

有限要素法에 의한 펌프軸系の 安定性解析

梁 保 錫*

Stability Analysis of Pump Rotors Using Finite Element Method

B. S. Yang

Abstract

With the tendency toward high speed and high pressure in centrifugal pumps, the problem of sub-synchronous vibration has arisen, caused by the hydraulic forces of the working fluid, such as wearing, balance piston, impeller, etc..

These forces can drastically alter the rotor critical speeds and stability characteristics, and can be acted significant destabilizing forces.

For preventing such self-excited vibration, the design of the rotor system needs, which would secure the stability of the machine.

In this paper, a procedure is presented for dynamic modeling of rotor-bearing-seal-impeller systems which consist of rigid disks, distributed parameter finite rotor elements and discrete bearings, seals and impellers. A finite element model including the effects of rotatory inertia and gyroscopic moments is developed using the consistent matrix approach. The technique of dynamic matrix reduction is applied to the shaft matrices to reduce them to a set of matrices of significantly fewer degrees of freedom.

The representation of bearing, seal and impeller elements is in term of linearized stiffness and damping matrices by reasonably small perturbations from equilibrium.

The stability behavior of a typical double suction centrifugal pump is presented. Results show the influence of clearance and flow conditions on running speeds and stability characteristics.

1. 序 論

蒸氣 및 가스터어빈, 發電機, 電動機, 壓縮機 펌프 등 많은 回轉機械가 産業分野에서 使用되고 있다. 最近 프렌트의 大容量化에 의해 使用되는 回轉機械의 信賴性的 飛躍的인 向上이 要求되어 왔다. 이를 위해 設計時點에서 充分한

振動解析을 하여 振動特性이 좋은 回轉機械를 製作할 필요가 있다. 回轉軸系の 振動特性을 解析하는 경우의 基本的인 事項은 (1)軸系的 危險速度, (2)軸系的 安定性, (3)軸系的 不平衡應答으로 구별할 수 있다. 本 論文에서는 이 가운데 (2)의 解析으로 특히 펌프축계에 주목하여 解析을 수행한다.

* 正會員, 釜山水產大學 船用機械工學科

펌프, 압축기 등의 유체회전기계는 일반회전기계와 달리 作動流體로부터 발생하는 流體力이 회전축계에 작용하며, 최근 유체기계의 고압, 고속화에 의해 이 유체력이 不安定振動을 일으키는 것이 중요한 문제로 되고 있다.¹⁾

回轉軸系の 動的應答 및 安定性解析의 수치계산의 일반적인 방법으로 傳達매트릭스법,²⁾ 유한요소법³⁾ 등이 있다.

저자는 단단원심펌프의 단순모델로서 1질량회전축계를 해석하여 펌프용 시일이 회전축계의 안정성에 미치는 영향을 조사하였다.^{4,5)} 系の 안정성을 해석하는 경우, 특성의 불안정하게 되는 振動모우드를 대상으로 하므로 모우드解析의 觀點에 따라 1질량회전축계의 모델로서 필요한 정보를 대부분 얻을 수 있다. 그러나 實際의 유체회전기계의 회전축은 많은 段部分, 임펠러 등의 복잡한 형상을 하고 있으므로 최종설계단계에서는 實際機械의 形狀에 따른 多圓板回轉軸系로 취급하므로써 精度가 높고, 詳細히 安定性을 확인할 필요가 있다.

本 研究에서는 有限要素法을 이용하여 系를 定式化하고, 불안정한 힘으로서 시일과 임펠러의 유체력이 회전축계의 안정성에 미치는 영향을 조사할 안정성 해석프로그램을 개발하였고, 이 계산프로그램을 實機形狀을 한 펌프축계의 해석에 적용하여 유용함을 확인하였다.

2. 해석모델

유한요소법은 各種 機械, 構造物 등의 靜的, 動的解析에 널리 이용되고 있고, 또 많은 文

獻^{6,7)}에 소개되어 있으므로 상세한 설명은 생략하고 回轉軸系에 포함되는 特有的 매트릭스의 構成에 대해 說明한다.

有限要素法을 적용하여 회전축계를 해석하려 할 때 Fig. 1과 같이 軸의 段部分, 圓板部 등에서 節點을 잡고 軸의 各要素를 分割한다. 즉 主構成要素로서

- (1) 剛體, 對稱인 圓板要素
- (2) 軸對稱, 一定分布의 慣性과 彈性을 갖는 軸要素
- (3) 베어링油膜特性을 나타내는 베어링要素
- (4) 作動流體로부터의 不安定한 힘을 나타내는 不安定化要素

以下에 이들 各要素의 매트릭스를 나타낸다. 本論文은 回轉軸의 橫振動에 注目하여, 비틀림 진동과 종진동 성분을 생략한다. 以下에서 $[M_r]$, $[M_s]$, $[G]$, $[K]$, $[C]$ 는 各要素의 質量, 回轉慣性, 자이로모우먼트, 剛性 및 減衰 매트릭스를 나타낸다. 또 어깨글자 d , e , b , s 는 圓板, 軸, 베어링 및 不安定化要素를 나타낸다.

2.1 圓板要素

유체회전기계의 회전축은 일반적으로 임펠러와 원판을 多數 부착하고 있고, 高速回轉軸系에 있어서는 이들 圓板의 자이로効果가 系の 振動特性에 영향을 미친다. Fig. 2의 좌표와 회전방향으로 角速度 ω 로 회전한다면, 圓板重心에 관한 힘과 모우먼트의 관계로부터 원판의 운동에너지 E^d 는 다음식으로 나타내어 진다.

$$E^d = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

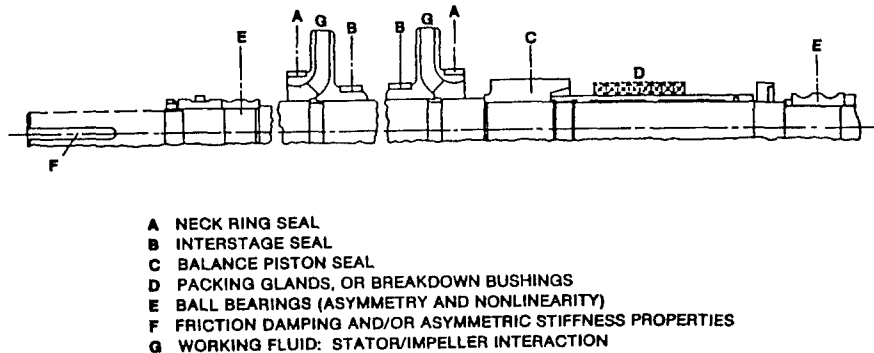


Fig. 1 펌프軸系

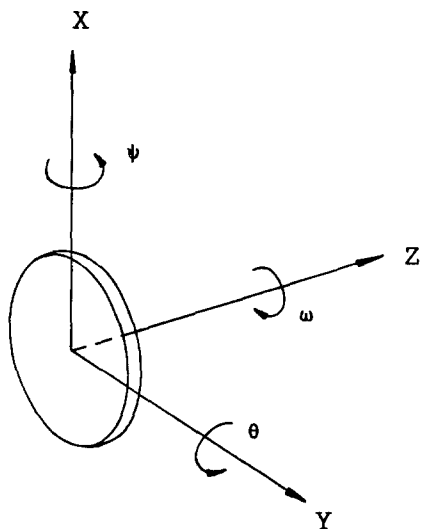


Fig. 2 圓板要素

$$+\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} - \omega \theta \psi I_p \quad (1)$$

여기서 圓板의 質量을 m_d , 慣性모우멘트를 I_d , 極慣性모우멘트를 I_p 로 한다.

式(1)을 Lagrange 운동방정식에 대입하면

$$([M_i^d] + [M_r^d])\{\dot{q}^d\} - \omega [G^d]\{\dot{q}^d\} = \{F^d\} \quad (2)$$

이된다.

2.2 軸要素

回轉軸系를 구성하는 기본요소인 축요소의 形狀과 좌표를 Fig. 3에 나타낸다. 節點 i 또는 $i+1$ 에서 自由度는 x, y, θ, ψ 의 4自由度가 된다. 축요소로서 構造解析에서 이용되는 斷面形狀이 圓形인 要素를 사용한다. 축요소의 탄성굽힘 및 운동에너지 E^a 는 다음식과 같다. ^{7), 8)}

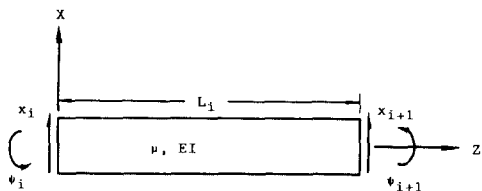


Fig. 3 軸要素

$$E^a = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K^e] \{q^e\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}^e\}^T ([M_i^e] + [M_r^e]) \{\dot{q}^e\} + \frac{1}{2} I_p \omega^2 + \omega \{\dot{q}^e\}^T [N^e] \{q^e\} \quad (3)$$

여기서

$$[M_i^e] = \int_0^l \mu [\psi^e]^T [\psi^e] ds,$$

$$[M_r^e] = \int_0^l \tilde{I}_d [\phi^e]^T [\phi^e] ds,$$

$$[N^e] = \int_0^l \tilde{I}_p [\phi_\psi^e]^T [\phi_\psi^e] ds,$$

$$[K^e] = \int_0^l EI [\psi^e]^T [\psi^e] ds$$

μ 는 單位길이당의 要素質量, \tilde{I}_d 는 單位길이당의 極慣性모우멘트이고, $[\psi^e], [\phi^e]$ 는 要素의 左右端에서 單位節點變位에 의해 생기는 靜的 變位모우드에 의해 表現되는 形狀함수이다. 式(3)을 Lagrange 운동방정식에 대입하면

$$([M_i^e] + [M_r^e])\{\dot{q}^e\} - \omega [G^e]\{\dot{q}^e\} + [K^e]\{q^e\} = \{F^e\} \quad (4)$$

2.3 베어링요소

베어링요소 및 불안정화요소의 精確한 表現은 이들이 系의 安定性和 應答에 큰 影響을 미치므로 重要하다. 즉 이들 요소의 減衰는 共振應答을 억제하는 減衰力으로서 작용하지만 連成剛性에 의한 힘은 系를 不安定하게 한다. 베어링의 油膜特性은 軸의 變位 및 速度의 非線形함수이다. 그러나 振動이 發生하기 시작하는 限界를 檢討하는 安定性解析의 경우, 軸의 靜的 平衡點에서의 微小振動問題로 취급할 수 있고 線形化된 8個의 剛性和 減衰係數로 나타내어 진다(Fig. 4). 이 요소는 다음식으로 나타낸다.

$$[C^b]\{\dot{q}^b\} + [K^b]\{q^b\} = \{F^b\} \quad (5)$$

여기서 베어링反力和 軸心의 變位, 速度와의 關係로부터 베어링要素의 減衰매트릭스 $[C^b]$, 剛性매트릭스 $[K^b]$ 는 다음과 같다.

$$[C^b] = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}, \quad [K^b] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

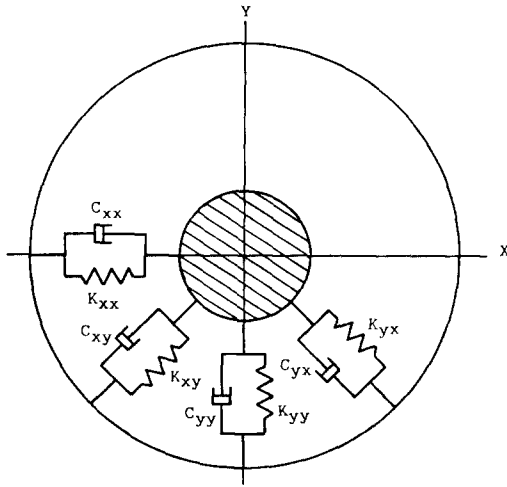


Fig. 4 베어링 및 불안정화요소

2.4 불안정화요소

유체회전기계에서는 各種 시일部, 임펠러部 등을 通過하는 流體로부터 不安定한 힘이 發生하고 系の 安定性에 영향을 미친다. 이들의 불안정한 힘도 解析上으로는 베어링油膜係數와 동일한 形으로 표현할 수 있다. 즉,

$$[C^s]\{\dot{q}^s\} + [K^s]\{q^s\} = \{F^s\} \quad (6)$$

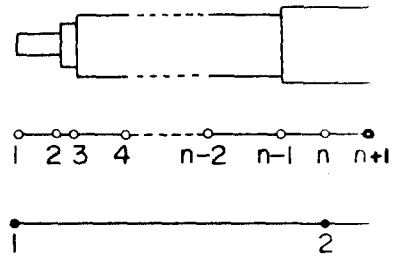
式(6)의 各係數는 시일의 경우는 參考文獻(9)~(13) 등을 이용하여 評價할 수 있다. 임펠러部의 경우는 最近 大橋¹⁴⁾, Acosta¹⁵⁾ 등의 실험적 연구가 발표되고 있으나 아직 定量的인 評價式까지 이르지 못하고 있고, 本論文에서는 Hergt¹⁶⁾ 등의 實驗結果를 이용한 Black¹⁷⁾의 半實驗式을 이용한다.

이상에서 說明한 各要素를 實機모형을 구성하기 위해 축방향으로 연결하면, 다음의 선형정수 계수미분방정식으로 다음 식이 얻어진다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (7)$$

3. 매트릭스의 縮小

軸形狀을 보다 엄밀하게 近似化하기 위해서는 分割數를 크게 해야 한다. 이는 複素固有值解析의 計算時間을 증대시키고, 너무 軸區間을 짧게 分割하면 軸要素의 剛性매트릭스에 매우 큰값



○ : Sub nodal point
● : Main nodal point

Fig. 5 절점축소 모델

을 갖는 部分이 생겨서¹⁸⁾ 數值計算上 바람직스럽지 못하다. 이점들을 해결하기 위해 自由度의 縮小를 수행한다. Fig. 5와 같이 軸을 分割하여 節點 1~n間의 剛性매트릭스를 縮小한다. 그림에서 ○는 分割節點으로 副節點(Sub nodal point)이라 하고, ●는 축소후 남는 節點으로 主節點(Main nodal point)이라 한다. 圓板등의 慣性力, 베어링反力, 시일과 임펠러의 불안정한 힘 등의 外部荷重이 작용하는 위치는 主節點에 포함되도록 설정한다.

부절점 1~n간의 강성매트릭스를 [S]로 하고, 주절점에 관한 부분과 축소될 부절점에 관한 부분을 분리하여 표시하면

$$[S] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & n & 2 & 3 \cdots n-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ n \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_{11} & & & S_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{21} & & & S_{22} \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad X_m = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$X_s = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

이 되고, 節點에 작용하는 외력과 변위의 관계는

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ X_s \end{bmatrix} \quad (9)$$

소거되는 부절점에는 외력이 작용하지 않으므로 $F_2=0$ 가 되고, 식(9)로부터

$$X_s = -[S_{22}]^{-1}[S_{21}]X_m \quad (10)$$

이 되고, 이를 變形하여

$$\begin{bmatrix} X_m \\ X_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -S_{22}^{-1}S_{21} \end{bmatrix} X_m = [T]X_m \quad (11)$$

로 놓는다. $[T]$ 는 1~ n 의 부절점의 변위를 주절점의 변위로 변환하는 變換매트릭스이다. 식(9)에 (11)식을 대입하여 양변에 좌표 $[T]^T$ 를 곱하면 주절점만에 관한 힘과 변위의 식이 얻어진다. 즉,

$$F_1 = [T]^T [S] [T] X_m = [S_d] X_m \quad (12)$$

축소된 강성매트릭스는 $[S_d]$ 가 된다. 같은 구간의 질량매트릭스도 같은 방법으로 축소된다.

4. 複素固有値解析

有限要素定式化에서 얻어진 운동방정식을 이용하여 펌프축계의 기본적 문제인 안정성을 검토한다. 식(7)의 동차식을

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (13)$$

식(13)을 복소고유치해석을 하여 얻어진 固有值로부터 감쇠율을 평가하므로 안정성을 평가할 수 있다.

식(13)의 해를 $q = ue^{st}$ 로 놓고, 식(13)에 대입하면

$$s^2[M]u + s[C]u + [K]u = 0 \quad (14)$$

가 얻어지고, 이를 標準形으로 변환하면

$$[A]w = sw \quad (15)$$

단,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, v = su$$

전 절점수를 n 이라 하면 매트릭스 $[M]$, $[C]$, $[K]$, $[I]$, $[0]$ 는 $4n \times 4n$ 이고, $[A]$ 는 $8n \times 8n$ 의 매트릭스가 되어 고유치는 모두 $8n$ 개가 된다.

$[A]$ 를 Hessenberg形 매트릭스로 변형하여 QR법¹⁹⁾을 적용하여 복소고유치 s 를 구한다. 복소고유치 $s = \lambda \pm iw$ 의 허수부는 系の 減衰固有振動數이고, 실수부는 系の 減衰率을 나타낸다. 또한 對數減衰率 δ 는

$$\delta = -\frac{2\pi\lambda}{\omega} \quad (16)$$

로 나타내어지며, 복소고유치 s 를 식(14)에 대입하여 풀면 s 에 대응하는 복소고유모우드가 얻어진다.

5. 解析프로그램의 構成

축방향의 節點座標, 軸徑, 길이, 軸의 材料定

數와 베어링 및 시일, 임펠러의 형상 Data 등을 입력한 後, 質量매트릭스 $[M]$, 減衰매트릭스 $[C]$, 剛性매트릭스 $[K]$ 를 작성한다. 즉, 주절점 사이에 부절점이 존재하면 部分構造部로 취급하여 그 부분의 질량 및 강성매트릭스를 작성한다. 다음에 주절점에 관한 항만이 남도록 식(12)을 이용하여 축소한다. 만일 주절점 사이에 부절점이 없으면 그대로 이용한다. 이로서 축에 대한 $[M]$, $[K]$ 를 작성할 수 있다. 다음에 베어링의 유막계수는 사용되는 종류에 따라 평가식이나 자료집²⁰⁾을 이용하여 계산하고, 시일과 임펠러의 경우도 文獻(9)~(12) 및 (17)을 이용하여 동적계수를 계산한다. 그러므로 임펠러의 질량, 자이로효과 등을 포함한 系全體의 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 를 구성할 수 있다.

고유치계산을 수행하기 위해 식(13)의 자유진동의 운동방정식을 標準形으로 변환하고, 그 매트릭스를 Hessenberg형의 매트릭스로 변형하는 조작을 한다. 그후 QR법을 사용하여 복소고유치해석을 수행한다. 그 결과로서 系の 자유도에 대응하는 복소고유치, 복소모우드가 얻어지고, 대수감쇠율도 계산된다. 최후로 이상의 결과를 출력한다. Fig. 6은 매트릭스의 구성을 나타낸다.

6. 수치계산에

수치계산의 모델로서, 일반적으로 많이 사용되고 있는 單段兩吸込遠心펌프를 이용한다(Fig. 7). Table 1은 임펠러와 시일의 기본데이터이다.

Fig. 8은 Fig. 1의 모델축계를 3가지의 計算方法으로 구한 시일의 틸새에 대한 安定限界速度의 變化를 나타낸다. 여기서 實線은 要素의 質量이 連續的으로 分布하고 있는 軸系를 Consistent mass matrix법(CM法)을 이용하여 계산한 결과이고, 點線은 分布質量을 等價한 集中質量으로 換算한 Lumped mass matrix법(LM法)으로 동일한 分割을 한 경우의 결과이다. 그리고 一點斜線은 文獻(5)에서 구한 1質點單純軸系의 결과이다. 3방법 모두 시일의 틸새의 증가에 따라 安定한계속도가 급격히 감소하고 있다. LM법

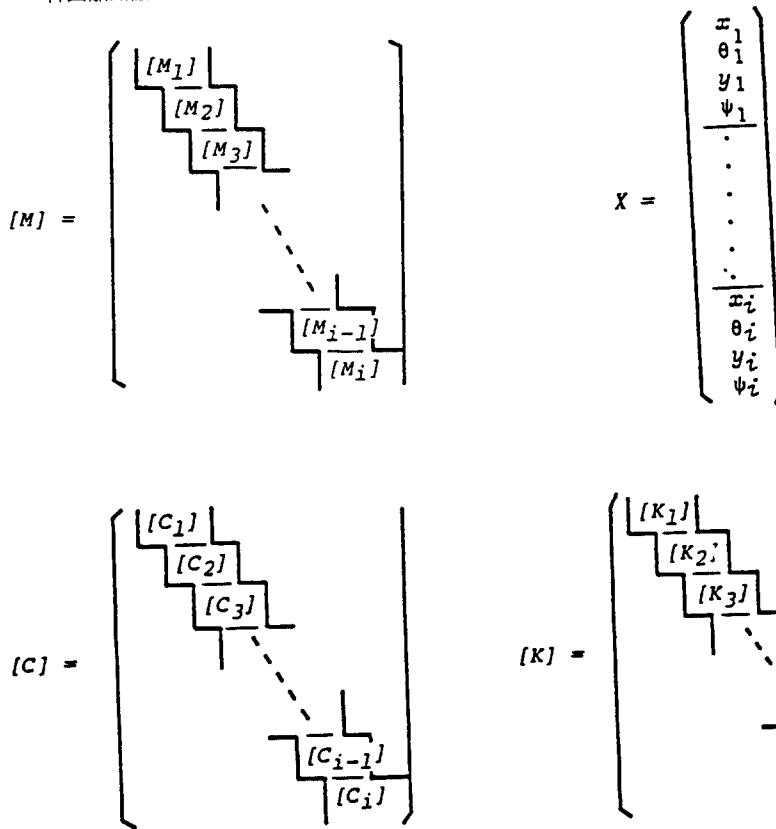
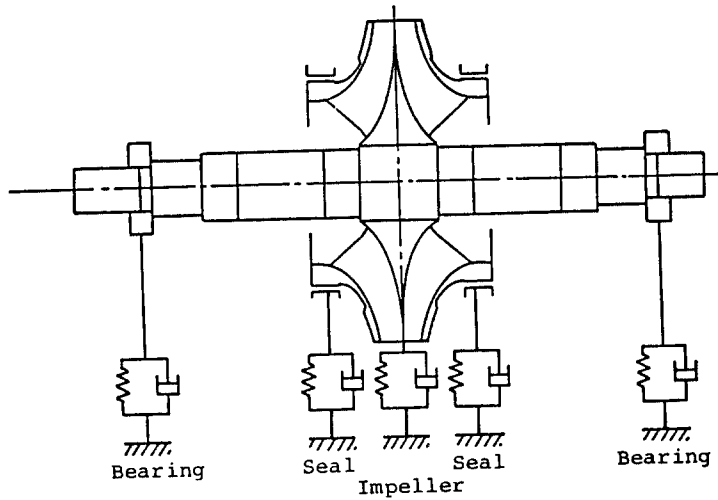


Fig. 6 매트릭스의 구성



Section No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Length(cm)	23.9	4.4	17.5	12.9	31.7	8.0	12.3	12.2	8.1	31.7	12.9	18.0	4.4	13.3
Diameter(cm)	12.7	13.0	13.6	14.0	14.0	14.0	14.1	14.1	14.0	14.0	14.0	13.6	13.0	13.0
Mass(kg)	2.43	0.47	2.04	2.08	6.0	2.32	25.5	25.5	2.33	6.0	2.08	5.94	0.47	1.42
					(6.5)	(2.44)	(42.0)	(42.0)	(2.46)	(6.5)				

Fig. 7 계산모델

Table 1. 기본 Data

Seal length	2.5[cm]
Seal diameter	20.0[cm]
Seal clearance	0.02 to 0.08[cm]
Pressure difference	2.5[MPa]
Impeller width	2.9[cm]
Impeller clearance	0.525[cm]
Impeller diameter	35.0[cm]
Speed	3000 to 6000[RPM]
Water temperature	50.0[°C]

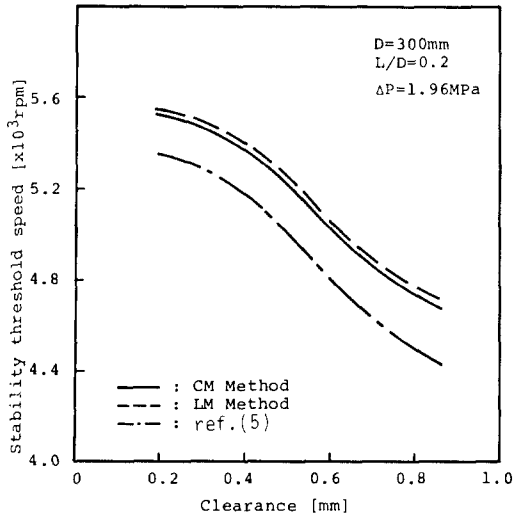


Fig. 8 계산방법의 비교

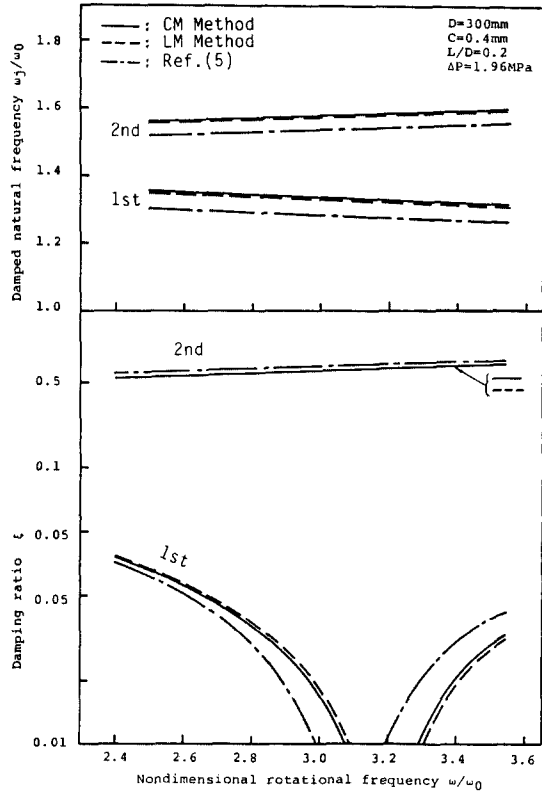


Fig. 9 고유치의 비교

과 CM법은 잘 일치하고 있으나 1질점계는 안정 한계속도를 과대평가하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는 軸回轉數에 대한 1次, 2次모우드의

減衰比와 減衰固有振動數를 계산한 결과이다.

定性的인 경향은 일치하고 있으나 定量的인 差

가 있으므로 최종적인 상세설계단계에서는 實機

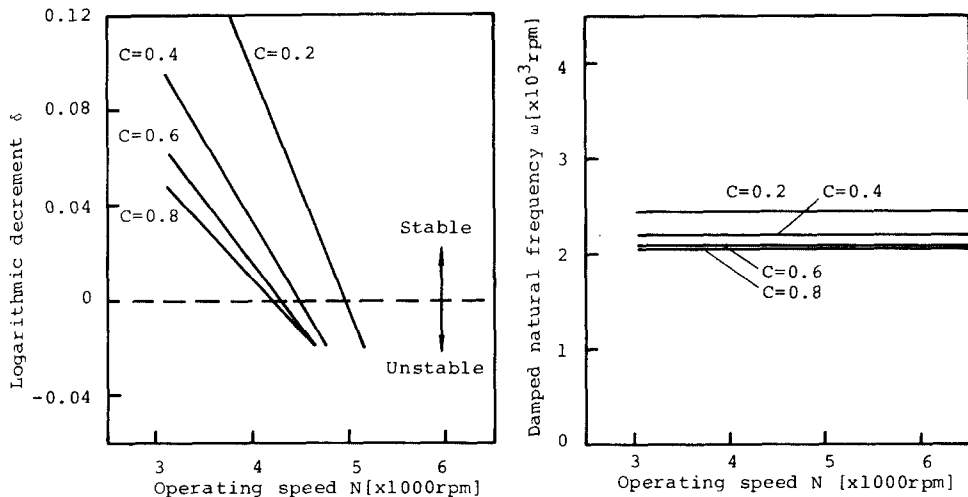


Fig. 10 시일 틈새의 영향

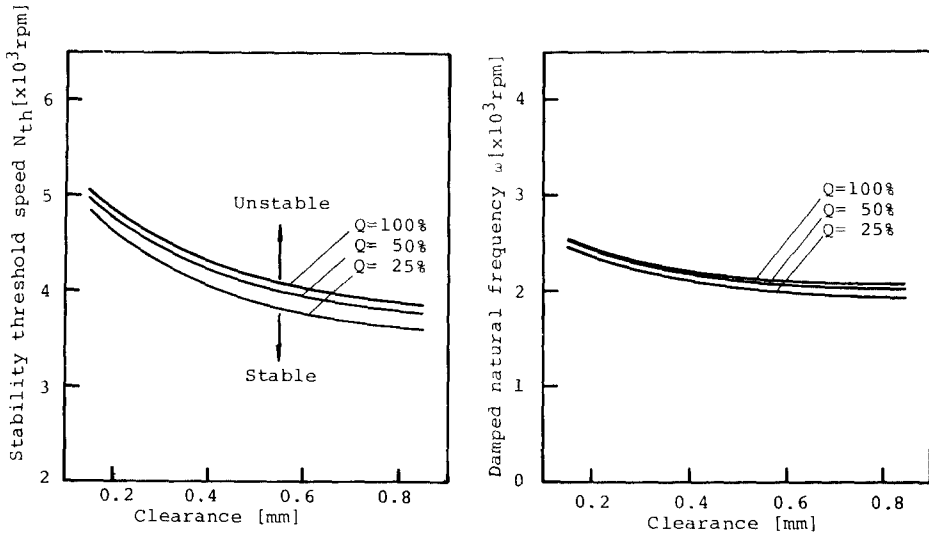


Fig. 11 부분유량의 영향

모델에 따른 多圓板回轉軸系로서 취급하여 보다 精度 높은 解析이 필요하다.

不安정한 힘으로서 시일과 임펠러에서 發生하는 유체력을 고려하여 系の 안정성해석을 수행한 결과를 Fig. 10~11에 나타낸다. Fig. 10은 시일의 틈새와 운전속도에 대한 系の 對數減衰率과 불안정하게 되는 진동모우드의 감쇠고유진동수의 변화를 나타내고 있다. 대수감쇠율이 0에서 系는 안정한계로 되고, 이값이 負가 되면 系는 불안정상태로 된다. 마모로 틈새가 크게 되면 系の 안정성은 떨어지고, 이 경향은 系の 운전속도가 크게 될 수록 강하다. 또한 系の 감쇠고유진동수는 틈새가 크게 될 수록 시일의 강성이 적어지므로 약간 감소하지만 운전속도에 의해서는 변하지 않는다.

유체회전기계는 단지 最高效率點(Best Efficiency Point)만이 아니고, 넓은 유량범위에서 운전되는 것이 보통이다. 이때 특히 문제로 되는 것은 低流量域에서의 性能이고, 디퓨저 베인의 負荷變動에 의해 發生하는 유체력이 系の 안정성에 영향을 미치게 된다. Fig. 11은 低流量域에서 이 유체력의 영향을 나타낸다. 流量이 감소할 수록 최적설계유량(100%)의 경우 보다 안정한계속도 및 감쇠고유진동수가 감소하고 있다.

7. 결 론

유한요소법을 이용하여 회전축계에 작용하는 각종 유체력을 고려한 多圓板回轉軸系의 안정성을 해석하였고, 범용안정성해석 프로그램을 작성하였다. 계산에로서 實機形狀에 따른 單段遠心펌프축계에 적용하여, 시일과 임펠러에서 發生하는 유체력이 Rotor의 안정성에 미치는 영향을 조사하였다.

參 考 文 獻

- 1) Makay, E., Centrifugal Pump Hydraulic Instability, EPRI cs-1445, 1980.
- 2) Pestel, E.C. and F.A. Lekie, Matrix Methods in Elastomechanics, Mcgraw-Hill, New York, 1963.
- 3) Ruhl, R., Dynamics of Distributed Parameter Rotor System; Transfer Matrix and Finite Element Techniques, Cornell University, 1970.
- 4) 梁保錫 外2人, ポンプ用シールのロータの安定性に及ぼす影響, 日本機械學會 論文集 C編, 51卷 470號 pp. 2479-2486, 1985.
- 5) 梁保錫 外2人, 遠心펌프 회전축계의 안정성에 미치는 시일의 영향, 대한기계학회논문집

- 10권1호, pp. 18~23, 1986.
- 6) 川井忠彦 外 4人, 有限要素法ハンドブック, 培風館, 1981.
- 7) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., The Dynamics of Rotor Bearing Systems Using Finite Elements, J. Eng. for Ind. Trans. ASME, pp. 593-600, 1976.
- 8) Y. K. Jei and C. W. Lee, The Dynamic Analysis of Asymmetric Rotor-Bearing systems Using Finite Elements Method, 대한기계학회 추계 학술초록집, pp. 390-394, 1985.
- 9) Childs, D. W., Dynamic Analysis of Turbulent Annular Seals Based on Hir's Lubrication Equation, J. Lub. Tech. Trans. ASME. pp. 437-444, 1983.
- 10) 梁 保錫 外 2人, ポンプ用シールの動特性に関する研究(第1報, 偏心時の環状シールの場合), 日本機械學會論文集, C編, 49卷 445號 pp. 1636-1642, 1983.
- 11) T. Iwatsubo, B. S. Yang, R. Ibaraki,
A Investigation of the Static and Dynamic Characteristics of Parallel Grooved Seals, Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery Workshop held at Texas A&M University, 2-4 June 1986.
- 12) T. Iwatsubo, B. S. Yang, R. Ibaraki,
Theoretical Approach to Obtaining Dynamic Characteristics of Noncontacting Spiral Seal, ibid, 2-4 June 1986.
- 13) D. W. Childs and J. B. Dressman, Convergent-Tapered Annular Seals: Analysis and Testing for Rotordynamic Coefficients, ASME Winter Annular Meeting pp. 35-41, 1981.
- 14) H. Ohashi, H. Shoji, and C. Kato, Experimental Study of Fluid Forces on whirling Centrifugal Impeller(1st Report, Impeller in Vaneless Diffuser), (in Japanese) Trans. JSME Vol. 51, No. 467 pp. 2373-2381, 1985.
- 15) D. S. Chamieh, A. J. Acosta, C. E. Brennen, and T. K. Caughey, Experimental Measurements of Hydrodynamic Radial Forces and Stiffness Matrices for a Centrifugal Pump-Impeller, J. Fluid. Eng. Trans. ASME Vol. 107, pp. 307-315, 1985.
- 16) P. Hergt and P. Krieger, Radial Forces in Centrifugal Pumps with Guide Vanes, proc. Inst. of Mech. Engrs. Vol. 184. pt3N pp. 101-107, 1969-70.
- 17) H. F. Black, Lateral Stability and Vibrations of High Speed Centrifugal pump Rotors, Dynamics of Rotors, IUTAM Symp. pp. 56-65. 1974.
- 18) 黒橋道也, すべり軸受で支持された回轉軸系の安定性に関する研究, 博士學位論文, 神戸大學, 1981.
- 19) K. J. Bathe and E. L. Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc. 1976.
- 20) 日本機械學會編, すべり軸受の静特性および動特性データ集, 日本工業出版社, 1984.

