

非對稱 兩端固定 拋物線 아치의 自由振動에 관한 研究

Free vibration analysis of unsymmetric parabolic arches with fixed ends

李 炳 求*
Lee, Byoung Koo

Summary

The governing differential equations and the boundary conditions for the free vibration of the unsymmetric parabolic arch with fixed ends are derived on the basis of the equilibrium equations and the D'Alembert principle. The effect of the rotary inertia as well as the extensional and the flexural deformations is considered in the governing differential equations.

A trial eigenvalue method is used for determining the natural frequencies. The Runge-Kutta method is used in this method to perform the integration of the differential equations.

The detailed studies are made of the lowest three vibration frequencies for the parabolic chord length equal to 10m. The effect of the rotary inertia is analyzed and its numerical data are presented in table. And as the numerical results the frequency versus the rise of arch and the radius of gyration are presented in figures.

I. 序 論

아치는 構造的으로 매우 理想的일 뿐만 아니라 그 美的인 感覺때문에 옛부터 橋梁等 各種 構造物에 많이 利用되고 있다.²⁾ 아치構造를 橋梁과 같이 動荷重이 作用하는 構造物에 利用하는 境遇에는 振動이 아치의 舉動에 미치는 影響이 相當히 크기 때문에 아치構造의 振動에 대한 綜合的인 檢討가 必須的으로 要請되고 있다.¹²⁾ 특히 構造物의 固有한 特性中에 하나인 自由振動을 完全히 解析하는 것은

振動의 諸問題中에서도 가장 먼저 先行되어야 할 研究課題이다.

아치의 自由振動解析에 관한 研究들은 많은 文獻^{3), 6), 11)}들에서 찾아볼 수 있지만 大部分이 아치頂을 基準으로 左右對稱인 아치를 研究의 對象으로 하고 있다. 그러나 아치를 橋梁等과 같이 實際 構造物에 適用하는 境遇에 左右 支點의 標高가 同一하지 않은 非對稱 아치들이 相當한 部分을 차지하고 있는 實情이다.

이러한 觀點에서 本 研究는 非對稱 아치의 自由振動 特性을 把握하므로써 아치의 振動에 대한 理論을 擴張하고, 나아가서 實際로 아치 構造物의 設計時에 正確한 自由振動 特性을 考慮하도록 하는데

* 圓光大學校 工科大學

에 本研究의 目的이 있다.

本 研究에서 使用한 基本假定은 다음과 같다.

- (1) 아치의 圓心軸은 拋物線이며, 아치頂을 基準으로 非對稱이다.
- (2) 아치의 斷面積은 一定하다.
- (3) 自由振動的 解析에서 減衰效果는 考慮하지 않는다.
- (4) 아치의 應力解析은 彈性理論을 따른다.
- (5) 아치의 斷面은 變形을 일으킨 後에도 平面을 維持한다.

II. 基本理論

1. 合應力

아치가 自由振動하게 되면 아치軸上的 任意點 S_0 의 位置는 一定한 週期를 갖고 變化한다. 이때 Fig.1에서 처럼 S_0 의 接線方向의 最大變位 즉 接線方向의 振幅을 v , 曲率中心方向의 最大變位 즉 曲率中心方向의 振幅을 w 라 한다. S_0 點에서 아치軸의 微小增分 ds 距離의 點을 S_1 이라 하면 이 點의 變位는 $v+dv$, $w+dw$ 가 된다.

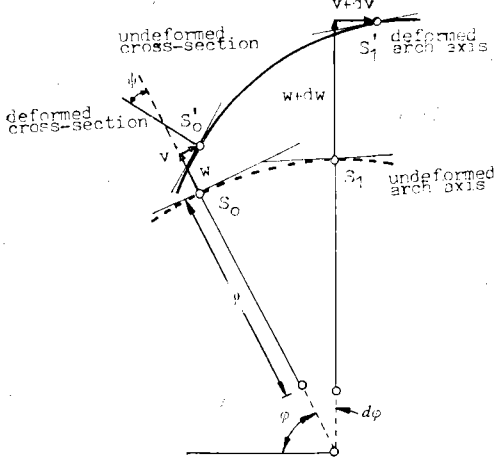


Fig. 1. Geometric quantities of an arch

아치軸의 任意點 S_0 가 變位를 일으키면 이 斷面에 是 變位로 인한 合應力이 發生하게 된다. 本 研究에서는 아치의 面內振動만을 考慮하기 때문에 이 斷面에는 軸方向力 N , 剪斷力 V 및 彎모멘트 M 이 發生하며 N 및 M 은 다음 式과 같이 表示된다.⁹⁾

$$N = \frac{EA}{\rho} \left[\left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \left(\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w \right) \right] \quad (1)$$

$$M = -\frac{EA r^2}{\rho^2} \left(\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w \right) \quad (2)$$

(1), (2)式에서 E 는 彈性係數, A 는 斷面積, r 은 斷面의 回轉半徑, ρ 는 曲率半徑, φ 는 曲率中心方向과 水平軸이 이루는 radian으로 表示되는 角度이다.

또한 아치軸이 變形을 일으키게 되면 아치斷面은 回轉을 發生시키며 이 回轉角 Ψ 는 다음과 같이 表示된다.¹⁰⁾

$$\Psi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \quad (3)$$

2. D'Alembert의 慣性力

아치의 自由振動은 다음 式들과 같이 調和振動을 한다고 假定한다.¹¹⁾

$$w(\varphi, t) = w \sin \omega t \quad (4)$$

$$\bar{v}(\varphi, t) = v \sin \omega t \quad (5)$$

$$\Psi(\varphi, t) = \Psi \sin \omega t \quad (6)$$

上記式들에서 $\bar{w}(\varphi, t)$, $\bar{v}(\varphi, t)$, $\Psi(\varphi, t)$ 는 任意時間 t 일때 水平軸과 φ 角度를 갖고 있는 아치軸 S_0 點의 曲率中心方向의 變位, 接線方向의 變位, 斷面의 回轉角을 各各 나타낸다. w , v 및 Ψ 는 이들의 調和振動式에 對應하는 自由振動的 振幅을 나타내는 基準函數이며 φ 만의 함수이다. 또한 ω 는 rad/sec로 表示되는 固有角振動數이다.

아치가 振動하게 되면 $\bar{w}(\varphi, t)$ 와 $\bar{v}(\varphi, t)$ 는 時間 t 에 따라서 直線運動을 하며, $\Psi(\varphi, t)$ 는 回轉運動을 하게 된다. 따라서 質量을 갖는 아치의 微小要素에는 直線運動 $\bar{w}(\varphi, t)$ 와 $\bar{v}(\varphi, t)$ 에 의해서 D'Alembert의 移行慣性力이, 回轉運動 $\Psi(\varphi, t)$ 에 의해서는 D'Alembert의 回轉慣性偶力이 發生하게 된다.

$w(\varphi, t)$ 에 의한 曲率中心方向의 移行慣性力 $\bar{P}_r(\varphi, t)$ 는 다음과 같이 調和振動式으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{P}_r(\varphi, t) &= m \frac{\partial^2 \bar{w}(\varphi, t)}{\partial t^2} \\ &= -m\omega^2 w \sin \omega t \\ &= -P_r \sin \omega t \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式에서 調和振動式 $\bar{P}_r(\varphi, t)$ 의 振幅 \bar{P}_r 은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\bar{P}_r = m\omega^2 w \quad (8)$$

(8)式에서 m 은 아치軸의 單位길이當 質量이며, 따라서 P_r 도 單位길이當 移行慣性力이다.

마찬가지 方法으로 $\bar{v}(\varphi, t)$ 에 의한 接線方向의 移行慣性力 $\bar{P}_t(\varphi, t)$ 의 振幅 P_t 와 $\Psi(\varphi, t)$ 에 의한 回轉慣性偶力 $\bar{T}(\varphi, t)$ 의 振幅 T 를 求하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_t &= m\omega^2 v \\ T &= m\omega^2 \Psi \end{aligned} \quad (9)$$

$$= \frac{m\omega^2 r^2}{\rho} \left(\frac{dw}{d\varphi} - v \right) \quad (10)$$

上記式들에서 P_t 와 T 는 各各 單位길이當 移行慣性力과 回轉慣性偶力を 나타낸다.

3. 平衡方程式

孤의 길이 $ds = \rho d\varphi$ 를 갖는 Fig.2와 같은 아치 微小要素의 平衡을 생각한다. 아치가 振動하면 前述한 바와 같이 아치의 微小要素에는 變位에 의한 N , V , M 과 慣性에 의한 P_r , P_t , T 가 作用하게 된다. 이들 合應力과 慣性力에 대한 平衡方程式을 세우면 다음과 같다.

먼저 아치의 接線方向에 대한 힘의 和는 0이어야 한다.

$$\begin{aligned} \sum F = & (N+dN)\cos\frac{d\varphi}{2} - N\cos\frac{d\varphi}{2} \\ & + (V+dV)\sin\frac{d\varphi}{2} + V\sin\frac{d\varphi}{2} \\ & + \rho d\varphi P_t = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$d\varphi$ 는 微小角이므로 $\cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1$, $\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$ 를 (11)式에 代入하고 整理하면 다음과 같다. 이때 高次項 $dVd\varphi$ 는 無視한다.

$$\frac{dN}{d\varphi} + V + \rho P_t = 0 \quad (12)$$

마찬가지로 曲率中心方向의 힘에 대한 平衡方程式과 모멘트에 대한 平衡方程式을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{dV}{d\varphi} - N + \rho P_r = 0 \quad (13)$$

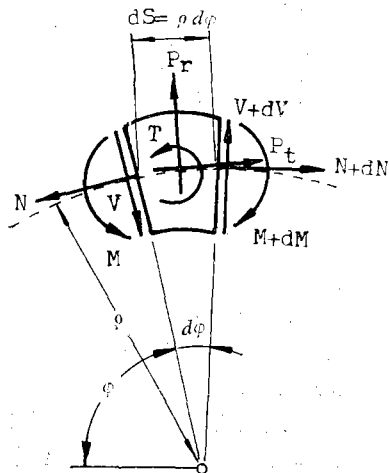


Fig. 2. Diagram of forces acting on an arch element

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\varphi} - V - T = 0 \quad (14)$$

Ⅲ. 微分方程式의 誘導

1. 變數變換

以上에서 언급한 基本理論을 Fig.3과 같이 拋物線의 弦의 길이 l , 높이 h , 아치의 支間길이 L 인 拋物線아치의 自由振動에 適用시킨다. 이때 아치軸의 方程式은 直交座標系(x, y)에서 다음과 같이 表示된다.

$$y = kx(x-l) \quad (15)$$

(15)式에서 k 는 다음과 같다.

$$k = -\frac{4h}{l^2} \quad (16)$$

Fig. 3에서 拋物線의 任意點 $S_0(x, y)$ 에서 曲率半徑을 ρ , 曲率中心方向과 水平軸이 이루는 角度를 φ 라 하면 이들은 다음과 같이 x 의 函數로 表示할 수 있다.

$$\rho = -\frac{\xi_1^{3/2}}{2k} \quad (17)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}[k(2x-l)] \quad (18)$$

(17)式에서 ξ_1 은 다음과 같다.

$$\xi_1 = 1 + k^2(2x-l)^2 \quad (19)$$

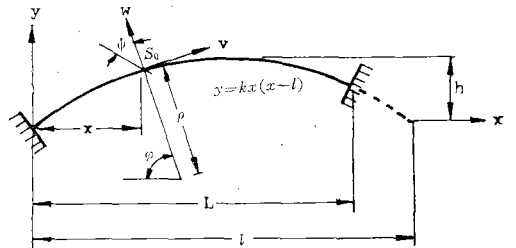


Fig. 3. Configuration of an unsymmetric parabolic arch with fixed ends

前章에서 φ 에 대한 基本理論의 微分方程式들을 x 에 대한 拋物線아치의 微分方程式들로 變數變換하기 위하여 (18)式을 微分하여 다음 式을 求한다.

$$d\varphi = -2k\xi_1^{-1}dx \quad (20)$$

(20)式을 利用하면 $\frac{dw}{d\varphi}$ 와 $\frac{d^2w}{d\varphi^2}$ 를 다음과 같이 x 의 微分으로 變換시킬 수 있다.

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k} w' \quad (21)$$

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dw}{d\varphi} \right)$$

$$= -\frac{\xi_1^2}{4k^2} w'' + \xi_1 \xi_2 w' \quad (22)$$

$$(21), (22) \text{式에서 } w' = \frac{dw(x)}{dx}, w'' = \frac{d^2w(x)}{dx^2} \text{를}$$

意味하며 즉 프라임(')은 基準函數의 x 에 대한 微分을 나타내며, 以後에도 同一한 意味를 갖는다.

또 (22)式에서 ξ_2 는 다음과 같다.

$$\xi_2 = 2x - l \quad (23)$$

위의 마찬가지로 方法으로 다음의 關係式들을 얻을 수 있다.

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k} v' \quad (24)$$

$$\frac{dN}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k} N' \quad (25)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k} M' \quad (26)$$

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2} = \frac{\xi_1^2}{4k^2} M'' + \xi_1 \xi_2 M' \quad (27)$$

$$\frac{dT}{d\varphi} = -\frac{\xi_1}{2k} T' \quad (28)$$

호의 (17), (20)式을 利用하면 $\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right)$ 을 x 의 函數로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -6k^2 \xi_1^{-3/2} \xi_2 \quad (29)$$

2. 微分方程式의 誘導

平衡方程式 (14)式을 剪斷力 V 에 대하여 整理하면 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\varphi} - T \quad (30)$$

(30)式에서 $\frac{dV}{d\varphi}$ 를 求하면 다음과 같다.

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d^2M}{d\varphi^2} + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{dM}{d\varphi} - \frac{dT}{d\varphi} \quad (31)$$

平衡方程式 (12)式에 (30)式을 代入하면 (32)式을 얻을 수 있고 平衡方程式 (13)式에 (31)式을 代入하면 (33)式을 얻을 수 있다.

$$\frac{dN}{d\varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\varphi} - RT + \rho P_i = 0 \quad (32)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2M}{d\varphi^2} + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{dM}{d\varphi} - R \frac{dT}{d\varphi} - N + \rho P_r = 0 \quad (33)$$

(32), (33)式에서 T 는 回轉慣性의 項이므로 微分方程式에 回轉慣性의 考慮與否를 나타내는 回轉慣性 指標 R 을 곱하였고 R 의 內容은 다음과 같다.

$$\text{回轉慣性을 考慮하는 境遇, } R=1. \quad (34)$$

$$\text{回轉慣性을 無視하는 境遇, } R=0. \quad (35)$$

(32), (33)式에 (17), (29)式 및 (25)~(28)式의 變數變換式들을 代入하면 φ 에 대한 微分方程式들을 (36), (37)式과 같이 x 에 대한 微分方程式들로 變換시킬 수 있다.

$$N' - 2k\xi_1^{-3/2}M' + 2Rk\xi_1^{-1}T + \xi_1^{1/2}P_i = 0 \quad (36)$$

$$M'' - 2k^2\xi_1^{-1}\xi_2M' - R\xi_1^{1/2}T' + 2k\xi_1^{-1/2}N + \xi_1P_r = 0 \quad (37)$$

(1)式의 N 式에 (17), (24), (22)式을 代入하면 x 의 函數로 表示된 N 을 求할 수 있고 이 N 式을 다시 x 에 대하여 微分하면 N' 式을 얻을 수 있다.

$$N = EA[\xi_1^{-1/2}v' - 2kr^2\xi_1^{-5/2}w'' - 8k^3r^2\xi_1^{-7/2}\xi_2w' - (2k\xi_1^{-3/2} + 8k^3r^2\xi_1^{-9/2})w] \quad (38)$$

$$N' = EA[\xi_1^{-1/2}v'' - 2k^2\xi_1^{-3/2}\xi_2v' - 2kr^2\xi_1^{-5/2}w''' + 12k^3r^2\xi_1^{-7/2}\xi_2w'' + (112k^5r^2\xi_1^{-9/2}\xi_2^2 - 8k^3r^2\xi_1^{-9/2} - 16k^3r^2\xi_1^{-7/2} - 2k\xi_1^{-3/2})w' + (144k^5r^2\xi_1^{-11/2}\xi_2 + 12k^3\xi_1^{-5/2}\xi_2)w] \quad (39)$$

마찬가지 方法으로 M' , M'' 및 T , T' 를 求하면 다음 式들과 같다.

$$M' = -EA r^2[\xi_1^{-1}w''' + (-32k^4\xi_1^{-3}\xi_2^2 + 4k^2\xi_1^{-3} + 8k^2\xi_1^{-2})w' - 48k^4\xi_1^{-4}\xi_2w] \quad (40)$$

$$M'' = -EA r^2[\xi_1^{-1}w'''' - 4k^2\xi_1^{-2}\xi_2w''' + (-32k^4\xi_1^{-3}\xi_2^2 + 4k^2\xi_1^{-3} + 8k^2\xi_1^{-2})w'' + (384k^6\xi_1^{-4}\xi_2^3 - 48k^4\xi_1^{-4}\xi_2 - 48k^4\xi_1^{-4} - 128k^4\xi_1^{-2}\xi_2)w' + (768k^6\xi_1^{-6}\xi_2^2 - 96k^4\xi_1^{-4})w] \quad (41)$$

$$T = m\omega^2 r^2(\xi_1^{-1/2}w' + 2k\xi_1^{-3/2}v) \quad (42)$$

$$T' = m\omega^2 r^2(\xi_1^{-1/2}w'' - 2k^2\xi_1^{-3/2}\xi_2w' + 2k\xi_1^{-3/2}v' - 12k^3\xi_1^{-5/2}\xi_2)v \quad (43)$$

以上에서 求한 (38)~(43)式 및 (8), (9)式을 (36), (37)式에 代入하고 整理하면 (44), (45)式을 얻을 수 있다.

$$v'' = -12k^3r^2\xi_1^{-3}\xi_2w'' + (2k\xi_1^{-1} - 48k^3r^2\xi_1^{-4}\xi_2^2 - 2RkF\xi_1^{-1})w' - (12k^3\xi_1^{-2}\xi_2 + 48k^3r^2\xi_1^{-6}\xi_2)w + 2k^2\xi_1^{-1}\xi_2v' - F(r^{-2} + k^2r^{-2}\xi_2^2 + 4Rk^2\xi_1^{-2})v \quad (44)$$

$$w'''' = 6k^2\xi_1^{-1}\xi_2w''' + (-16k^2\xi_1^{-2} + 24k^4\xi_1^{-2}\xi_2^2 - Rr^{-2}F - Rk^2r^{-2}F\xi_2^2)w'' + (2\zeta 6k^4\xi_1^{-2}\xi_2 - 240k^3\xi_1^{-3}\xi_2^2 + 2Rk^2r^{-2}F\xi_2)w' + (80k^4\xi_1^{-4} - 768k^6\xi_1^{-4}\xi_2^2 - 4k^2r^{-2}\xi_1^{-1} + r^{-4}F\xi_1^2)w + (2kr^{-2} - 2Rkr^{-2}F)v' + 12Rk^3r^{-2}F\xi_1^{-1}\xi_2v \quad (45)$$

(44), (45)式에서 F 는 다음 式으로 주어지는 無次元 振動數媒介變數이며, R 은 (34), (35)式에서 說明한

마와 같다.

$$F = \frac{m\omega^2 r^2}{EA} \quad (46)$$

以上에서 (44), (45)式이 拋物線아치의 自由振動을 支配하는 基準函數 v, w 에 대한 微分方程式이다.

3. 境界條件

$x=0$ 의 아치左端과 $x=L$ 의 아치右端은 固性되어 있으므로 그 境界條件은 다음과 같다.

$$v=0 \quad (47)$$

$$w=0 \quad (48)$$

$$\Psi=0 \quad (49)$$

(3)式에 (17), (21)式을 代入하면 Ψ 는 다음과 같이 表示된다.

$$\Psi = \xi_1^{-1/2} w' + 2k\xi_1^{-3/2} v \quad (50)$$

(49)式은 (50), (47)式에 의하여 다음과 같이 된다.

$$w'=0 \quad (51)$$

以上에서 (47), (48), (51)式이 아치 左端과 右端의 境界條件이다.

IV. 數值適用例

4. 數值解析方法

微分方程式의 數值積分法에는 많은 方法들이 있지만 本 研究에서는 다른 方法에 비하여 精度가 높은 Runge-Kutta method⁷⁾를 利用하여 數值積分하였다.

또한 微分方程式 (44), (45)式에는 不確定量 F 의 項이 포함되어 있으므로 이 F 의 값을 假定하여 微分方程式에 代入한 후에 數值積分을 施行한다.

Runge-Kutta method는 初期值問題이므로 아치 左端의 境界條件을 利用하여 數值積分을 始作하고, 앞에서 假定한 F 의 값이 自由振動의 固有值인지는 아치右端의 境界條件을 利用하여 判斷한다. 즉 아치의 左右端의 境界條件을 만족하는 自由振動의 固有值 F 값을 찾기 위하여 試行錯誤的 固有值問題를 利用한다. 以上과 같은 數值解析方法에 대해서는 參考文獻(5)에 자세히 說明되어 있다.

위와 같은 數值解析方法으로 無次元振動數媒介變數 F 의 값을 찾으려면, (46)式으로부터 固有振動數 f 는 다음과 같이 求할 수 있다.

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{EAF}{m}} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{EF}{d}} \end{aligned} \quad (52)$$

(52)式에서 d 는 $\frac{m}{A}$ 으로 아치材料의 單位體積當質量이다. 또한 實際의 數值適用例에서 아치材料의 機械的 性質은 $E=2.058 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, $d=7850 \text{N-sec}^2/\text{m}^4$ 을 使用하였다.

2. 本 研究와 SAP IV의 結果比較

本 研究에서 誘導한 微分方程式과 數值解析 方法을 檢證하기 위하여 本 研究의 數值解析 結果와 構造解析用 凡用 프로그램인 SAP IV⁸⁾의 數值解析 結果를 比較하였다. Table-1.은 兩端固定 非對稱 拋物線아치의 모델을 4개 選定하여 本 研究의 數值解析 結果와 SAP IV의 結果를 比較한 것이다.

Table-1.에서 보는 것처럼 두 方法의 數值結果는 아주 優秀하게 接近한 것을 알 수 있으며, 따라서 本 研究에서 誘導한 微分方程式과 數值解析 方法의 妥當性을 立證할 수 있다.

Table-1. Comparison of frequencies for this study and SAP IV ($l=10\text{m}$)

models of arch	mode	this study (f:cps)	SAP IV (f:cps)	Error (%)
$h=2\text{m}$	1	91.41	92.28	0.94
$L=8\text{m}$	2	102.16	103.10	0.91
$r=0.15\text{m}$	3	195.58	198.60	1.52
$h=2\text{m}$	1	46.25	46.64	0.84
$L=12\text{m}$	2	81.97	82.47	0.61
$r=0.2\text{m}$	3	106.40	107.10	0.65
$h=4\text{m}$	1	97.41	97.97	0.57
$L=8\text{m}$	2	145.03	147.80	1.87
$r=0.25\text{m}$	3	217.78	221.70	1.77
$h=4\text{m}$	1	36.53	35.98	1.53
$L=12\text{m}$	2	84.45	83.04	1.70
$r=0.3\text{m}$	3	103.64	103.40	0.23

3. 數值解析結果

Table-2.은 回轉慣性이 固有振動數에 미치는 影響을 分析하기 위하여 $R=0.$ 와 $R=1.$ 인 境遇에 대하여 固有振動數를 比較한 것이다. Table-2.에서 처럼 回轉慣性은 固有振動數를 減小시키는 效果를 갖고 있으나, 그 影響力은 매우 작은 것을 알 수 있다. 따라서 回轉慣性을 考慮하면 變位의 增加를 招來하여 固有振動數를 減小시키는 一般的인 構造理

Table-2. Effect of rotary inertia on frequencies($l=10m$)

models of arch	mode	frequencies(cps)		B-A A (%)
		R=0. (A)	R=1. (B)	
$h=2m$	1	91.84	91.41	-0.47
$L=8m$	2	102.51	102.16	-0.34
$r=0.15m$	3	197.25	195.58	-0.85
$h=2m$	1	46.41	46.25	-0.34
$L=12m$	2	82.27	81.97	-0.36
$r=0.2m$	3	107.14	106.40	-0.69
$h=4m$	1	98.17	97.41	-0.77
$L=8m$	2	145.69	145.03	-0.45
$r=0.25m$	3	219.67	217.78	-0.86

論을 本 研究에서도 그대로 示顯하고 있다.

Fig. 4.는 拋物線의 弦의 길이 l 과 아치의 支間길이 L 을 固定시켰을 때 固有振動數 f 와 아치의 높이 h 와의 關係를 그림으로 나타낸 것이다.

拋物線아치는 아치높이 h 가 0으로 收斂하게 되면 直線보로 收斂하게 되므로 Fig.4에서 $h=0$ 일 때 固有振動數는 $L=8m$ 인 兩端固定 直線보의 固有振動數와 같아야 한다. (53)式은 兩端固定 直線보의 固有角振動數⁹⁾를 나타내는 式이며 이 式에 보의 諸元 ($L=8m, r=0.2m$) 및 아치材料의 機械的 性質($E=2.058 \times 10^{11}N/m^2, d=7850N-sec^2/m^4$)을 代入하면 兩端固定 보의 固有角振動數를 計算할 수 있다.

$$\omega_n = \frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$= \frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 r}{L^2} \sqrt{\frac{E}{d}} \quad (53)$$

(53)式을 利用하여 第3 모드까지 固有角振動數 ω 를 計算하고 이에 의하여 固有振動數를 計算하면 다음과 같다.

$$\omega_1 = 355.3 \text{ rad/sec} : f_1 = 56.55 \text{ cps}$$

$$\omega_2 = 987.0 \text{ rad/sec} : f_2 = 157.09 \text{ cps}$$

$$\omega_3 = 1934.5 \text{ rad/sec} : f_3 = 307.89 \text{ cps}$$

以上에서 計算한 56.55cps, 157.09cps, 307.89cps는 Fig.4에서 $h=0$ 에서의 第1, 2, 3모드의 固有振動數와 正確하게 一致하는 것을 알 수 있으며, 따라서 本 研究에서 誘導한 微分方程式과 數值解析方法의 妥當性을 다시 한번 立證하는 것이다.

Fig.4를 보면 아치의 높이가 증가하면 一般적으로 固有振動數는 減小하는 傾向을 보이고 있다. 그러나 아치높이의 一定區間에서는 아치높이가 증가하면 固有振動數도 增加하는 境遇가 있는 데, 이는

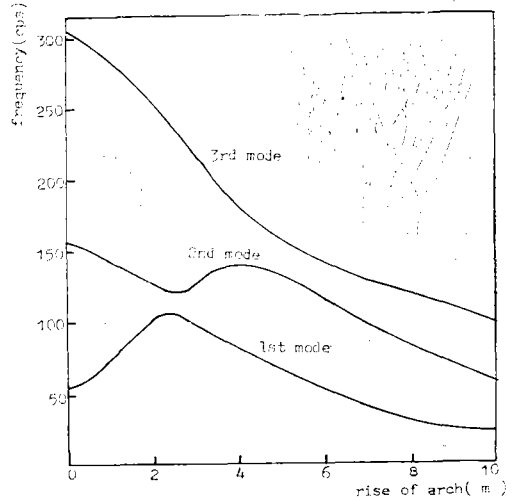


Fig. 4. Frequency vs. rise of arch curves ($L=10m, l=8m, r=0.2m$)

아치높이가 어느程度 增加할 때까지는 아치의 剛性이 커져서 固有振動數도 增加하지만 아치의 一定높이 以上에서는 오히려 아치의 剛性을 잃게 되어서 固有振動數는 減小하기 때문이다.

Fig.5는 回轉半徑과 固有振動數를 考察하기 위하여 아치斷面의 回轉半徑을 變化시키면서 數值解析하고 그 結果를 그림에 나타낸 것이다. Fig.5를 보면 回轉半徑이 增加할 수록 固有振動數도 增加하는 事實을 알 수 있다. 이는 回轉半徑이 커지면 細長比는 減小하게 되고 따라서 固有振動數는 增加하게 되는 構造物의 一般的인 傾向을 그대로 잘 나타내

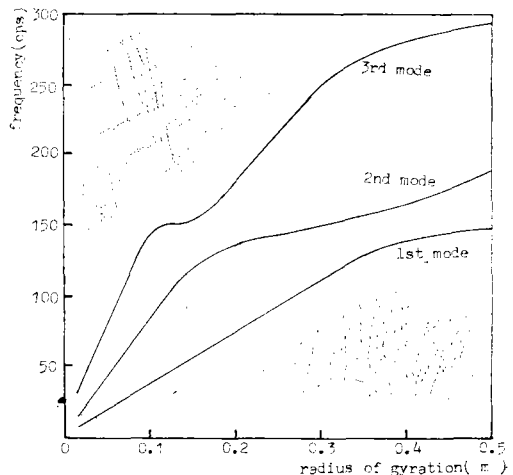


Fig. 5. Frequency vs. radius of gyration curves ($L=10m, l=8m, h=4m$)

주고 있다.

V. 結 論

이 論文은 兩端固定 非對稱 拋物線아치의 自由振動에 關한 研究로서 이 研究를 통하여 얻어진 結論은 다음과 같다.

(1) 回轉慣性を 考慮한 拋物線아치의 自由振動을 支配하는 基準函數의 微分方程式과 兩端固定 非對稱아치의 境界條件을 誘導하였다.

(2) 實際의 數值解析 結果와 SAP IV의 解析結果가 잘 一致함을 보여 本 研究結果의 妥當性を 確認하였다.

(3) 回轉慣성은 固有振動數를 減小시키는 要因이지만, 그 影響力은 매우 작은 것을 알 수 있었다.

(4) 아치斷面의 回轉半徑이 커질수록 固有振動數도 커진다는 事實을 알았다.

參 考 文 獻

1. Demeter G. Ferits, Dynamics and Vibration of Structures, John Wiley & Sons, Inc., 1973, pp. 3.
2. 黃鶴周, "水平橫荷重을 받는 補剛桁을 가진 圓孤아치에 대하여", 大韓土木學會誌, 第15卷, 第3號, 1967, pp. 23.
3. Joseph A. Wolf, Jr., "Natural Frequencies of Circular Arches", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST9, 19

- 71, pp. 2337-2350.
4. Klaus Jurgen Bathe, Edward L. Wilson and Fred E. Peterson, SAP IV, University of California, 1974.
5. 李炳求, "兩端힌치 拋物線아치의 自由振動에 關한 研究", 博士學位論文, 延世大學校 大學院 1984, pp. 58-68.
6. Mario Paz, Structural Dynamics, Van Nostrand Reinhold Company, 1980, pp. 371.
7. Melvin J. Maron, Numerical Analysis, Macmillan Publishing Co., Inc., 1982, pp. 344-352.
8. Muppud N. Reddy, "Lateral Vibration of Plane Curved Bars", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST10, 1968, pp. 2197-2212.
9. Shyr-jen Wung, "Vibration of Hinged Circular Arches", Thesis, Rice University, U.S.A, 1967, pp. 9.
10. Shyr-jen Wung, *ibid*, pp. 7.
11. Walter J. Austin and Anestis S. Veletsos, "Free Vibration of Arches Flexible in Shear", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM14, 1973, pp. 735-753.
12. Yuichi Hikami, "Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Bridge Aerodynamic Stability Investigation", IHI Report, Vol. 6, 1982, pp. 47-52.