

<論 文>

積層材料의 熱擴散係數測定을 위한 軸對稱 二次元 熱擴散方程式의 解析

金 鎮 遠* · 李 興 周**

(1986年 2月 6日 接受)

An Analysis of Axisymmetric Two Dimensional Heat Diffusion Equation to Measure the Thermal Diffusivity of Layered Materials

Jin Won Kim and Heung Joo Lee

Key Word: Flash Heat Pulse Method(섬광펄스가열법), Thermal Diffusivity(열확산율), Layered Material(적층재료), Axisymmetry(축대칭), Heat Loss(열손실), Green's Function (Green 함수)

Abstract

For the extension of application in flash method measuring the thermophysical properties of materials, the heat diffusion equation with the heat transfer loss from the front, rear, and circumferential surfaces of two layer cylindrical sample is mathematically analyzed by mean of Green's function for axially symmetric pulse heating on the front face of samples.

The solutions are applied to determine the unknown thermal diffusivity of the two materials and analyzed the measurement error due to heat loss and finite pulse time effects.

기 호 설 명

- B : Biot 수 $B=hL/k$
- C : 비열 (J/kg $^{\circ}$ K)
- F : 온도의 초기값($^{\circ}$ K)
- G : Green 함수 (Green's function)
- h : 복사 열전달계수(W/m 2 $^{\circ}$ K)
- k : 열전도율(W/m $^{\circ}$ K)
- L : 시편두께 (m)
- q : 열원 (W)
- r : 반경좌표(m)
- r_0 : 시편의 반경 (m)
- T : 시편온도($^{\circ}$ K)
- t : 열확산 시간(sec)
- t_p : 지수함수 열원의 피이크 시간(peak time)(sec)
- V : 시편후면에서의 무차원 온도
- x : 축방향 좌표(m)
- α : 열확산계수(m/sec 2)
- β : 삼각형 열원의 피이크 시간비율
- β_m : 고유값(반경방향)
- γ_n : 고유값(축방향)
- ϵ : 표면방사율
- ρ : 시편의 밀도(kg/m 3)
- σ : Stefan-Boltzman 상수
- τ : 열원 경과시간(sec)

* 正會員, 檀國大學校大學院 機械工學科
** 正會員, 陸軍士官學校 兵器工學科

1. 緒 論

科學技術의 發展과 더불어 여러가지 새로운 材料들이 開發됨에 따라 이들 材料에 대한 物性測定의 必要性도 점차 增大되고 있다. 特히 最近에는 모재단으로는 材料의 강도, 耐溶液性, 耐熱性, 耐腐蝕性 등 여러가지 技術的 要件조건을 充足할 수 없으므로 모재에 특수材料를 積層하므로써 용도에 적합한 材料를 開發하는 被覆技術이 여러가지로 開發되고 있다. 그러나 이러한 被覆材料는 被覆하기 前의 物性値와 被覆後의 物性値가 다르기 때문에 被覆前의 物性値는 무의미하며 實用狀態인 被覆後의 物性値가 機械設計 및 工學的 解析에서 필요한 자료이나 現在까지 國內外에서 測定된 자료를 찾아보기 힘들다. 現在 비교적 簡便하고 正確한 熱物性値의 測定方法으로는 Parker⁽¹⁾ 등이 처음 제안한 閃光法이 있다.

閃光法은 두께 L 인 얇은 판의 前面에 순간적으로 강렬한 射光펄스를 가한후 試片後面의 溫度上昇을 기록한 溫度時間曲線으로부터 最大溫度 T_{max} 에 도달하는 時間 t_{max} 와 $1/2 T_{max}$ 에 도달하는 時間 $t_{1/2}$ 을求하여 다음과 같이 熱擴散係數를 求하는 方法이다.

순간적인 熱源이 얇은판에 있는경우 熱擴散方程式의 最大溫度에 대한 無次元溫度의 解 $V = \frac{T}{T_{max}}$ 는

$$V = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 a t}{L^2}\right) \tag{a}$$

이고 식 (a)에 $V=0.5$, $t=t_{1/2}$ 을 넣으면 熱擴散係數 α 는

$$\alpha = 1.38 \frac{L^2}{\pi^2 t_{1/2}} \tag{b}$$

와 같이 된다.

식 (b)에 두께 L 및 $t_{1/2}$ 을 代入하면 熱擴散係數를 求할 수 있다. 그러나 Parker 는 熱源의 經過時間이 매우 짧은 순간적인 펄스로 가정하였고 熱을 1次元 흐름으로 보았으며, 前後面에서의 熱損失을 무시하였다. 이에 대해 Cowan⁽²⁾은 前後面에서의 熱損失을 고려하였으며 Cape, Lehman⁽³⁾, Watt⁽⁴⁾은 전후면 및 半徑方向의 熱損失을 고려하였다.

閃光法에 의한 熱擴散係數測定에서 포함될 수 있는 誤差는 熱擴散時間 동안의 熱損失과 펄스시간의 효과 (finite pulse time effect)에 기인한다.

일반적으로 순간적 펄스 (instantaneous pulse)를 使用하는경우 試片두께를 얇게하면 熱擴散時間이 적어지므로 熱損失은 무시할 수 있다. 그러나 열원의 펄스(heat

pulse)가 긴 경우 試片두께가 적어지면 펄스시간의 효과에 의한 誤差는 커지게 된다. Cape⁽³⁾, Larson, Koyama⁽⁵⁾, Clark, Taylor⁽⁶⁾, Heckman⁽⁷⁾ 등은 뜬니파와 지수함수열원의 펄스를 適用하여 펄스시간의 효과에 대하여 解析하였다.

그러나 이상은 單層材料의 熱擴散係數測定에 국한 하였으며 Larson, Koyama⁽⁸⁾는 閃光法의 適用범위를 擴大하기 위하여 2층 積層 材料에 대하여 適用하였으나 熱傳導를 1次元 흐름으로 가정 하였으며 前後面에서의 熱損失을 무시하였다. Lee, H.J.⁽⁹⁾는 閃光法을 3층 積層 材料에 適用하여 WC 합금, 황동, 납납, 증류수의 熱擴散係數를 測定하였으나 前後面에서의 熱損失은 고려하지 않았다. Lee, K.S.⁽¹⁰⁾는 3層 積層 材料의 前後面에서 熱損失을 고려 하였으나 半徑方向의 熱損失은 무시하였다.

본 論文에서는 熱損失에 의한 誤差를 배제하기 위하여 원판형 試片의 前後面에서의 熱損失과 半徑方向의 熱損失을 고려하고 2層으로 된 積層材料의 熱擴散方程式을 Green 함수를 利用하여 解析하므로써 被覆材料들의 熱物性値를 正確하게 測定하기 위한 임의의 측대칭 열원의 펄스를 使用하여 熱損失 및 펄스시간의 효과에 의한 誤差를 최소화 할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

2. 理論解析

2.1 支配方程式과 境界條件

被覆材料의 熱擴散 係數를 測定하기 위하여 物성을 알고 있는 모재위에 測定 하고자 하는 被覆材料를 積層한 원판형 試片을 만들고 모재표면에 측방향으로 순간적인 輻射熱을 가한후 試片後面(측정 하고자 하는 材料表面)에서의 溫度上昇 記錄으로부터 最大溫度에 도달하는 時間 t_{max} 와 最大溫度의 1/2에 도달하는 時間 $t_{1/2}$ 을 求한다.

그러므로 測定條件과 부합하는 熱擴散 方程式을 解析하기 위하여 다음과 같이 假定하였다.

- (1) 材料는 Fig. 1과 같이 軸方向으로 2層으로 積層 되었으며 試片은 圓板이다.
- (2) 各層은 均質하며 接觸面에서의 熱接觸抵抗은 없으며 온도의 반경방향성분은 같다.
- (3) 試片에 가해진 熱源은 측대칭이며 두께 및 시간의 함수이다.
- (4) 試片은 작으므로 試片 前面에 가해진 熱流束은 均일하게 흡수된다.

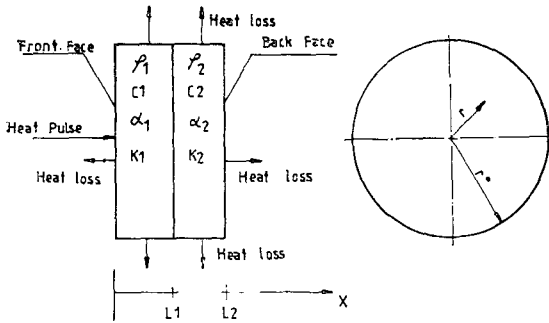


Fig. 1 Mathematical model

(5) 測定 溫度差가 적으므로 各 層의 모든 物性値는 一定하다.

(6) 熱源을 投射하기 전 試片과 周위와 溫度差는 없다.

(7) 試片表面(전후면 및 원주면)과 周위流體와의 溫度差는 극히 적으므로 對流熱傳達은 없으며 輻射 熱損 失만 존재하고 軸方向과 半徑方向이 같다.

이 경우 輻射 熱傳達은 試片과 周위의 溫度差가 적으므로 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\sigma \varepsilon (T^4 - T_\infty^4) = h(T - T_\infty)$$

여기서 h 는 輻射 熱傳達 係數로서

$$h = 4\sigma \varepsilon T_\infty^3$$

위와 같은 假定하에서 Fig. 1의 各 層에 대한 熱擴散 方程式 및 境界條件과 初期條件은 다음과 같다.

支配方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{1}{k_1} q(r, x, t) \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \quad \left(\begin{array}{l} 0 < r < r_0 \\ 0 < x < L_1 \end{array} \right) \\ & \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \quad \left(\begin{array}{l} 0 < r < r_0 \\ L_1 < x < L_2 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $\theta = T - T_\infty$

境界條件

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + h_1 \theta_1 = 0 \quad x=0 \text{ 에서} \quad (t > 0, 0 < t < r_0) \quad (2)$$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad x=L_1 \text{ 에서} \quad (t > 0, 0 < r < r_0) \quad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \quad x=L_1 \text{ 에서} \quad (t > 0, 0 < r < r_0) \quad (4)$$

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + h_2 \theta_2 = 0 \quad x=L_2 \text{ 에서}$$

$$(t > 0, 0 < r < r_0) \quad (5)$$

$$\theta_1 = \text{finite} \quad r=0 \text{ 에서} \quad (0 < x < L_2) \quad (6)$$

$$\theta_2 = \text{finite} \quad r=0 \text{ 에서} \quad (0 < x < L_2) \quad (7)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta}{\partial r} + h_1 \theta_1 = 0 \quad r=r_0 \text{ 에서} \quad (0 < x < L_2) \quad (8)$$

$$k_2 \frac{\partial \theta}{\partial r} + h_2 \theta_2 = 0 \quad r=r_0 \text{ 에서} \quad (0 < x < L_2) \quad (9)$$

初期條件

$$\theta_1 = 0 \quad t=0 \text{ 에서} \quad (10)$$

$$\theta_2 = 0 \quad t=0 \text{ 에서} \quad (11)$$

2.2 數學的 解析

本 問題에서는 支配方程式이 非齊次問題(non homogeneous problem)이므로 Green 函數를 導入하여 解析⁽¹¹⁾하고자 한다. Green 函數를 求하기 위하여 다음과 같은 假設問題를 풀어야 한다.

$$\alpha_i \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad \left(\begin{array}{l} 0 < r < r_0 \\ 0 < x < L_1, \quad i=1 \\ L_1 < x < L_2, \quad i=2 \end{array} \right) \quad (12)$$

여기서 $i=1, 2$

$$-k \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + h_i \phi_i = 0 \quad x=0 \text{ 에서} \quad (13)$$

$$\phi_1 = \phi_2 \quad x=L_1 \text{ 에서} \quad (14)$$

$$k_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad x=L_1 \text{ 에서} \quad (15)$$

$$k_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + h_2 \phi_2 = 0 \quad x=L_2 \text{ 에서} \quad (16)$$

$$\phi_i = \text{finite} \quad r=0 \text{ 에서} \quad (17)$$

$$k_i \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + h_i \phi_i = 0 \quad r=r_0 \text{ 에서} \quad (18)$$

$$\phi_i = F_i(r, x) \quad t=0 \text{ 에서} \quad (19)$$

여기서 F_i 는 各 層에서의 초기溫度 분포이다.

변수분리법을 이용하기 위하여

$$\phi_i(r, x, t) = \bar{R}_i(r, t) \cdot \bar{X}_i(x, t) \quad (20)$$

$$R_i = R_{ni}(r) \cdot \Gamma(t) \quad (21)$$

$$\bar{X}_i = X_{ni}(x) \cdot \tau(t) \quad (22)$$

로 정의하고 式(20)~(22)에 의해 支配方程式(12) 및 境界條件과 初期條件을 변수분리 하면

$$\frac{\partial^2 R_{ni}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{ni}}{\partial r} + \frac{\beta_{ni}^2}{\alpha_i} R_{ni} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \beta^2_{ni} \Gamma = 0 \tag{24}$$

$$R_{ni} = \text{finite} \quad r=0 \text{ 에서} \tag{25}$$

$$k_i \frac{\partial R_{ni}}{\partial r} + h_i R_{ni} = 0 \quad r=r_0 \text{ 에서} \tag{26}$$

$$R_{ni} = F_i(r) \quad t=0 \text{ 에서} \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 X_{ni}}{\partial x^2} + \frac{\gamma_n^2}{\alpha_i} X_{ni} = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \gamma_n^2 \tau = 0 \tag{29}$$

$$-k_1 \frac{\partial X_{n1}}{\partial x} + h_1 X_{n1} = 0 \quad x=0 \text{ 에서} \tag{30}$$

$$X_{n1} = X_{n2} \quad x=L_1 \text{ 에서} \tag{31}$$

$$k_1 \frac{\partial X_{n1}}{\partial x} = k_2 \frac{\partial X_{n2}}{\partial x} \quad x=L_1 \text{ 에서} \tag{32}$$

$$k_2 \frac{\partial X_{n2}}{\partial x} + h_2 X_{n2} = 0 \quad x=L_2 \text{ 에서} \tag{33}$$

$$X_{n1} = F_1(x) \quad t=0 \text{ 에서} \tag{34}$$

$$X_{n2} = F_2(x) \quad t=0 \text{ 에서} \tag{35}$$

式(23)~(27)로 부터 固有函數는

$$R_{ni}(\beta_{ni}, r) = J_0\left(\frac{\beta_{ni}}{\sqrt{\alpha_i}} r\right) \tag{36}$$

固有條件은

$$\frac{h_i}{k_i} J_0\left(\frac{\beta_{ni}}{\sqrt{\alpha_i}} r_0\right) - \frac{\beta_{ni}}{\sqrt{\alpha_i}} J_1\left(\frac{\beta_{ni}}{\sqrt{\alpha_i}} r_0\right) = 0 \tag{37}$$

Norm 은

$$N_i(\beta_{ni}) = \frac{r_0^2}{2} J_0^2\left(\frac{\beta_{ni}}{\sqrt{\alpha_i}} r_0\right) \left[1 + \frac{\alpha_i}{\beta_{ni}^2} \left(\frac{h_i}{k_i}\right)^2\right] \tag{38}$$

$$\Gamma(t) = e^{-\rho^2 n_i t} \tag{39}$$

그러므로

$$\bar{R}_i(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\rho^2 n_i t}}{N_i(\beta_{ni})} R_{ni}(\beta_{ni}, r)$$

$$\int_0^{r_0} r' R'_{ni}(\beta_{ni}, r') F_i(r') dr' \tag{40}$$

式(28)의 一般解는

$$X_{n1}(\gamma_n, x) = A_{n1} \sin\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_1}} x\right) + B_{n1} \cos\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_1}} x\right) \tag{41}$$

$$X_{n2}(\gamma_n, x) = A_{n2} \sin\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} x\right) + B_{n2} \cos\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} x\right) \tag{42}$$

式(41)에 境界條件(30)을 適用하면

$$-\frac{k_1 \gamma_n}{\sqrt{\alpha_1}} A_{n1} + h_1 B_{n1} = 0$$

一般性を 잃지 않고

$$B_{n1} = 1$$

이면

$$A_{n1} = \frac{h_1}{k_1} \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\gamma_n}$$

그러므로

$$X_{n1}(\gamma_n, x) = \frac{h_1 \sqrt{\alpha_1}}{k_1 \gamma_n} \sin\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_1}} x\right) + \cos\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_1}} x\right) \tag{43}$$

A_{n2} , B_{n2} 및 固有條件을 求하기 위하여 式(42)(43)을 境界條件 式(31)(32)(33)에 適用하고

$$\mu = \frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_1}} L_1 \quad \nu = \frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} L_2$$

$$B_1 = \frac{h_1 L_1}{k_1} \quad B_2 = \frac{h_2 L_2}{k_2}$$

$$K = \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

로 정의하면 固有條件은

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{B_1}{\mu} \sin \mu + \cos \mu\right) & -\sin\left(\frac{L_1}{L_2} \nu\right) & -\cos\left(\frac{L_1}{L_2} \nu\right) \\ K\left(\frac{B_1}{\mu} \cos \mu - \sin \mu\right) & -\cos\left(\frac{L_1}{L_2} \nu\right) & \sin\left(\frac{L_1}{L_2} \nu\right) \\ 0 & \left(\frac{B_1}{\nu} \sin \nu + \cos \nu\right) & \left(\frac{B_2}{\nu} \cos \nu - \sin \nu\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{44}$$

$$A_{n2} = \sin\left(\frac{L_1}{L_2} \nu\right) \left(\frac{B_1}{\mu} \sin \mu + \cos \mu\right) + K \cos\left(\frac{L_1}{L_2} \nu\right) \left(\frac{B_1}{\mu} \cos \mu - \sin \mu\right) \tag{45}$$

$$B_{n2} = \cos\left(\frac{L_1}{L_2} \nu\right) \left(\frac{B_1}{\mu} \sin \mu + \cos \mu\right) - K \sin\left(\frac{L_1}{L_2} \nu\right) \left(\frac{B_1}{\mu} \cos \mu - \sin \mu\right) \tag{46}$$

Norm 은

$$N(\gamma_n) = \frac{k_1}{\alpha_1} \int_0^{L_1} X_{n1}^2(\gamma_n, r) dx + \frac{k_2}{\alpha_2} \int_{L_1}^{L_2} X_{n2}^2(\gamma_n, x) dx = \frac{k_1}{\alpha_1} \left[\frac{L_1}{2} \left(1 + \frac{B_1^2}{\mu^2}\right) + \left(1 - \frac{B_1^2}{\mu^2}\right) \frac{\sqrt{\alpha_1}}{4\gamma_n} \sin 2\mu + \frac{B_1 \sqrt{\alpha_1}}{2\mu\gamma_n} (1 - \cos 2\mu) \right] + \frac{k_2}{\alpha_2} \left\{ \frac{L_2 - L_1}{2} (A_{n2}^2 + B_{n2}^2) + \frac{\sqrt{\alpha_2}}{4\gamma_n} (A_{n2}^2 - B_{n2}^2) \left[\sin\left(2\frac{L_1}{L_2} \nu\right) - \sin 2\nu \right] + \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2\gamma_n} A_{n2} B_{n2} \left[\cos\left(2\frac{L_1}{L_2} \nu\right) - \cos 2\nu \right] \right\} \tag{47}$$

式(29)로 부터

$$\tau(t) = e^{-r_n^2 t} \tag{48}$$

그러므로

$$\bar{X}_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 t}}{N(\gamma_n)} X_{ni}(\gamma_n, x) \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{\alpha_j} \int_{x'=x_j}^{x_j+1} X_{nj}(\gamma_n, x') F_j(x') dx' \quad (49)$$

式(40)으로 부터

$$\bar{R}_1(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m^2 t}}{N_1(\beta_m)} R_{m1}(\beta_m, r) \int_0^{r_0} r' R'_{m1}(\beta_m, r') F_1'(r') dr' \quad (50)$$

$$\bar{R}_2(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m^2 t}}{N_2(\beta_m)} R_{m2}(\beta_m, r) \int_0^{r_0} r' R'_{m2}(\beta_m, r') F_2'(r') dr' \quad (51)$$

式(49)로 부터

$$\bar{X}_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 t}}{N(\gamma_n)} \frac{k_1}{\alpha_1} X_{n1}(\gamma_n, x) \int_0^{L_1} X'_{n1}(\gamma_n, x') F_1'(x') dx' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 t}}{N(\gamma_n)} \frac{k_2}{\alpha_2} X_{n1}(\gamma_n, x) \int_{L_1}^{L_2} X'_{n2}(\gamma_n, x') F_2'(x') dx' \quad (52)$$

$$\bar{X}_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 t}}{N(\gamma_n)} \frac{k_1}{\alpha_1} X_{n2}(\gamma_n, x) \int_0^{L_1} X'_{n1}(\gamma_n, x') F_1'(x') dx' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 t}}{N(\gamma_n)} \frac{k_2}{\alpha_2} X_{n2}(\gamma_n, x) \int_{L_1}^{L_2} X'_{n2}(\gamma_n, x') F_2'(x') dx' \quad (53)$$

여기서

$$m_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m^2 t}}{N_1(\beta_m)} \quad m_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_m^2 t}}{N_2(\beta_m)}$$

$$n_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 t}}{N(\gamma_n)} \frac{k_1}{\alpha_1} \quad n_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 t}}{N(\gamma_n)} \frac{k_2}{\alpha_2}$$

$$R_{m1} R'_{m1} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{m1}(\beta_m, r) \int_0^{r_0} r' R'_{m1}(\beta_m, r') dr'$$

$$R_{m2} R'_{m2} = \sum_{n=1}^{\infty} R_{m2}(\beta_m, r) \int_0^{r_0} r' R'_{m2}(\beta_m, r') dr'$$

$$X_{n1} X'_{n1} = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n1}(\gamma_n, x) \int_0^{L_1} X'_{n1}(\gamma_n, x') dx'$$

$$X_{n1} X_{n2}' = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n1}(\gamma_n, x) \int_{L_1}^{L_2} X'_{n2}(\gamma_n, x') dx'$$

$$X_{n2} X'_{n1} = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n2}(\gamma_n, x) \int_0^{L_1} X'_{n1}(\gamma_n, x') dx'$$

$$X_{n2} X'_{n2} = \sum_{n=1}^{\infty} X_{n2}(\gamma_n, x) \int_{L_1}^{L_2} X'_{n2}(\gamma_n, x') dx'$$

로 정의하면

式(50)(51) 및 式(52)(53)은

$$\bar{R}_i(r, t) = \begin{bmatrix} m_1 R_{m1} R'_{m1} & 0 \\ 0 & m_2 R_{m2} R'_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1'(r') \\ F_2'(r') \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\bar{X}_i(x, t) = \begin{bmatrix} n_1 X_{n1} X'_{n1} & n_2 X_{n1} X'_{n2} \\ n_1 X_{n2} X'_{n1} & n_2 X_{n2} X'_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1'(x) \\ F_2'(x) \end{bmatrix} \quad (55)$$

그러므로 式(20)으로 부터 제차문제의 해는

$$\phi_i(x, r, t) = \bar{X}_i(x, t) \cdot \bar{R}_i(r, t) = \begin{bmatrix} n_1 X_{n1} X'_{n1} & n_2 X_{n1} X'_{n2} \\ n_1 X_{n2} X'_{n1} & n_2 X_{n2} X'_{n2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 R_{m1} R'_{m1} F_1'(r') F_1'(x') \\ m_2 R_{m1} R'_{m2} F_2'(r') F_2'(x') \end{bmatrix} \quad (56)$$

그러므로

$$\phi_i(x, r, t) = \sum_{j=1}^2 m_j n_j R_{mj} R'_{mj} X_{ni} X'_{nj} F_j'(r') F_j'(x') = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(\beta_m^2 + \gamma_n^2)t}}{N_j(\beta_m) N(\gamma_n)} \frac{k_j}{\alpha_j} R_{mj} X_{ni} \int_0^{r_0} \int_{x'=x_j}^{x_j+1} r' R'_{mj} X'_{nj} F_j'(r') F_j'(x') dr' dx' \quad (57)$$

여기서

$$F_j'(r', x') = F_j'(r') F_j(x')$$

그러므로 問題의 Green 函數는

$$G_{ij}(r, x, t | r', x', t') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(\beta_m^2 + \gamma_n^2)(t-t')}}{N_j(\beta_m) N(\gamma_n)} \frac{k_j}{\alpha_j} R_{mj} R'_{mj} X_{ni} X_{nj} \quad (58)$$

積層 材料에 대한 非齊次問題의 Green 函數에 의한 解⁽¹¹⁾는

$$\theta_i(r, x, t) = \sum_{j=1}^2 \left[\int_0^{r_0} \int_{x_j}^{x_j+1} r' G_{ij}(r, xt | r', x', t')_{t=0} F_j(r', x') dr' dx' + \int_0^{r_0} \int_{x_j}^{x_j+1} \int_{t'=0}^t r' G_{ij}(r, x, t | r', x', t')_{t=0} q_j(r', x', t') dr' dx' dt' \right] \quad (59)$$

本 問題에서는

$$F_1(r, x) = 0, \quad F_2(r, x) = 0, \quad q_2(r, x, t) = 0$$

이므로 式(59)로 부터

$$\theta_2(r, x, t) = \int_0^{r_0} \int_0^{L_1} \int_{t'=0}^t r' G_{21}(r, x, t | r', x', t') \frac{\alpha_1}{k_1} q_1(r', x', t') dr' dx' dt' \quad (60)$$

式(58)로 부터

$$G_{21}(r, x, t | r', x', t') = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(\beta_m^2 + \gamma_n^2)(t-t')}}{N_1(\beta_m) N(\gamma_n)} \frac{k_1}{\alpha_1} R_{m1} R'_{m1} X_{n2} X'_{n1} \quad (61)$$

열원반경 α 내에서 熱流束이 均一하게 흡수되면

$$q_1(r', x', t') = Q q(x', t') = Q q(x') q(t') \quad (62)$$

그러므로 被覆材料의 溫度는 式(60)(61)로 부터

$$\theta_2(r, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q \frac{R_{m1}(\beta_m, r) X_{n2}(\gamma_n, x)}{N_1(\beta_m) N(\gamma_n)} \int_0^{\alpha} r' R'_{m1}(\beta_m, r') dr' \int_0^{x'} q(x') X'_{n1}(\gamma_n, x') dx' \int_{t'=0}^t e^{-(\beta_m^2 + \gamma_n^2)t'} q(t') dt' \quad (63)$$

여기서 時間函數

$$S(\beta_{n1}, \gamma_n, t) = e^{-(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)t} \int_{t'=0}^t e^{(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)t'} q(t') dt' \quad (64)$$

로 정의하면

열원의 펄스 $q(t')$ 가

(1) Parker⁽¹⁾ 등이 제안한 순간적인 펄스일때

$$q(t) = \delta(t) \quad (65)$$

$$S(\beta_{n1}, \gamma_n, t) = e^{-(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)t} \quad (66)$$

(2) Taylor⁽⁶⁾ 등이 제안한 삼각형 펄스일때

$$q(t) = \begin{cases} \frac{2}{\tau} \left(\frac{t'}{\beta\tau} \right) & 0 < t' < \beta\tau \\ \frac{2}{\tau} \left(\frac{\tau - t'}{\tau - \beta\tau} \right) & \beta\tau < t' < \tau \\ 0 & \tau < t' \end{cases} \quad (67)$$

$$S(\beta_{n1}, \gamma_n, t) = \frac{2e^{-(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)t}}{\beta\tau(\tau - \beta\tau)(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)^2} \left[1 - e^{-(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)\beta\tau} + \beta(e^{(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)t} - 1) \right] \quad (68)$$

(3) Larson, Koyama⁽⁸⁾가 제안한 지수함수 펄스일때

$$q(t) = \frac{t'}{t_p^2} e^{-t'/t_p} \quad (69)$$

$$S(\beta_{n1}, \gamma_n, t) = \frac{e^{-(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)t}}{t_p^2 B_{mn}^2} [e^{B_{mn}t}(B_{mn}t - 1) + 1] \quad (70)$$

여기서 $B_{mn} = \beta_{n1}^2 + \gamma_n^2 - \frac{1}{t_p}$

(4) Cape⁽³⁾가 제안한 구형 펄스(square pulse)일때

$$q(t') = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & t' < \tau \\ 0 & \tau < t' \end{cases} \quad (71)$$

$$S(\beta_{n1}, \gamma_n, t) = \frac{1}{\tau(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)} e^{-(\beta_{n1}^2 + \gamma_n^2)(t-\tau)} \quad (72)$$

열원의 펄스가 짧은 경우 [式(66)]

式(62)에서 $q(x') = \delta(x-x')$

$$x' = 0$$

이므로 式(36) (42) (43)을 式(63)에 代入하면

$$\theta_2(r, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q \frac{1}{N_1(\beta_{n1})N(\gamma_n)} J_0\left(\frac{\beta_{n1}}{\sqrt{\alpha_1}} r\right) \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\beta_{n1}} a J_1\left(\frac{\beta_{n1}}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) \left[A_{n2} \sin\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} x\right) + B_{n2} \cos\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} x\right) \right] S(\beta_{n1}, \gamma_n, t) \quad (73)$$

열원의 펄스가 긴 경우 [式(68) (70) (72)]

式(62)에서 熱源의 침투깊이 내에서 溫度분포가 선형이면

$$q(x') = 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha_1\tau}} x' \quad 0 < x' < \sqrt{\alpha_1\tau}$$

여기서 $\sqrt{\alpha_1\tau}$ 는 熱源의 침투깊이이다.

그러므로 式(36) (42) (43)을 式(63)에 代入하면

$$\theta_2(r, x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q \frac{1}{N_1(\beta_{n1})N(\gamma_n)} J_0\left(\frac{\beta_{n1}}{\sqrt{\alpha_1}} r\right) \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\beta_{n1}} a J_1\left(\frac{\beta_{n1}}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) q_n \left[A_{n2} \sin\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} x\right) + B_{n2} \cos\left(\frac{\gamma_n}{\sqrt{\alpha_2}} x\right) \right] S(\beta_{n1}, \gamma_n, t) \quad (74)$$

여기서

$$q_n = -\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\gamma_n} \left\{ \frac{B_1}{\mu} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\tau\gamma_n}} \sin(\gamma_n \sqrt{\tau}) \right] + \frac{1}{\sqrt{\tau\gamma_n}} [1 - \cos(\gamma_n \sqrt{\tau})] \right\} \quad (75)$$

試片後面 중심에서의 溫度는 式(73)으로 부터

$$\theta_2(0, L_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q \frac{1}{N_1(\beta_{n1})N(\gamma_n)} \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\beta_{n1}} a J_1\left(\frac{\beta_{n1}}{\sqrt{\alpha_1}} a\right) [A_{n2} \sin \nu + B_{n2} \cos \nu] S(\beta_{n1} \gamma_n, t) \quad (76)$$

그러므로 試片後面 중심에서의 無次元 溫度는

$$V = \frac{\theta_2(0, L_2, t)}{\theta_2(0, L_2, t_{max})} \quad (77)$$

여기서 t_{max} 는 軸方向 및 半徑方向으로 熱損失이 있을 때 $r=0, x=L_2$ 에서 最大 溫度까지 도달하는데 소요되는 時間이다.

2.3 확대적용 및 증명

단층재료의 경우

$$L=L_2, L_1=0, \alpha=\alpha_1=\alpha_2, k=k_1=k_2, h=h_1=h_2$$

이므로

式(45) (46)으로 부터

$$A_n = k \frac{B}{\mu} \quad B_n = 1 \quad (78)$$

式(44)로 부터 固有條件은

$$\sin \nu - \frac{B}{\nu} \cos \nu - k \left(\frac{B}{\mu} \left(\frac{B}{\nu} \sin \nu + \cos \nu \right) - 0 \right) = 0 \quad (79)$$

式(47)로 부터 Norm 은

$$N(\gamma_n) = \frac{k}{\alpha} \left[\frac{L}{2} (A_n^2 + B_n^2) - \frac{\sqrt{\alpha}}{4\gamma_n} (A_n^2 - B_n^2) \sin 2\nu + \frac{\sqrt{\alpha}}{2\gamma_n} A_n B_n (1 - \cos 2\nu) \right] \quad (80)$$

後面中心 에서의 溫度는 式(75)로 부터

$$\theta(0, L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q \frac{1}{N_1(\beta_n)N(\gamma_n)}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta_m} a J_1\left(\frac{\beta_m}{\sqrt{\alpha}} a\right) [A_n \sin \nu + B_n \cos \nu]$$

$$S(\beta_m, \gamma_n, t) \quad (81)$$

熱이 1次元으로 흐른다면

$$\theta(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{N(\gamma_n)} [A_n \sin \nu + B_n \cos \nu]$$

$$S(\gamma_n, t) \quad (82)$$

熱損失이 없다고 하면

$$B = B_1 = B_2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\text{式(78)로부터}$$

$$A_n = 0 \quad (83)$$

$$\text{式(79)로부터 固有條件은}$$

$$\sin \nu = 0 \quad (84)$$

그러므로

$$\gamma_n = \frac{n\pi \sqrt{\alpha}}{L}$$

$$\text{式(80)으로부터 Norm 은}$$

$$N(\gamma_n) = \frac{k}{\alpha} \left[\frac{L}{2} + \frac{\sqrt{\alpha}}{4\gamma_n} \sin 2\nu \right] = \frac{\rho CL}{2} \quad (85)$$

試片 後面의 溫度는 式(82)로부터

$$\theta(L, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{N(\gamma_n)} \cos \nu S(\gamma_n, t) \quad (86)$$

Parker의 가정과 같이 熱源이 순간적인 펄스이면

$$S(\gamma_n, t) = e^{-\gamma_n^2 t} \quad (87)$$

熱損失이 없을때 試片의 最大 溫度上昇 θ_{\max} 는 주어진 열량을 열용량으로 나누면 된다.

$$\theta_{\max} = \frac{Q}{H} \quad (88)$$

여기서 $H = \rho CL$

그러므로 無次元 溫度

$$V(L, t) = \frac{\theta}{\theta_{\max}} = H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N(\gamma_n)} \cos \nu e^{-\gamma_n^2 t} \quad (89)$$

式(84)(85)를 式(89)에 대입하면

$$V(L, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{\alpha}{L^2} t\right)$$

Parker의 實驗條件과 같이 初期條件을

$$T(x, 0) = \frac{Q}{\rho CL}$$

로 놓으면

$$V(L, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{\alpha}{L^2} t\right) \quad (90)$$

그러므로 式(90)은 Parker⁽¹⁾등이 구한 式과 一致한다.

3. 검토

本 解析은 2層으로 된 積層材料中 한층의 熱物性值를 알고 있을때 나머지層의 熱物性值를 測定할 수 있는 방법이다. 실제 實驗條件은 Parker가 가정한것 처럼 熱源이 순간적인 펄스도 아니고 試片에서 熱損失이 없는것도 아니다.

그러므로 材料의 熱物性值 測定에서 포함될 수 있는 誤差는 熱擴散時間(測定時間) t 동안의 熱損失과 열원 경과시간 τ 에 의한 펄스시간의 효과이다.

펄스시간의 효과^(3,5)란 같은 熱源을 짧은 時間에 투사 하는것 보다 긴 時間에 투사하면 상대적으로 熱의 擴散速度가 늦어지고 熱擴散時間 t 가 增加하는 효과를 말한다.

熱擴散이 좋은 材料이거나 材料의 두께가 적은 경우 熱擴散時間이 짧기때문에 熱損失에 의한 誤差는 무시할 수 있으나 熱擴散 時間의 상대적인 지연효과는 커지게 되므로 펄스시간의 효과에 의한 誤差는 커지게 된다.

또한 熱擴散이 좋지않은 材料이거나 材料의 두께가 클경우 熱擴散 時間 t 가 길어지기때문에 熱擴散 時間의 상대적인 지연효과는 적어지게 되므로 펄스 시간의 효과에 의한 誤差는 무시할수 있지만 열손실에 의한 오차는 커지게 된다.

이에 대한 해결방법은 試片에서의 軸方向 및 半徑方向의 熱損失을 고려하여 熱擴散 方程式의 解를 求하여야 한다. 실제 試片이 半徑에 비해서 얇거나 熱源이 試片前面에 균등하게 분포 되었을 경우 半徑方向의 熱損失에 의한 효과는 무시할 정도로 적다. 그러나 熱源이 레이저(laser)광이나 렌즈(lens)에 의해 집광된 점열원(spot heat source)⁽⁴⁾이라면 半徑方向의 영향은 상당히 크다. 따라서 本 解析은 熱源이 균등하게 분포되지 않은 점열원이나 半徑 方向으로 임의의 函數인 경우에도 適用할 수 있다.

또한 펄스시간의 효과에 대한 보상과 半徑 方向과 軸方向에 대한 熱損失의 誤差를 해결하였다.

4. 結 論

被覆材料등 2層 積層材料의 正確한 熱物性值를 測定하기 위한 방법으로 試片의 軸方向과 半徑方向의 熱損失을 고려하여 熱擴散 方程式을 Green 함수로 解析 하였으며 本 解析을 이용하여 임의의 熱源으로 2層 및 單層材料의 熱物性值를 測定할수 있으며 熱物性值

測定에서 문제가 되는 熱損失에 의한 誤差와 펄스시간의 효과에 의한 誤差를 최소한 배제할 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) W.J. Parker, R.J. Jenkins, C.P. Butler, and G. L. Abbott, "Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity", J. Appl. Phys., Vol. 32, pp.1679~1684, 1961
- (2) R.D. Cowan, "Pulse Method of Measuring Thermal Diffusivity at High Temperatures", J. Appl. Phys., Vol. 34, pp.926~927, 1963
- (3) J.A. Cape, G.W. Lehman, "Temperature and Finite Pulse Time Effects in the Flash Method for Measuring Thermal Diffusivity", J. Appl. Phys., Vol. 34, pp.1909~1913, 1963
- (4) D.A. Watt, "Theory of Thermal Diffusivity by Pulse Technique", British J. Appl. Phys., Vol. 17, pp.231~240, 1966
- (5) K.B. Larson, Koyama, "Correction for Finite Pulse Time Effects in very Thin Samples Using the Flash Method of Measuring Thermal Diffusivity", J. Appl. Phys., Vol.38(2), pp.465~474, 1967
- (6) L.M. Clark, R. Taylor, "Radiation Loss in the Flash Method for Thermal Diffusivity", J. Appl. Phys., Vol. 46, pp.714~719, 1975
- (7) R.C. Heckman, "Finite Pulse Time and Heat Loss Effects in Pulse Thermal Diffusivity Measurements", J. Appl. Phys., Vol. 44, pp.1455~1460, 1973
- (8) K.B. Larson, K. Koyama, "Measurement by the Flash Method of Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity in Two Layer Composite Sample", J. Appl. Phys., Vol. 39(9), pp.4408~4416, 1968
- (9) H.J. Lee, "Thermal Diffusivity in Layered and Dispered Composites", Ph. D. Thesis, Purdue University, 1975
- (10) 이관수, 손병진, 이흥주, "다층복합재료의 열확산계수를 섬광법으로 측정하기 위한 연구" 대한기계학회논문집, 제 7 권, 제 4 호, pp.477~482, 1983
- (11) M.N. Ozisik, Heat Conduction, John Wiley, pp.294~334, 1980