

# 支持條件을 考慮한 낮은 拋物線 아치의 動的 臨界荷重의 解析

## An Analysis of Dynamic Critical Loads for Low Parabolic Arches with Different End Conditions

朴 光 圭\*  
Park, Kwang Kyou

### Summary

The differential equation, which can determine the dynamic critical loads for low parabolic arches, is derived in this study.

The dynamic critical loads of the parabolic arches subjected to a concentrated step load are numerically analyzed for the changes of load positions. In cases of arches with different end conditions (both hinged, fixed hinged, both fixed), the effect of end conditions and that of the rises are investigated in detail.

The summary of the results are the following:

- 1) The snapthrough does not occur when the rise of arch is very low, and the bifurcation appears clearly as the rise of arch increases.
- 2) The regions in which the dynamic critical loads are not defined for the both ends fixed are broader than that for the both ends hinged.
- 3) For all case, the load positions of minimum dynamic critical loads exist at the near position from the end hinged.

Thus, the results obtained in present study show that the magnitude of dynamic critical loads, the load positions of minimum dynamic critical loads and the regions in which the dynamic critical loads are not defined depend on end conditions of arches.

### I. 序 論

20世紀 前半부터 아치의 構造解析과 施工技術에 비약적인 발전이 이루어져 아치 構造物에 있어서 支間이 長大化됨에 따라 아치의 斷面은 작아지고 支間은 길어져 가늘고 긴 아치가 출현한 반면에 荷重은 重量化되고 車輪의 速度는 증가됨에 따라 아치橋의

臨界荷重의 해석에 관한 研究의 필요성이 인식되어 왔다.

本 研究은 일반적으로 가장 많이 사용되는 拋物線 아치<sup>1)</sup>에 대하여 動的 臨界荷重을 구할 수 있는 微分方程式을 유도하고, 이것을 支持條件이 다른 拋物線 아치의 여러가지 아치 높이와 여러가지 載荷位置에 각각 적용시켜 數值解析하여 動的 臨界荷重을 구하고자 한다. 動荷重은 集中 step 荷重을 적용하

\*延世大學校 大學院

고 動的 臨界荷重은 'Budiansky-Roth criterion'을 적용하여 定義하였다. 즉, 本 研究는 兩端힌지, 一端 힌지 他端 固定 및 兩端固定인 支持條件을 갖는 拋物線 아치에 하나의 載荷變數를 갖는 動荷重이 作用할 때 載荷位置 變化에 따른 動的 臨界荷重을 解析하였다.

1968년 Hsu<sup>3)</sup>는 'timewise step' 荷重을 받는 兩端힌지인 낮은 아치의 動的 臨界荷重을 연구했다. 1972년 Sundararajan-Kumami<sup>4)</sup>는 경사荷重을 받는 낮은 아치에 대해 載荷位置에 따른 動的 臨界荷重을 極座標을 써서 연구했고, Schreger<sup>5)</sup>는 兩端固定 아치의 座屈荷重을 연구했다. 1979년에 Plaut<sup>6)</sup>는 本 研究와 같이 3가지의 支持條件을 가진 낮은 아치의 靜的 臨界荷重을 여러가지 아치 높이에 대하여 研究하였다. 1982년 Plaut<sup>7)</sup>는 兩端힌지 sinusoidal 아치의 動的 臨界荷重을 計算하였다. 그러나 動荷重을 받는 아치에 대하여 다음과 같은 문제들이 더 상세히 밝혀져야 할 것으로 사료된다.

- 1) 動荷重의 作用하에서 最小 動的 臨界荷重(minimum dynamic critical loads)의 크기
- 2) 아치의 支點으로부터 動的 臨界荷重이 定義되지 않는 거리
- 3) 아치의 높이가 變化할 때 載荷位置에 따른 動的 臨界荷重의 영향
- 4) 아치의 支持條件이 非對稱일 경우 動的 臨界荷重의 變化

따라서 本 研究는 낮은 拋物線 아치에 대하여 上記의 문제들을 究明하고자 한다.

本 研究에 사용된 基本假定 및 制限事項은 다음과 같다.

- 1) 아치는 平面 內에 있다.
- 2) 荷重은 平面 內에 垂直으로 作用한다.
- 3) 아치의 斷面의 性質은 一定하다.
- 4) 減衰效果는 고려하지 않는다.
- 5) 아치의 解析은 微小變形 彈性理論에 따른다.

## II. 基本方程式

### 1. 낮은 아치의 運動方程式

Fig.1은 對稱인 拋物線 아치의 幾何學的 形狀을 나타낸다. 임의의 X點에서 中心軸의 變形 前의 높이  $Y_0(X,0)$ 가 荷重  $P(X,T)$ 에 의하여 時間 T에서  $Y(X,T)$ 로 된다. 이 때 아치의 微小要素에 作用하

는 힘들은 Fig.2에서와 같이 표시할 수 있다. 즉, 임의의 斷面에는 應力의 合力으로 水平 thrust  $N$ , 垂直剪斷力  $V$ , 휩모멘트  $M$ 이 作用하게 되고, 微小區間  $dX$ 에 外力  $P(X,T)$ 가 作用하게 된다. 動的 平衡條件式을 세우기 위하여 d'Alembert의 原理를 이용하면 慣性力  $\rho Y(X,T)_{,TT}$ 가 下向으로 作用되는

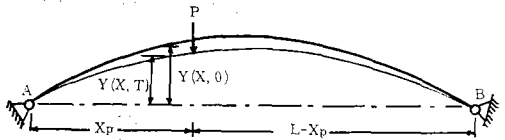


Fig. 1. Geometric shape of a low parabolic arch

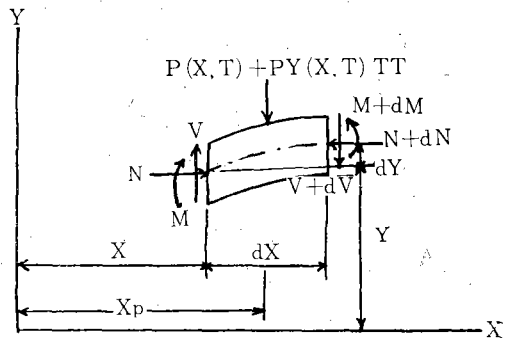


Fig. 2. Stress resultants, applied loads, and inertia forces on an infinitesimal element of an arch

것으로 생각할 수 있다. 이 때 荷重의 符號를 Fig.1에서와 같이 下向을 陽으로 하면  $dX$ 區間의 外力은  $P(X,T) + \rho Y(X,T)_{,TT}$ 가 된다. 여기서  $\rho$ 는 X軸 單位 길이 당 아치의 質量으로 均一斷面으로 假定할 경우는 一定한 값으로 생각할 수 있다<sup>8)</sup>.

運動方程式은 Fig.2에서의 垂直力 및 모멘트에 대한 動的 平衡條件으로부터

$$V_{,x} = -[P(X,T) + \rho Y(X,T)_{,TT}] \dots\dots(1)$$

$$M_{,x} = V - NY_{,x} \dots\dots(2)$$

로 유도된다. 여기서 Bernoulli-Euler의 보 理論에 따른 휩모멘트-一曲率의 關係를 도입하면

$$M = EI(Y_{,xx} - Y_{0,xx}) \dots\dots(3)$$

이므로 式(1)의 X에 대한 1次微分値를 생각하고, 式(1) 및 式(3)을 代入하면 다음과 같은 方程式을

구할 수 있다.

$$EI(Y_{,xxxx} - Y_{0,xxxx}) + NY_{,xx} + P(X, T)\delta(X - X_p) + \rho Y(X, T)_{,TT} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

여기서  $X_p$ 는 垂直動荷重  $P(X, T)$ 의 作用位置이고,  $\delta$ 는 Dirac delta function이다.

### 2. 水平 Thrust

水平力의 動的 平衡條件으로부터

$$dN = 0 \dots\dots\dots(5)$$

으로서 軸方向으로서의 水平 thrust의 變化는 없다 따라서 彈性理論에 의하여

$$N = \frac{EA\Delta L}{L} \dots\dots\dots(6)$$

이다. 式(6)에서  $\Delta L$ 은 變形이 일어난 후 時間  $T$ 에 서의 弓 中心軸의 收縮量으로서 다음 式과 같다

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L [(Y_{0,x})^2 - \{Y(X, T)_{,x}\}^2] dX \dots\dots\dots(7)$$

式(7)에서 高次項은 생략하면 다음과 같다.

$$N = -\frac{EA}{2L} \int_0^L [(Y_{0,x})^2 - \{Y(X, T)_{,x}\}^2] dX \dots\dots\dots(8)$$

### 3. 運動方程式의 無次元化

運動微分方程式의 數值解析에서 單位에 관계없도록 하기 위하여 다음과 같은 無次元量을 사용하여 運動方程式을 無次元化하도록 한다.

$$x = \frac{X}{L} \dots\dots\dots(9)$$

$$y = \frac{Y}{2r} \dots\dots\dots(10)$$

$$y_0 = \frac{Y_0}{2r} \dots\dots\dots(11)$$

$$t = \frac{T}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \dots\dots\dots(12)$$

$$p = \frac{PL^3}{2EI\pi^4 r} \dots\dots\dots(13)$$

이들 無次元量들을 式(4)와 式(8)에 代입하고

$$w(x, t) = y_0(x) - y(x, t) \dots\dots\dots(14)$$

를 導入하면

$$w(x, t)_{,ttt} + w(x, t)_{,xxxx} + nw(x, t)_{,xx} - ny_0(x)_{,xx} = \pi^4 p(x, t)\delta(x - x_p) \dots\dots(15)$$

$$n = 2 \int_0^1 [2w(x, t)_{,x} y_0(x)_{,x} - \{w(x, t)_{,x}\}^2] dX \dots\dots\dots(16)$$

이 된다.

## III. 拋物線 아치

### 1. 拋物線 아치의 運動方程式

拋物線 아치의 變形 前의 幾何學的 形狀은 Fig.1과 같은 座標系에서 다음과 같이 표현된다.

$$Y_0(X) = 4 \frac{H}{L^2} (LX - X^2) \dots\dots\dots(17)$$

여기서  $H$ 는 弓 頂點의 높이(rise)이고,  $L$ 은 弓의 支間이다.

式(9)로부터 式(11)까지를 式(17)에 代입하여 無次元化하면

$$y_0(x) = 4hx(1-x) \dots\dots\dots(18)$$

이 된다. 여기서  $h$ 는 拋物線 아치의 中央에서 無次元 높이이다. 式(18)을 式(15) 및 式(16)에 代입하면

$$w(x, t)_{,ttt} + w(x, t)_{,xxxx} + nw(x, t)_{,xx} + 8hn = \pi^4 p\delta(x - x_p) \dots\dots\dots(19)$$

$$n = 2 \int_0^1 [8h(1-2x)w(x, t)_{,x} - \{w(x, t)_{,x}\}^2] dx \dots\dots\dots(20)$$

式(19)와 (20)이 낮은 拋物線 아치의 動的 臨界荷重을 구할 수 있는 無次元 運動方程式이다.

### 2. 境界條件

本 研究에서 對象으로 하는 3가지의 支持條件을 갖는 弓에 對한 境界條件은 각각 다음과 같다.

(1) 兩端이 hinge인 경우

$$w(0, t) = 0, w(0, t)_{,xx} = 0 \dots\dots\dots(21)$$

$$w(1, t) = 0, w(1, t)_{,xx} = 0 \dots\dots\dots(22)$$

(2) 兩端이 固定인 경우

$$w(0, t) = 0, w(0, t)_{,x} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

$$w(1, t) = 0, w(1, t)_{,x} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

(3) 一端固定이고 他端 hinge인 경우

$$w(0, t) = 0, w(0, t)_{,x} = 0 \dots\dots\dots(25)$$

$$w(1, t) = 0, w(1, t)_{,xx} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

## IV. 臨界基準

弓에 對하여 가장 많이 사용되는 臨界基準은 弓의 平均 높이에 對한 平均 처짐의 比이다. 그러나 弓의 처짐이 變形 前의 形狀에 對해 上下의 部分을 가질 때 이 基準은 적당하지 않을 수 있다. 또 다른 臨界基準은 弓 支間의 中央에서 처짐을 사

용할 수 있으나 아치의 中央에서의 처짐이 零이 될 수 있으므로 이 臨界基準 역시 적당하지 않을 경우가 있다.

그러므로 本 研究에서는 위에 언급한 난점들을 제거할 수 있는 다음과 같은 臨界基準를 사용하기로 한다<sup>9)</sup>.

$$u(t) = \left[ \int_0^1 w^2(x,t) dx \right]^{1/2} \dots\dots\dots(27)$$

이 動的 臨界基準는 構造物에 作用한 荷重과 變位變數를 圖示하였을 경우 動的 臨界荷重에서는 荷重의 작은 增加에 대하여 變位變數가 급격히 도약하게 된다는 質的 基準(qualitative criterion)이다 比例로 增加하는 荷重에 대하여 荷重에 의한 運動이 일어나는 동안의  $u(t)$ 의 最大值가 計算된다. 臨界荷重은 荷重이 작게 增加할 때 이 값이 最大로 增加할 때 定義된다<sup>9)</sup>. 대단히 낮은 아치나 아치의 端部 근처에 荷重이 作用할 때는 臨界荷重은 定義되지 않는다<sup>9)</sup>.

## V. 數值適用例

### 1. 兩端힌지 拋物線 아치

兩端이 힌지로 支持된 拋物線 아치의 경우에 대

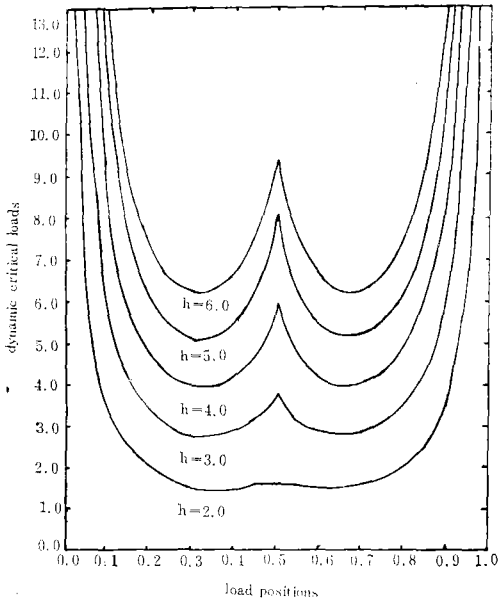


Fig. 3. Dynamic critical loads for both ends hinged

하여 여러가지 아치 높이 변수  $h$ 에 대한 載荷位置와 動的 臨界荷重의 관계를 Fig.3에 表示하였다. 臨界荷重이 작을 때 아치의 荷重-처짐 曲線은 非線形이며, 이 曲線의 기울기가 零인 荷重值가 臨界荷重이다. 이런 현상을 snap-through라 하며 이때 아치는 對稱 座屈 mode를 갖는다<sup>10)</sup>. 또한 snap-through을 일으키지 않는 아치 높이는 대단히 작다.

Plaut<sup>11)</sup>는 兩端 힌지인 拋物線 아치에 대해 bifurcation instability을 일으키는 條件을 다음과 같이 밝혔다.

$$P \sin 2\pi x_p = 0 \dots\dots\dots(28)$$

그러므로  $x_p = 0.5$ 이다. Fig.3에서 bifurcation instability가  $x_p = 0.5$ 에서 일어남을 확인할 수 있다. 또한 載荷位置와 動的 臨界荷重 曲線은  $x_p = 0.5$ 에 대하여 對稱이다.

그러나  $h < 3.0$ 에서는 bifurcation instability가 일어나지 않는다. bifurcation 荷重에서 動的 臨界荷重-載荷位置 曲線의 傾斜은 급격한 변화를 항상 보이며 이 荷重은 아치 높이에 따라 最小 動的 臨界荷重과 매우 큰 差異를 보이므로 imperfection sensitive라 하며 아치 中央에 作用하는 集中荷重에 대한 動的 臨界荷重은 實用的인 面에서 큰 의미는 없다. 動的 臨界荷重이 最小로 되는 가장 不利한 載荷位置는 아치 支間의 약 3分の 1點 및 3分の 2點

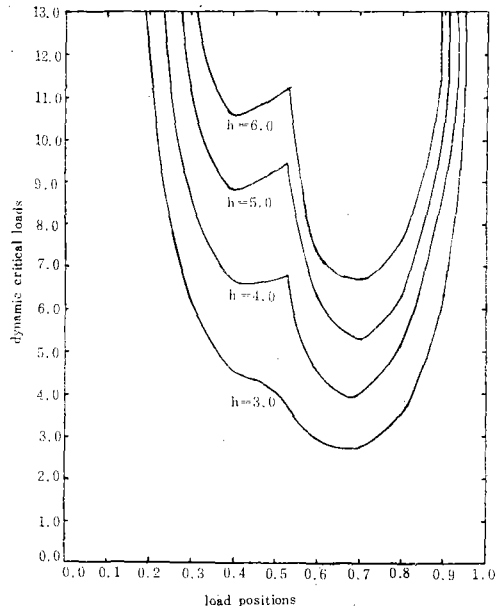


Fig. 4. Dynamic critical loads for fixed-hinged ends

이다. 또한 아치의 兩 支點으로부터 15% 범위내에서는 動的 臨界荷重이 매우 커지므로 이 범위는 動的 臨界荷重을 定義할 수 없는 구역이 된다.

### 2. 一端 固定 他端 힌지인 拋物線 아치

一端이 固定이고 他端이 힌지인 拋物線 아치에 대한 動的 臨界荷重—載荷位置 曲線이 Fig.4에 표시되어 있다. 支持條件이 非對稱이므로 動的 臨界荷重—載荷位置 曲線도 자연히 非對稱이 된다. 가장 不利한 載荷位置는 固定支點으로부터 아치支間의 3分の 2點이 되며 두 개의 limit point에서의 動的 臨界荷重値는 매우 큰 差異가 있다. 또한 아치의 固定支點으로부터 약 20~35% 범위내 및 힌지 支點으로부터 약 10~20% 범위내에서는 動的 臨界荷重이 定義되지 않는다.

一端 固定, 他端 힌지인 아치에 대해서는 動的 臨界荷重値에 따라 bifurcation point가 달라지는데 이런 支持條件에 대한 bifurcation condition도 참고문헌 11에 제시되어 있다.

### 3. 兩端 固定인 拋物線 아치

兩端이 固定 支點으로 支持된 拋物線에 대한 動

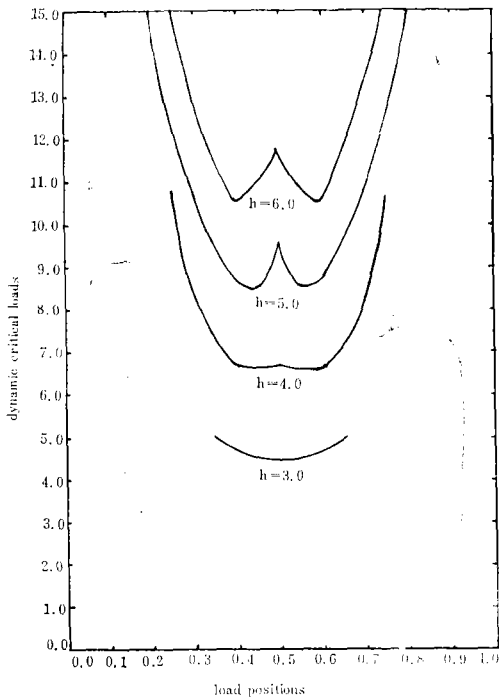


Fig. 5. Dynamic critical loads for both ends fixed

的 臨界荷重—載荷位置의 關係를 Fig.5에 표시하였다. 이 경우 아치 높이가 4.0미만에서는 bifurcation instability가 일어나지 않는다.  $h=3.0$ 에 대하여는 荷重이 아치의 中央에 있을 때 最小 動的 臨界荷重이 된다.  $h \geq 4.0$ 에 대하여는 아치의 높이가 높아짐에 따라 最小 動的 臨界荷重의 位置는 아치의 支點側으로 이동하게 되어 그 위치는 약 0.4 및 0.6이 된다. 또한, 아치의 높이가 같을 경우의 動的 臨界荷重의 크기는 兩端 固定 아치의 경우가 兩端 힌지 아치의 경우보다 훨씬 크다. 또한 兩端 固定 拋物線 아치의 兩 支點으로부터 약 30% 범위내에서는 動的 臨界荷重이 定義되지 않는다.

### 4. 最小 動的 臨界荷重

拋物線 아치의 여러 가지 높이에 대한 最小 動的 臨界荷重을 最小 靜的 臨界荷重<sup>9)</sup>과 Table 1에 비교하였다. 이 最小 動的 臨界荷重은 가장 不利한 載荷位置에서의 臨界荷重으로 實用上 重要한 의미를 갖는다.

Table-1. Minimum critical loads for low parabolic arches

conditions rises	both ends hinged		fixed-hinged ends		both ends fixed	
	dyna- mic	static	dyna- mic	static	dyna- mic	static
3.0	2.81	3.40	2.83	3.40	4.48	5.00
4.0	3.96	4.90	4.00	4.90	6.65	7.30
5.0	5.15	6.10	5.32	6.30	8.56	9.80
6.0	6.25	7.40	6.59	7.80	10.56	12.30
7.0	7.32	8.60	—	—	13.09	14.60

## VI. 結 論

낮은 拋物線 아치의 動的 臨界荷重을 구할 수 있는 微分方程式을 유도하고 이를 兩端 힌지, 一端 固定 他端 힌지 및 兩端 固定인 3가지의 支持條件을 가진 拋物線 아치에 대하여 하나의 載荷變數를 갖는 集中 step 荷重을 아치 支間의 여러 위치에 사용시켜 數值計算하여 動的 臨界荷重과 載荷位置의 關係를 표시하였다.

本 研究를 통하여 얻어진 結果는 다음과 같다.

1) 아치의 높이가 낮을 경우는 snap through가 일어나지 않으며 이런 아치 높이는 아치 兩端의 支持條件에 따라 다르다.

2) 아치의 높이가 높아지면 bifurcation이 일어나며 그 위치는 支持條件이 對稱이면 아치의 中央이 되나 非對稱인 支持條件일 경우에는 兩端 支點側에 가깝다.

3) 動的 臨界荷重을 定義할 수 없는 범위는 兩端 兩지 아치보다 兩端 固定 아치가 훨씬 크다.

4) 아치의 支持條件을 비교하면 最小 動的 臨界 荷重의 위치는 항상 固定端보다 兩지端의 근처에 있다.

### 參 考 文 獻

1. Parme, A.L. and Holland, E.P., "Parabolic Arches of Variable Thickness", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 90, No. ST6, December, 1964, pp.65-87.
2. Budiansky, B. and Roth, R.S., "Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells", NASA TN D-1510, December, 1966, pp.597-605.
3. Hsu, C.S., "Stability of Shallow Arches Against Snap-Through Under Timewise Step Loads", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 35, No. 1, March, 1968, pp.31-39.
4. Sundararajan, V. and Kumani, D.S., "Dynamic Snap-Buckling of Shallow Arches under Inclined Loads", AIAA Journal, Vol. 10, No. 8, August, 1972, pp.1090-1091.
5. Schreyer, H.L., "The Effect of Initial Imperfections on Buckling Load of Shallow Circular Arches", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 39, No. 2, June, 1972, pp.445-450.
6. Plaut, R.H., "Influence of Load Position on the Stability of Shallow Arches", Journal of Applied Mathematics and Physics, Vol. 30, 1979, pp.548-552.
7. Gregory, W.E. and Plaut, R.H., "Dynamic Stability Boundaries for Shallow Arches", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 108, No. EM6, December, 1982, pp.1036-1060.
8. Darkov, A. and Kuzetsov, V., Translated from the Russian by Lachinov, B., Structural Mechanics New York, p.484.
9. Plaut, R.H. and Infante, E.F., "Bounds Motions of Some Lumped and Continuous Dynamic System", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 39, No. 1, March, 1972, pp.251-256.
10. Austin, W.F. and Ross, T.J., "Elastic Buckling of under Symmetric Loading", ASCE, Vol. 102, No. ST5, May, 1976, pp.1085-1095.
11. Plaut, R.H., "Stability of Shallow Arches Under Multiple Loads", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 92, No. EM4, October, 1978, pp.1015-1026.