韓國經營科學會誌
第11券 第1號
1986年 4月

Fuzzy 계획법의 해법일반화에 관한 연구

A Study on the Extension of Fuzzy Programming Solution Method

梁 泰 瑢*
金 顯 俊*

Abstract

In this study, the fuzzy programming is extended to handle various types of membership functions by transformation of the complicated fuzzy programming problems into the equivalent crisp linear programming problems with single objective. It is well-known that the fuzzy programming problem with linear membership functions (i. e., ramp type) can be easily transformed into a linear programming problem by introducing one dummy variable to minimize the worst unwanted deviation.

However, until recently not many researches have been done to handle various general types of complicated linear membership functions which might be more realistic than ramp-or triangular-type functions. In order to handle these complicated membership functions, the goal dividing concept, which is based on the fuzzy set operation (i. e., intersection and union operations), has been prepared. The linear model obtained using the goal dividing concept is more efficient and simple than the previous models [4, 8]. In addition, this result can be easily applied to any nonlinear membership functions by piecewise approximation since the membership function is continuous and monotone increasing or decreasing.

I. 서 론

일반적인 실상황 의사결정에 사용되는 여러가지 목적들은 그 목적들을 적정하게 정하기가 어렵거나 또는 그 목적들의 성취희망수준인 그 목적의 중요정도를 명확하게 규정하기 어렵기 때문에, 최근에 와서는 불확실한 상황하에서의 의사결정 방법에 많은 관심이 모아지고 있다. Fuzzy계획법(Fuzzy Programming ; FP)은 fuzzy집합이론을 바탕으로 의사결정과정에서의 불확실성을 처리하고자 하는 접근방법이다. 즉 의사결정자의 각 목표에 대한 가치를 membership함수를 사용하여 계량화시키고, 이를 이용하여 최적 의사결정을 구하고자 하는 방법이다. 그러나 이러한 membership함수는 여러가지 다양한 형태를 갖게되는데, 지금까지는 매우 간단한 형태의 membership함수에 대해서만 그 해법이 연구되어 왔으며 [4, 8, 10], 여러가지 복잡한 membership함수를 가지는 Fuzzy계획법에 대한 일반적인 해법이 없었기 때문에 Fuzzy계획법의 실제응용에 큰 제약요인이 되어 왔다.

본 연구에서는 이 문제를 해결하기 위하여 membership함수가 복잡할 때, 목표분할 개념을 도입하여 이들 각각의 목표를 간단한 형태의 membership 함수로 나타냄으로써, Fuzzy계획법에 대한 일반적인 해법을 구하고자 한다.

* KAIST 경제분석연구실

Ⅱ. Fuzzy목표계획법의 이론적 배경

2.1 Fuzzy집합과 Membership 함수

(정의 1) 객체 x의 집합을 X라 할 때, X에대한 fuzzy부분집합 A는

$$A=\{(x, \mu(x)) : x \in X\}$$

이다. 여기서 $\mu(x)$는 membership함수 또는 적합도 함수라 하며, 이 함수는 집합 X와 membership 집합 M을 대응시켜 준다. 이 membership의 범위는 비음의 실수부분집합이며 그 상한은 제한이 없다.

(Fuzzy 연산) 일반적인 논리연산과 유사하게 Zadeh[1, 9]는 fuzzy집합간의 합연산과 곱연산을 다음과 같이 정의하였다.

- 합연산 : fuzzy집합 A와 B의 합집합 $A \cup B$는

$$A \cup B=\{(x, \mu_{A \cup B}(x)) : x \in X\}$$
$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$
$$= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \qquad \vee : \text{합연산 기호}$$

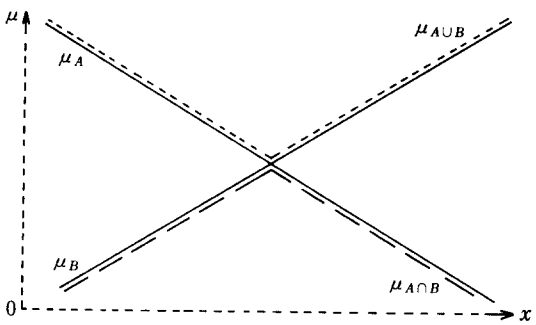
와 같이 나타난다.

- 곱연산 : fuzzy집합 A와 B의 곱집합 $A \cap B$는

$$A \cap B=\{(x, \mu_{A \cap B}(x)) : x \in X\}$$
$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$
$$= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \qquad \wedge : \text{곱연산 기호}$$

와 같이 나타난다.

이 두 연산을 그림으로 나타내면 〈그림 2-1〉 과 같다.



〈그림 2-1〉
Fuzzy합집합과 곱집합의 membership함수

2.2 Fuzzy목표, 제약식 및 의사결정

X를 선택가능한 점들의 집합이라 하자. 그러면 fuzzy 목표 G는 집합 X의 fuzzy 부분집합으로 정의된다. 예를들면 "변수 X의 값은 특정의 값 a에 가까울수록 좋다"라는 fuzzy목표는 R의 fuzzy부분집합으로 표현되는데, 그 membership 함수는

$$\mu(x)=(1+(x-a)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$(G=\{(x, \mu(x)) : x \in X\})$$

과 같이 표현될 수 있다.

또한 FP에서는 fuzzy제약식도 fuzzy목표로 취급하기 때문에 같은 방법으로 나타낼 수 있다.

Fuzzy의사결정은 fuzzy목표와 fuzzy제약식의 fuzzy곱집합으로 나타난다. 즉 주어진 fuzzy 목표의 집합 G와 fuzzy제약식의 집합 C가 있을때 의사 결정집합 D는 $G \cap C$로 나타나며 이때의 membership 함수 μ_D는 $\mu_{G \cap C}(=\min\{\mu_G, \mu_C\})$가 된다. 또한 목표가 여러개이고 제약식이 여러개인 경우에도 같은 방법으로 정의된다. 즉,

$$D=\{(x, \mu_D(x)) : x \in X\} \qquad \text{목표의 수} : k$$
$$\mu_D(x)=\min(\mu_{G_1}(x) \cdots \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x) \cdots \mu_{C_m}(x))$$
$$\text{제약식의수} : m$$

와 같이 나타낼 수가 있다.

2.3 Fuzzy계획법 (Fuzzy Programming ; FP)

Fuzzy계획법은 fuzzy집합이론을 이용하는 다목적 계획법이다. 즉, 목표계획법에 있어서 각 목표의 값 자체를 최적화하는 것이 아니라, 목표의 값 또는 제약식의 만족도에 따른 의사결정자의 가치를 최적화하는 접근방법이다. 이러한 개념은 불확실한 상황에서의 의사결정에 매우 필요한 개념이다. Fuzzy계획법의 개념적인 형태는 다음과 같다. [10]

(P1) Find the optimal decision D

$$\text{s. t.} \quad Ax \cong b$$
$$x \geqq 0$$

plus absolute constraints

여기에서 (Ax)는 x값이 변함에 따라 각 목표들이 취하는 값들을 나타내며, b는 각 목표들에 대한 의사결정자의 기대수준을 나타낸다. '~'는 fuzzifier로서 목표 또는 제약식의 불명확성을 나타낸다. 따라서 '~'로 표현되어 있는 목표에 대한 의사결정자의 불명확성을 제거하기 위해서, x값에 따른 (Ax)값에 대한 만족도를 membership 함수로 나타냄으로써 (P1)은 수리적 모델로 표현될 수 있다.

$$(P2)\ \underset{X \geq 0}{\mathrm{Max}}[\mu_b(X) = \min(\mu_i(X)] \quad , \ i=1,\cdots,k$$

$$\text{where } \mu_i(X) = \begin{cases} 1 & , \ if\,(AX)_i = b_i \\ f((AX)_i, b_i), & if\,(AX)_i \neq b_i \end{cases}$$

$$0 \leq f((AX)_i,\ b_i) < 1$$

물론 이와같은 membership함수를 구하는 것이 쉬운 일은 아니지만, 다른 다목적계획법들의 경우 각 목적 또는 목표들에 대한 중요정도(가중치, 우선순위등)들을 고려해야 하는데 비해, Fuzzy 계획법은 각각의 목적들에 대해 최소허용수준(lowest acceptable level of achievement)과 성취희망수준(aspired level of achievement)만 정하면 되므로〔7〕 여타의 방법들 보다 활용하기가 쉬운 실용적인 개념이라 할 수 있다.

Ⅲ. 목표분할개념과 Fuzzy계획법의 해법 고찰

3.1 선형 membership함수를 가진 FP의 해법

선형 membership함수를 가지는 FP의 해법으로서 다음의 3가지를 고찰한다.

3.1.1 Zimmermann의 모델

Zimmermann은 간단한 선형 membership 함수를 가지는 FP에 대해서 이를 LP로 변환시켜 그 최적해를 구할 수 있음을 보였다.〔10〕

$$(P3)\ \mathrm{Min}\ z = cx$$

$$s.t. \quad AX \leq b_o$$

$$X \geq 0$$

여기서 z는 fuzzy목적이고 $AX \leq b$는 fuzzy 제약식이다. FP에서 fuzzy제약식과 목표는 동일하게 처리하므로 (P3)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(P4) Maximize the membership of fuzzy decision set

$$s.t. \quad Bx \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$B = \begin{bmatrix} c \\ A \end{bmatrix} \text{ and } b \quad \begin{bmatrix} Z \\ b_o \end{bmatrix}$$

z는 목표벡터 z에 대한 기대, ,·준이고, b_o는 fuzzy제약식에 대한 기대수준이다. 그리고 간단한 형태의 membership함수를 가정하였으므로 membership함수 $\mu(x)$는 다음과 같이 나타낼 수가 있다. 즉,

$\mu_i(x) = 0$, if i번째 목표 또는 제약식이전혀 만족되지 않으면 $i.e.$,

$$(Bx)_i > b_i + d_i$$

$$0 < \mu_i(x) < 1, \ if\ b_i < (Bx)_i \leq b_i + d_i$$

$$\mu_i(x) = 1, \ if\ (Bx)_i \leq b_i$$

여기서 i는 B 또는 b의 i번째 행을 나타내고, B는 A에 목적함수의 행들이 추가된 행렬이며 b는 b_o에 목표의 기대수준이 추가된 벡터이다. 또한 d_i는 i번째 목표의 수용 가능한 편차의 최대치를 나타낸다.

FP의 목적은 의사결정집합의 membership을 최대화시키는 것이며, 그 의사결정집합은 fuzzy 목표집합과 fuzzy제약식의 곱집합으로 표현되므로 (P4)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(P5)\ \mathrm{Max} \quad \mu(x) = \min \mu_i(x) \quad , i=1,\cdots,k$$

$$\text{Where } \mu_i(x) = \begin{cases} 1 & , if\,(Bx)_i \leq b_i \\ 1 - \dfrac{(Bx)_i - b_i}{d_i} & , if\ b_i < (Bx)_i \leq b_i + d_i \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

그리고 (P5)는 다음과 같은 LP (P6)와 동일한 해를 갖는다.

$$(P6)\ \mathrm{Max} \quad \lambda$$

$$s.t. \quad \lambda \leq 1 - \frac{(Bx)_i - b_i}{d_i}$$

$$x \geq 0$$

FP가 간단한 membership함수만을 가지고 있을 때에는 (P6)에 대한 최적해를 구함으로써, 원래의 FP에 대한 최적해를 얻을 수 있다.

3.1.2 삼각형태의 membership함수를 가진 FP의 해법(Narasimhan의 모델〔8〕)

$(Ax)_i$를 목표값이라 하고 b_i를 목표의 기대수준, 그리고 d_i를 최대수용가능 편차라 할때 삼각 형태의 membership함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & , if\,(Ax)_i = b_i \\ 1 - \dfrac{b_i - (Ax)_i}{d_i} & , if\ b_i - d_i \leq (Ax) < b_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{d_i} & , if\ b_i < (Ax)_i \leq b_i + d_i \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

이는 i번째 목표가 그 바람직한 기대수준 b_i와 같을 경우에만 그 membership이 1이 됨을 나타낸다. (식전개의 편리를 위하여 좌우대칭의 members-

hip함수를 가정하였다)

Narasimhan은 이러한 membership함수를 가지는 FP의 최적해는 각각의 membership함수의 기대수준을 중심으로 목표값의 영역을 둘로 나눈후, 이들 부분문제의 최적해를 각각 구한후(목표가 k개일때 부분문제는 2^k개가 된다), 그 중에서 가장 최선의 해를 구하는 해법을 제시하였다. i번째 목표를 기준으로 볼때, 다음의 (P7), (P8)과 같은 형태의 부분문제에서 얻어지는 2^k개의 최적해중에서 원문제의 최적해를 구할수 있다는 것이다.

$$\text{(P7)}\quad \text{Max min}\ \ 1-\frac{b_i-(Ax)_i}{d_i},\ \text{for } i=1,\cdots,k$$

$$\text{s.t.}\quad b_i-d_i \leqq (Ax)_i \leqq b_i$$

$$x \geqq 0$$

$$\text{(P8)}\quad \text{Max min}\ \ 1-\frac{(Ax)_i-b_i}{d_i},\ \text{for } i=1,\cdots,k$$

$$\text{s.t.}\quad b_i \leqq (Ax)_i \leqq b_i+d_i$$

$$x \geqq 0$$

이러한 방법에 의해 최적해를 구하고자 할때, 삼각 형태의 membership함수가 k개 있다면 다음과 같은 각각 $3k$개의 제약식을 갖는 2^k개의 LP 문제들의 해를 구하여야 한다.

$$\text{Max}\quad \lambda$$

$$\text{s.t.}\quad \lambda \leqq 1-\frac{b_i-(Ax)_i}{d_i},\ i=1,\cdots,k$$

$$b_i-d_i \leqq (Ax)_i \leqq b_i,\ i=1,\cdots,k$$

$$x \geqq 0$$

3.1.3삼각형태의 membership함수를 가지는 FP의 해법(Hannan의 모델[4])

Hannan은 3.1.2에 언급된 삼각 형태의 membership함수를 가지는 FP의 최적해를 $2k$개의 제약식을 갖는 오직 하나의 LP문제만 풀이함으로써 구할 수 있음을 보여주었다. 이는 Narasimhan의 모델보다 매우 간단한 해법이며, Hannan은 이 해법을 다음의 정리로 제시하고 있다.[4]

(정리) $\lambda^*=\text{Max}\ \lambda_j$라 하자. 여기서 λ_j는 Narasimhan에 의해 제시된 부분문제중 j번째 문제의 최적해이다. 즉, λ^*는 2^k개의 부분문제 최적해 중에서 선택된 원문제의 최적 의사결정 membership이다. 그리고 λ^o를 아래문제의 최적해의 목적함수값이라 하자.

$$\text{(P9)}\quad \text{Max}\quad \lambda$$

$$\text{s.t.}\quad \frac{(Ax)_i}{d_i}+n_i-p_i=\frac{b_i}{d_i},\ i=1,\cdots,k$$

$$\lambda+n_i+p_i \leqq 1$$

$$x_j \geqq 0\quad ,\ j=1,\cdots,n$$

$$n_i,\ p_i \geqq 0\quad ,\ i=1,\cdots,k$$

그러면 $\lambda^*=\lambda^o$이다.

〈증명〉[4] 참조

문제 (P9)에서 λ는 음의 값을 가질 수도 있으나, $\lambda<0$인 경우에는 제약식 $b_i-d_i \leqq (Ax)_i \leqq b_i+d_i$ $(i=1,\cdots,k)$가 만족되지 못하는 것을 나타내므로, $\lambda \geqq 0$의 제약식을 추가하여도 그 해는 변하지 않는다. 이 결과는 Narasimhan의 모델과 비교하여 볼때, 매우 효율적임을 보여준다.

3.2목표분할을 이용한 FP의 해법(LP화)

3.2.1목표분할

FP에 있어서, 각 목표 또는 제약식이 복잡한 형태의 membership을 가질 때, 이는 FP의 실제적용에 커다란 장애요인이 된다. membership함수가 간단한 선형함수가 아니고 piecewise 선형이거나 비선형일때, 이 FP에는 Zimmermann의 모델을 적용시킬 수 없으므로 그 해를 구할 수 없게 된다. 그러나 이들 복잡한 형태의 membership 함수를 어떠한 방법으로든 간단한 선형함수로 나타낼 수 있다면 그 해는 쉽게 구할 수 있게 된다.(앞에서 언급된 Narasimhan의 연구도 이러한 시각에서 비롯된 것이다)

본 연구에서는 이를 위해 목표분할개념을 이용하고자 한다. 목표분할이란 fuzzy 집합이론에서 복잡한 membership함수를 간단한 membership함수의 합연산 혹은 곱연산으로 나타낼 수 있는 것을 이용하여, 하나의 목표를 간단한 형태의 membership함수를 갖는 몇 개의 목표로 나누어 생각하는 것이다. 즉, fuzzy목표나 제약식은 그 각각이 fuzzy집합으로 나타내어 지므로, fuzzy 연산을 이용하여 쉽게 몇 개의 목표 또는 제약식으로 나누어 볼 수 있는 것이다. 또 의사결정집합 D는 각 목표와 제약식집합의 fuzzy곱연산으로 나타나므로 특정의 목표 또는 제약식이 몇개의 목표 또는 제약식으로 나누어진다 하여도 의사결정집합 D는 변하지 않는다.

이하 각 절에서는 이를 이용하여 복잡한 membership함수를 가지는 FP의 LP화를 정리하고 기존의 방법과 비교하여 본다.

3.2.2 Piecewise Concave membership 함수를 갖는 FP의 해법

$$
\text{(P10)}\quad \underset{x \geq 0}{\text{Max min}}\ \mu_i(x) \qquad , i=1,\cdots,k
$$

$$
\text{s.t.}\quad \mu_i(x) = \begin{cases} 1 & , if\,(Ax)_i = b_i \\ 1 - \dfrac{b_i - (Ax)_i}{d_i} & , if\, b_i - d_i \leq (Ax)_i < b_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{d_i} & , if\, b_i < (Ax) \leq b_i + d_i \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}
$$

Piecewise concave 함수의 예로서 〈그림 3-1〉과 같은 좌우대칭 삼각 형태의 함수를 가정하자. 이러한 membership함수를 가지는 FP에 목표분할기법을 적용하여 각 목표를 다음과 같은 membership 함수를 같은 두개의 목표로 나누어 나타냄으로서 그 최적해를 구할 수 있다. 즉, $\bar{\mu}_i(x)$와 $\hat{\mu}_i(x)$를

$$
\bar{\mu}_i(x) = \begin{cases} 1 & , if\,(Ax)_i \geq b_i \\ 1 - \dfrac{b_i - (Ax)_i}{d_i} & , if\, b_i - d_i \leq (Ax)_i < b_i \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}
$$

$$
\hat{\mu}_i(x) = \begin{cases} 1 & , if\,(Ax)_i \leq b_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{d_i} & , if\, b_i < (Ax)_i \leq b_i + d_i \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}
$$

와 같이 정의하면, $\mu_i(x)$는

$$
\mu_i(x) = \min(\bar{\mu}_i(x),\ \hat{\mu}_i(x))
$$

로 나타나게되며, $\bar{\mu}_i(x)$와 $\hat{\mu}_i(x)$는 모두 선형 membership함수이므로 문제 (P10)은 간단한 membership함수를 가진 FP로 전환될 수 있으며 이는 곧 Zimmermann의 모델을 통해서 LP문제 (P11)화된다.[10]

$$
\text{(P11)}\quad \underset{x \geq 0}{\text{Max}}\quad \lambda
$$

$$
\text{s.t.}\quad \lambda \leq 1 - f(x)
$$

$$
\lambda,\ x \geq 0
$$

where :

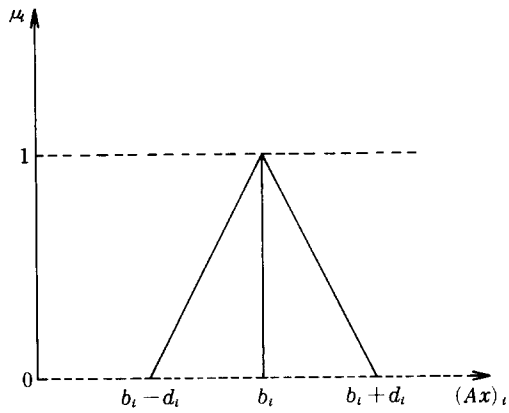
$$
f(x) = \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} \text{ or } \frac{b_i - (Ax)_i}{d_i}
$$

(P11)은 $2k$개의 제약식과 $n+1$개의 변수를 가지는 LP문제인데, 이는 Hannan의 모델이 제시하는 $2k$개의 제약식과 $n+2k+1$개의 변수를 가진 LP문제 보다 간단하다.

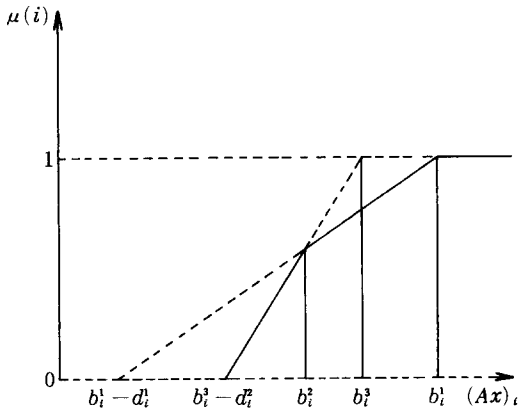
(P10)에 적용된 목표분할개념은 모든 piecewise concave membership함수에 적용이 가능하다. 즉, 〈그림 3-2〉에 나타난 바와 같이

$$
\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & , if\,(Ax)_i \geq b_i^1 \\ 1 - \dfrac{b_i^1 - (Ax)_i}{d_i^1} & , if\, b_i^2 \leq (Ax)_i < b_i^1 \\ 1 - \dfrac{b_i^3 - (Ax)_i}{d_i^2} & , if\, b_i^3 - d_i^2 \leq (Ax)_i < b_i^2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}
$$

일 때에



〈그림 3-1〉 triangular membership함수



〈그림 3-2〉 piecewise concave membership함수

$$\bar{\mu}_i(x)=\begin{cases}1 & , if\ (Ax)_i \geqq b_i^1 \\ 1-\dfrac{b_i^1-(Ax)_i}{d_i^1} & , if\ b_i^1-d_i^1 \leqq (Ax)_i < b_i^1 \\ 0 & , \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\hat{\mu}_i(x)=\begin{cases}1 & , if\ (Ax)_i \geqq b_i^3 \\ 1-\dfrac{b_i^3-(Ax)_i}{d_i^2} & , if\ b_i^3-d_i^2 \leqq (Ax)_i < b_i^3 \\ 0 & , \text{otherwise}\end{cases}$$

라 하면

$$\mu_i(x)=\min(\bar{\mu}_i(x),\ \hat{\mu}_i(x))$$

로 나타낼 수 있는 것이다.

3.2.3 Piecewise convex membership함수를 가진 FP의 해법

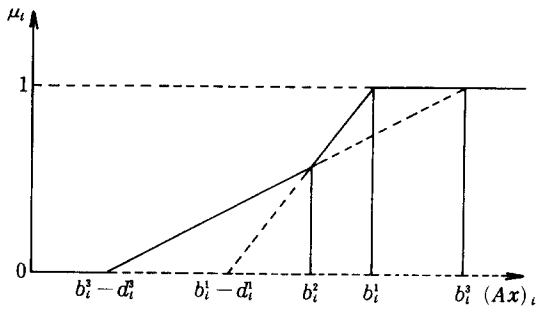
Piecewise concave형태의 membership함수를 가지는 fuzzy목표는 선형 membership 함수를 가지는 목표의 fuzzy곱연산으로 나타내어지지만 piecewise convex의 경우에는 목표분할기법을 적용한다고 하더라도 간단한 목표집합의 합연산으로 나타나기 때문에 LP화 할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 0-1 정수변수를 추가시킨 혼합정수계획법(Mixed Integer Programming; MIP) 문제로 변환시켜 그 해를 구하고자 한다. [6] 즉, 〈그림 3-3〉에 나타나 있는 것과 같이 $\mu_i(x)$가

$$\mu_i(x)=\begin{cases}1 & , if\ (Ax)_i \geqq b_i^1 \\ 1-\dfrac{b_i^1-(Ax)_i}{d_i^1} & , if\ b_i^2 \leqq (Ax)_i < b_i^1 \\ 1-\dfrac{b_i^3-(Ax)_i}{d_i^2} & , if\ b_i^3-d_i^2 \leqq (Ax)_i < b_i^2 \\ 0 & , \text{otherwise}\end{cases}$$

일때에 $\bar{\mu}_i(x)$, $\hat{\mu}_i(x)$를

$$\bar{\mu}_i(x)=\begin{cases}1 & , if\ (Ax)_i \geqq b_i^1 \\ 1-\dfrac{b_i^1-(Ax)_i}{d_i^1} & , if\ b_i^1-d_i^1 \leqq (Ax)_i < b_i^1 \\ 0 & , \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\hat{\mu}_i(x)=\begin{cases}1 & , if\ (Ax)_i \geqq b_i^3 \\ 1-\dfrac{b_i^3-(Ax)_i}{d_i^2} & , if\ b_i^3 > (Ax)_i \geqq b_i^3-d_i^2 \\ 0 & , \text{otherwise}\end{cases}$$



〈그림 3-3〉 piecewise convex membership함수

라 정의하면 $\mu_i(x)$는 $\mu_i(x)=\max(\bar{\mu}_i(x), \hat{\mu}_i(x))$로 나타내어진다. 따라서 원 FP는

$$\underset{x\geqq 0}{\text{Max}}\ \min_i \mu_i(x) \quad , \quad i=1,\cdots,k$$

$$\text{where } \mu_i(x)=\max(\bar{\mu}_i(x),\ \hat{\mu}_i(x))$$

로 나타내어지며, 이는 곧 다음과 같은 MIP 문제로 변환된다.

(P13) Max λ

$$\text{s.t.}\quad \lambda \leqq 1-\frac{b_i-(Ax)_i}{d_i^1}+M(1-\delta_i)$$

$$\lambda \leqq 1-\frac{b_i^3-(Ax)_i}{d_i^2}+M\delta_i$$

$$\lambda, x \geqq 0 \quad \delta_i=0 \text{ or } 1 \quad M\text{:매우 큰숫자}$$

(P13)에서 보는 바와 같이, 〈그림 3-3〉과 같은 piecewise convex membership함수가 k개 존재할때, 이 FP는 $2k$개의 제약식을 가지고, k개의 0-1 정수변수와 하나의 실수변수가 추가되는 LP로 표현되어 질 수 있음을 알 수 있다.

3.2.4 비선형 membership함수를 포함하는 FP의 해법

Membership함수가 비선형일 때에는, 이를 적당한 선형함수로 근사(approximate)시킴으로써 그 접근이 가능해진다. 적당한 오차의 한계내에서 비선형 함수를 선형함수로 근사시키게 되면 piecewise선형 함수로 나타나게 되고, 이는 곧 3 2 2와 3 2 3에 언급된 바와 같이 간단한 선형membership 함수를 갖는 fuzzy집합의 연산으로 표현된다. 특히 실제상황에서의 membership함수는 단조증가 혹은 단조감소하며, 그 상한이 1로 주어지기 때문에 작은 오차의 한계내에서 비선형membership함수를 갖는 FP의 해를 구할 수 있는 것이다.

3.3 기존 해법과의 비교

FP의 해법으로서 목표분할개념을 도입하게 되면, 간단한 선형 membership함수를 갖는 문제에서 piecewise함수를 갖는 문제에 이르기까지, 해를 구할 수 있으므로 그 적용 범위는 기존의 어느 방법보다 넓다. 또한 결과적으로 나타나는 LP 문제의 크기에 있어서도 보다 효율적이다. 이를 3.1에 언급된 삼각형태의 membership함수를 갖는 FP의 경우에 대해서 비교하면 〈표 3-1〉과 같다.

(목표의 수는 k개, 변수의 수는 n개인 경우)

	문제의 수	제약식의 수	변수의 수
Narasimhan의 모델	2^k	$3k$	$n+1$
Hannan의 모델	1	$2k$	$n+2k+1$
목표분할을 이용할 때	1	$2k$	$n+1$

〈표 3-1〉 Membership함수가 삼각형태인 경우의 각 모델의 비교

위 표에 나타난 바와같이 목표분할개념을 이용하면, 원 문제에 비해서 새로이 추가되는 변수가 하나뿐이므로 $2k+1$개가 추가되는 Hannan의 모델보다 효율적으로 최적해를 구할 수 있다.

Ⅳ. 결 론

최근 불확실한 환경하에서의 의사결정에 대한 높은 관심과 fuzzy 집합이론의 지속적인 발전은 의사결정과정의 불명확성을 해결하려고 하는 Fuzzy 계획법(FP)의 발전을 가속화하여 오고 있다. Fuzzy계획법은 fuzzy집합이론을 바탕으로 하는 접근방법이며, 여타의 multiobjective 모델과는 달리 fuzzy membership함수를 사용함으로써, 각 목표가 취하는 값 자체를 최적화시키는 것이 아니고, 각 목표에 대한 의사결정자의 가치를 계량화하여, 최적의 사결정에 사용하고 있다.

FP의 해법은 각 FP문제를 LP문제화시키는 데에 그 기초를 두고 있는데, FP의 개념 자체가 각 목표값에 대한 membership 함수들의 최소성취 수준을 극대화시켜 가는 것이기 때문에 각 membership들이 선형함수로 나타날 경우, 하나의 매개(dummy 변수를 추가시켜서 원래의 FP문제를 쉽게 LP 문제로 변환시킬 수 있다. 그러나 FP의 membership 함수들이 보다 복잡한 piecewise선형함수로 나타날 때, 그러한 FP에 대한 기존의 연구가 부족하다. 또 실제의 의사결정과정에서 나타날 수 있는 membership함수들이 대부분 비선형함수로 나타나기 때문에, 이를 piecewise선형함수로 근사시키면 보다 나은 해를 구할 수 있게 되므로 다양한 형태의 membership함수를 갖는 FP에 대한 연구가 필요하게 된다. 본 연구에서는 fuzzy집합이론의 곱연산에 기초를 둔 목표분할 개념을 FP의 해법에 응용함으로써 piecewise선형함수를 간단한 선형함수로 쪼개어 나타낼 수 있음을 보여 주었다. 또 목표분할 개념을 FP의 LP변환에 이용하여 얻어지는 LP문제는 그 크기면에서 기존모델의 결과들보다 작아서 보다 효율적인 방법임을 보여주고 있다.

따라서 본 연구는 복잡한 형태의 membership 함수를 가지는 FP문제에 대한 해를 쉽게 구할 수 있게 하여, FP기법의 실제 응용이 보다 넓은 범위로까지 이루어 질 수 있도록 하였다. 앞으로 이 분야에 대한 연구로는 membership함수가 convex인 경우에도 간단하게 해결할 수 있는 해법연구가 계속 요망되고 있다.

REFERENCES

[1] R. E. Bellman and L. A. Zadeh, "Decision-Making in a Fuzzy Environment", *Management Science*, Vol. 17, No. 4, December, 1970, pp. B141-164.

[2] E. L. Hannan, "Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals," *Fuzzy Sets & Systems*, Vol. 6, 1981, pp. 235-246.

[3] E. L. Hannan, "Contrasting Fuzzy Goal Programming and 'Fuzzy' Multicriteria Programming", *Decision Sciences*, Vol. 13, 1982, pp. 337-339.

[4] E. L. Hannan, "On Fuzzy Goal Programming", *Decision Sciences*, Vol. 12, 1981, pp. 522-531.

[5] J. P. Ignizio, "Notes and Communications on the discovery of Fuzzy Goal Programming", *Decision Sciences*, Vol. 13, 1982, pp. 331-336.

[6] J. P. Ignizio and S. C. Daniels, "Fuzzy Multicriteria Integer Programming via Fuzzy Generalized Networks", *Fuzzy Sets & Systems*. Vol. 10, 1983, pp. 261-270.

〔7〕 J. P. Ignizio, Linear Programming in Single & Multiple Objetive Systems, Prentice-hall, 1982.

〔8〕 Ram Narasimhan, "Goal Programming in a Fuzzy Environment", *Decision Sciences*, Vol. 11, 1980, pp. 325 – 326.

〔9〕 L. A. Zadeh, "Fuzzy Set Theory – A Perspective", Fuzzy Automata & Decision Processes ses, North-Holl and. New York, 1977.

〔10〕 H. J. Zimmermann, "Fuzzy Programming and LP with Several Objective Functions", *Fuzzy Sets & Systems*. Vol. 1, 1978, pp. 45 – 55.