  $\theta_{com}$ 과  $a$ 의 값이 공칭굽힘응력과 미끄럼율등의 특성을 향상시키면서 동시에 물림율도 적절한 값이된다.

### 3.5 합성치형과 표준 인벌류우트치형의 비교

백래시  $B_a=0$ 이고 전위계수가 零인 합성치형과 표준 인벌류우트치형을 도시한 Fig. 11에서 합성치형의 이뿌리두께가 표준 인벌류우트치형보다 상당히 두꺼움을 알 수 있다. 따라서 Fig. 5와 Fig. 11로부터 합성치형의 굽힘강도가 표준 인벌류우트치형보다 클 수 있다.

## 4. 결 론

미끄럼율, 공칭굽힘응력, 접촉계수등 합성치형의 제

특성과 플립각, 원호반경의 한계를 고찰하고 성능이 우수한 합성치형의 설계방법을 고찰한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 합성치형의 미끄럼율과 물림율, 공칭굽힘응력은 압력각이 증가할수록 감소하고, 플립각과 원호반경이 작을수록 감소한다. 접촉계수는 압력각이 커지면 증가하고, 플립각과 원호반경이 작을수록 증가한다.
- (2) 합성치형의 물림율과 접촉계수는 모듈에 관계없이 일정하며 공칭굽힘응력의 크기는 모듈의 크기에 반비례한다.
- (3) 합성치형을 가진, 보다 우수한 성능의 기어를 얻기 위한 설계조건을 확립하였다. 즉, 물림율 1.3~1.8, 접촉계수를 1 이상으로 할 때 모듈, 잇수, 압력각의 변화에 따라 합성치형의 적정설계범위(플립각과 원호반경의 적정값)를 결정할 수 있다.

## 참 고 문 헌

- (1) 崔商勳, 卞俊滢, 尹甲英, 인벌류우트-圓弧 合成齒形의 創成에 대한 研究, 대한기계학회논문집, 제 9권, 제 5호, pp. 572~578, 1985
- (2) 日刊工業新聞社, 齒車便覽, pp. 89~95, 昭和 48
- (3) Earle Buckingham, ANALYTICAL MECHANICS OF GEARS, DOVER PUBLICATIONS, INC., pp. 76, 1949