

거칠 탄성 면접촉의 이론해석

유형선* · 이은상**

* 인하대학교 자동화 공학과

** 인하대학교 대학원 기계공학과

A Theoretical Analysis on The Elastic Rough Contact

Hyeong Seon Yoo*, Eun Sang Lee**

* Dept. of Industrial Automation, Inha Univ.

** Graduate Student, Dept. of Mech. Eng., Inha Univ.

ABSTRACT

The contact problem of a rigid smooth plane and computer-simulated elastic rough surfaces is studied by divided the sampling intervals into three groups.

An iso-parametric element is used to calculate the contact pressure-separation relationship accurately.

It is obtained that : 1) the more asperity shows the higher contact pressure, 2) the smaller element gives the better results but the effect is negligible.

1. 서 론

표면조도는 전기접촉저항[1]과 거칠은 접촉 영역에 따른 열접촉저항[2] 그리고 윤활에서의 거칠접촉[3]과 같은 많은 공학적 적용에 중요한 영향을 미친다. Greenwood와 Williamson[4]은 표면의 측면 높이분포가 Gaussian 분포에 근접함을 발견하였다. Gaussian 높이분포를 기초로 하여, 모든 거칠은 정점이 같은 반경을 갖고, 거칠기 상호작용을 무시한다는 가정하에서 탄성의 거칠은 판과 평평한 강체와의 접촉에 대한 연구를 하게 되었다. Whitehouse와 Archard[5]는 자동상관함수가 지수함수 형태로 되고, 표면높이가 Gaussian 분포로 된다는 가정하

에서 정점의 높이분포와 거칠기의 곡률분포를 유도해 내었다. Onions와 Archard[6]는 거칠기 상호작용을 무시한다는 가정하에서 탄성접촉문제를 해석하였다. 여기서 Onions와 Archard는 접촉압력값이 Greenwood와 Williamson이 구한 값보다 높은 값을 얻었다. Bush, Gibson, Thomas[7]는 Nayak[8]의 표면조도 모델을 기초로 거칠은 탄성접촉문제를 해석하였다. 거칠은 정점은 포물면이고, 역시 거칠기의 상호작용을 무시하였다. 위의 모든 모델에서 거칠기의 상호작용이 무시된다고 가정하였다. 그러나 거칠기 상호작용이 강한 하중의 경우엔 부적합하다.

본 논문에서는 자동상관함수 길이를 3종류의

표본추출길이를 구분함으로써 거칠기 상호작용을 고려하였다. Boussinesq의 작용력과 변위 관계식을 유한요소법에 의해 해석하였다. 접촉압력분포의 계산을 위해 등계수요소를 사용하였다.

2. 해 석

Fig. 1은 해석 영역의 기하학적인 형상을 나타낸 그림이다. 그림에서 표면 I은 평평한 강체이고, 표면 II는 거칠은 탄성판이다. 표면 I을 표면 II에 접촉시킴으로써 발생하는 접촉압력을 해석하기 위해 Timoshenko [9]로부터 다음식이 나온다.

$$W_1 + W_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint \frac{q dA}{r} \dots\dots\dots(1)$$

여기서 r은 기준점으로부터 요소까지의 거리이다. Cylindrical Coordinates인 방정식(1)을 Cartesian Coordinates로 변환하면 다음과 같다.

$$W_1 + W_2 = \frac{2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x, y)}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} dx dy \dots\dots\dots(2)$$

여기서

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}$$

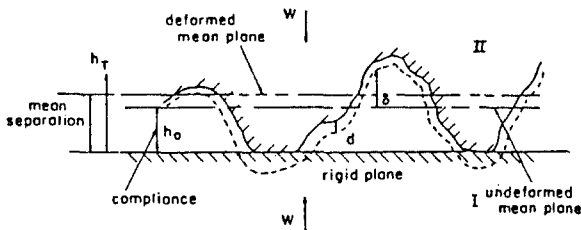
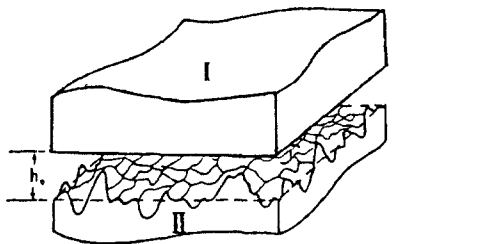


Fig. 1. Configuration of elastic rough contact

$$dA = dx dy$$

$$q = p(x, y)$$

$$E = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right]^{-1}$$

변위 \$W_1, W_2\$를 Fig. 1에서의 기호로 표시하면

$$W_1 + W_2 = h_r(x, y) - \delta(x, y) - h_0 \dots\dots\dots(3)$$

이다. 그러므로 전체간격은 다음과 같으며

$$h_r(x, y) = \delta(x, y) + d(x, y) + h_0 \dots\dots\dots(4)$$

여기서 \$d(x, y)\$는 탄성변형이다.

앞의 방정식으로부터

$$h_r(x, y) = \delta(x, y) + \frac{2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x, y)}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} dx dy + h_0 \begin{cases} = 0 : \Omega \text{ (내부 } (x, y) \text{ 시)} \\ > 0 : \Omega \text{ (외부 } (x, y) \text{ 시)} \end{cases} \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{그리고 } p(x, y) \begin{cases} > 0 : \Omega_c \text{ (내부 } (x, y) \text{ 시)} \\ = 0 : \Omega_c \text{ (외부 } (x, y) \text{ 시)} \end{cases} \dots\dots\dots(6)$$

여기서 \$\delta(x, y)\$는 표면조도이다. 조도의 매개 변수의 연구는 알려진 통계적 매개 변수를 갖는 표면이 요구되고, 거칠은 표면조도를 직접 측정하는 것 보다 수치적으로 해결하는 것이 편리하다.

그러나 지정된 표면의 성질 즉, 조도로써 정확히 요구되는 값을 얻으려면 측정된 조도를 사용하는 것이 타당하다. 그리하여 측정식 표면 조도계(Bendix Co, Ltd)로 모델로 지정된 거칠은 표면을 갖는 시편(SM20C)의 조도를 측정하였다. 방정식(5)를 무차원화 시키기 위해서는 표준편차(\$\sigma\$)가 필요하다. 측정된 조도의 측면도(Fig. 2)에서 표준편차(\$\sigma\$)는 다음과 같다.[10]

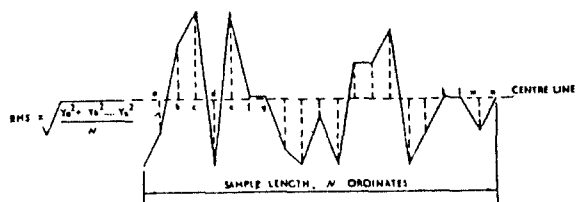


Fig. 2. Surface texture parameters.

$$R.M.S. (\sigma) = \left\{ \sum \frac{Y_n^2 + Y_b^2 + \dots + Y_n^2}{N} \right\}^{1/2} \quad (7)$$

Patir [11]에 의해서 Ω_N 내의 격자점 표면높이는 Gaussian 높이분포와 2 선형 자동상관 함수 $R(\lambda_x, \lambda_y)$ 를 갖게 된다. 2 선형 자동상관함수는 다음과 같다.

$$R(\lambda_x, \lambda_y) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{|\lambda_x|}{\lambda_x^*} \right) \left(1 - \frac{|\lambda_y|}{\lambda_y^*} \right) & |\lambda_x| \leq \lambda_x^* \text{ 그리고 } |\lambda_y| \leq \lambda_y^* \text{ 시} \\ 0 & |\lambda_x| > \lambda_x^* \text{ 또는 } |\lambda_y| > \lambda_y^* \text{ 시} \end{cases}$$

Ω_c 내의 격자점 접촉압력은 실제 접촉영역 (Ω_c) 내에서만 존재한다.

무차원 하기 위하여 다음의 변형을 이용하였다.

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{l_x} & Y &= \frac{y}{l_x} & H_0 &= \frac{h_0}{\sigma} \\ \bar{\delta}(X, Y) &= \frac{\delta(x, y)}{\sigma} & P(X, Y) &= \frac{p(x, y)}{E} \cdot \frac{\lambda_x^*}{\sigma} \\ B &= \frac{2}{\pi} \frac{l_x}{\lambda_x^*} \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 식(9)를 이용하여 식 (5)를 무차원화하면 다음과 같다.

$$\bar{\delta}(X, Y) + B \iint_{\Omega_N} \frac{P(X, Y)}{[(X_0 - X)^2 + (Y_0 - Y)^2]^{(1/2)}} dx, dy + H_0 \begin{cases} = 0 & \Omega_c \text{ 내부 } (X, Y) \text{ 시} \\ > 0 & \Omega_c \text{ 외부 } (X, Y) \text{ 시} \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{그리고 } P(X, Y) = \begin{cases} > 0 & \Omega_c \text{ 내부 } (X, Y) \text{ 시} \\ = 0 & \Omega_c \text{ 외부 } (X, Y) \text{ 시} \end{cases} \quad (11)$$

식(10)의 계산에서 등계수요소와 Gaussian 적분법을 사용하면 다음과 같다.

$$P = \sum N_k P_k \quad X = \sum N_k X_k \quad Y = \sum N_k Y_k$$

여기서 $K = 1, 2, \dots$ (node) (12)

그래서

$$\begin{aligned} B \iint_{\Omega_N} \frac{P}{[(X_0 - X)^2 + (Y_0 - Y)^2]^{(1/2)}} dx dy \\ = B \sum_K \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sum N^K P_K}{[(X_0 - \sum N_k X_k)^2 + (Y_0 - \sum N_k Y_k)^2]^{(1/2)}} \det J d\xi d\eta \end{aligned}$$

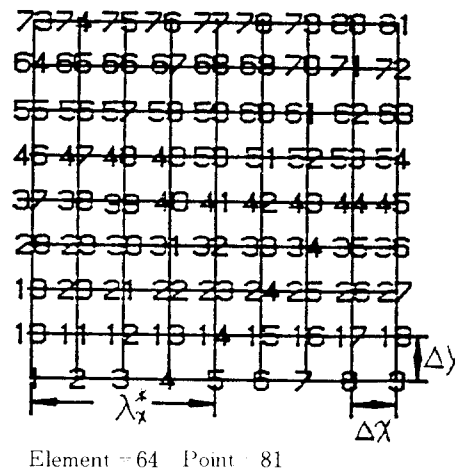
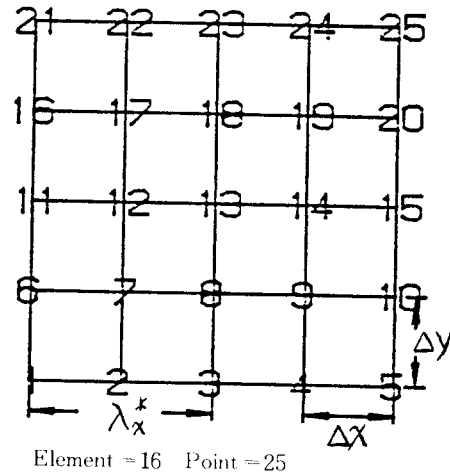
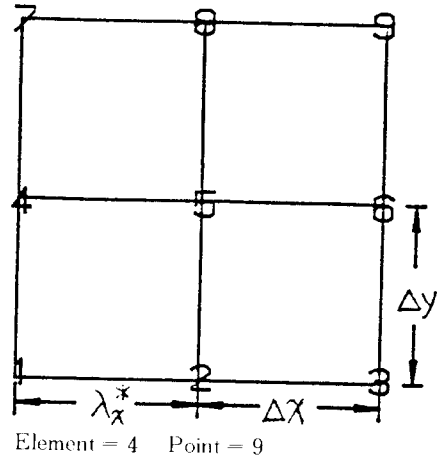


Fig. 3. Domain discretization.

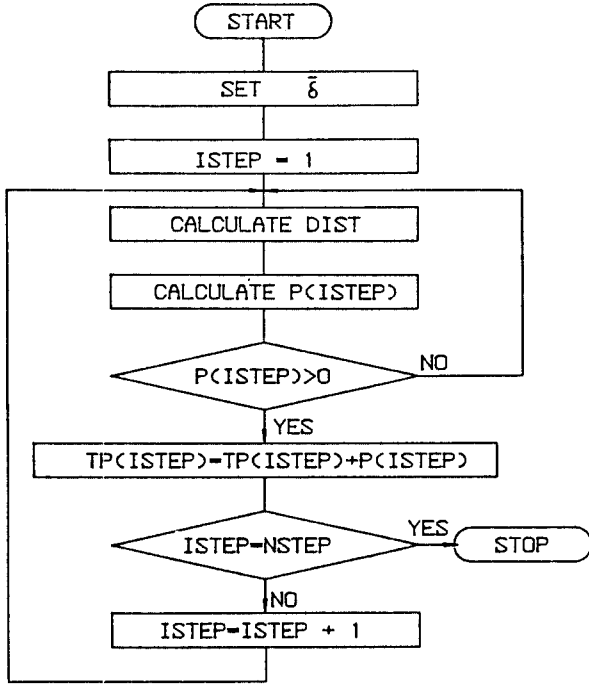


Fig. 4. Flowchart of solution scheme.

여기서 I = 1, 2, ... (element)

$$= B \sum_i \sum_j \sum_k a_i a_j \frac{\sum_k N_k P_k}{\det J [(X_0 - \sum_k N_k X_k)^2 + (Y_0 - \sum_k N_k Y_k)^2]^{1/2}} \quad (13)$$

여기서 i, j = 1, 2, ... (Gauss Order)

a_i, a_j = (weighting factor)

그러므로 식(10)은 다음과 같이 된다.

$$\bar{\delta}(X, Y) + B \sum_i \sum_j \sum_k a_i a_j \frac{\sum_k N_k P_k}{[(X_0 - \sum_k N_k X_k)^2 + (Y_0 - \sum_k N_k Y_k)^2]^{1/2}} \det J + H_0 = 0 \quad (14)$$

여기서 적용영역은 Ω_c 내이다.

식 (14)를 푸는 수치적 과정은 2 표면의 간격이 점점 접근할 때 변형과정을 Simulation한 것이다. Fig. 3은 요소분할에 대한 그림을 도시하였다.

x와 y에 따른 측면도의 상관길이는 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_x^* = n \Delta x \quad \lambda_y^* = m \Delta y \quad (15)$$

여기서 m, n은 정수이다.

Whitehouse와 Archard [5]에 의해서 측정된 측면도의 통계적 계수가 표본추출길이에 의존한다는 것이다. 자동상관길이에 따른 표본추출길이를 많이 지정할때 즉, 식 (15)서 m, n이 커질 때 상세하게 조도에 따른 격자점의 압력을 구할 수 있다.

본 논문에서는 표본추출길이를 3 가지 형태로 구분하였다.

i) 상관길이가 표본추출길이가 같을 때, $\lambda_x^* = \lambda_y^* = \Delta x = \Delta y$. 이웃한 격자점의 표면높이에 따른 상호작용이 없다. 격자점이 전체영역을 차지한다.

ii) 상관길이의 $\frac{1}{2}$ 이 표본추출길이일때,

$\lambda_x^* = \lambda_y^* = 2 \Delta x = 2 \Delta y$. 이웃한 격자점의 표면높이에 따른 상호작용이 있다. 격자점이 전체영역의 $\frac{1}{4}$ 을 차지한다.

iii) 상관길이의 $\frac{1}{4}$ 이 표본추출길이일때,

$\lambda_x^* = \lambda_y^* = 4 \Delta x = 4 \Delta y$. 이웃한 격자점의 표면높이에 따른 상호작용이 매우 크다. 격자점이 전체영역의 $\frac{1}{16}$ 을 차지한다.

이런 3 가지 형태에 따라 Fig. 3는 상관길이가 표본추출길이의 관계에 의하여 3 가지 형태로 요소분할하였다.

강제판과 탄성판의 기준면과의 간격을 3.0부터 -0.2까지 0.2씩 감소시킴으로써 각각의 경우에 따라 접촉압력을 구한다. 이러한 과정을 Fig. 4에 flow chart로 도시하였다.

3. 결과 및 고찰

이론 해석 결과의 타당성을 검토하기 위하여 이론 해석한 Computer Program를 검증하였다. 정사각뿔(가로=세로=높이=10mm, SM20C)을 모델로 2mm탄성변형시 정확한 정점압력과 Fig. 3의 Element 4, Point 9으로 요소분할하여 이론 해석한 압력값과의 오차는 약 3% 정도가 생기므로 해석의 결과가 타당하다고 볼 수 있다.

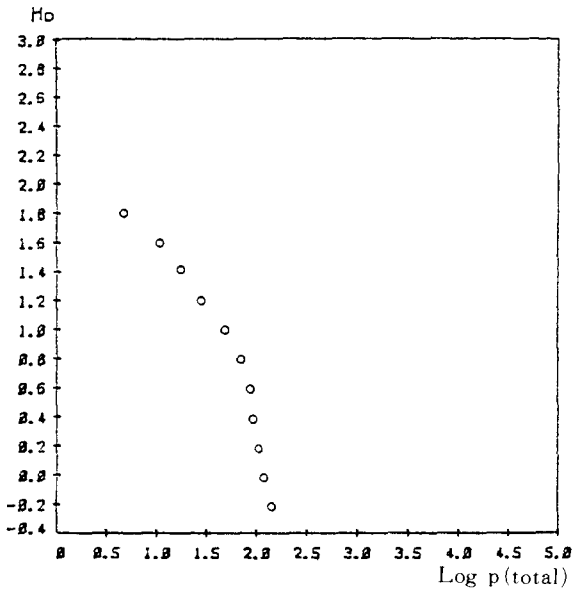


Fig. 5. Press-separation relationship
 $(\lambda_x^* = \lambda_y^* = 1\Delta X = 1\Delta Y)$

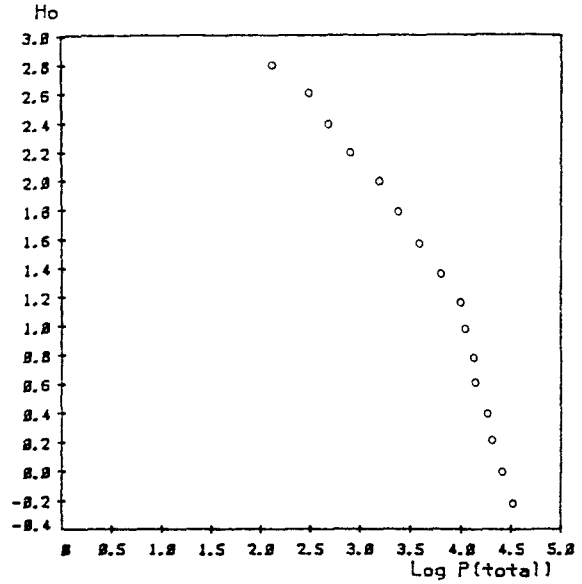


Fig. 7. Press-separation relationship
 $(\lambda_x^* = \lambda_y^* = 4\Delta X = 4\Delta Y)$

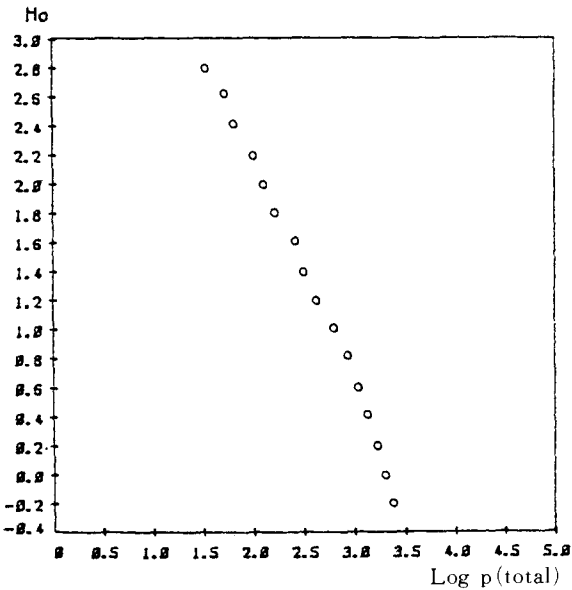


Fig. 6. Press-separation relationship
 $(\lambda_x^* = \lambda_y^* = 2\Delta X = 2\Delta Y)$

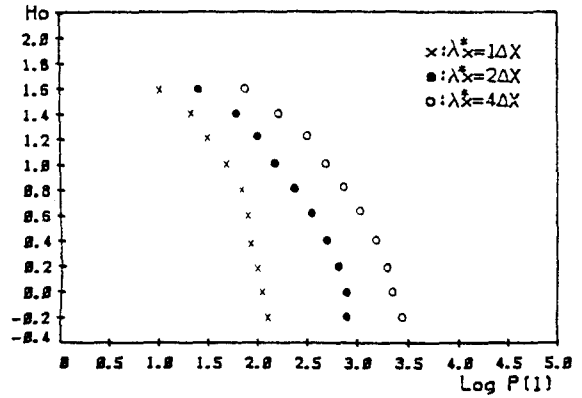


Fig. 8. Press-separation relationship (press 1)

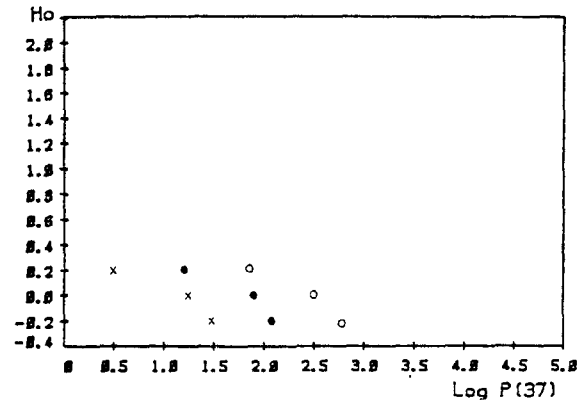


Fig. 9. Press-separation relationship (press 37)

Fig. 5, 6, 7은 각각 3가지 형태로 구분해서 구한 압력과 분리의 관계를 도시한 것이다. 분리값이 점점 작아질 때 마다 압력값은 상승한다. Fig. 8, 9, 10, 11은 3가지 형태의 각 한점의 압력값을 비교 도시한 것이다. 전압력이나

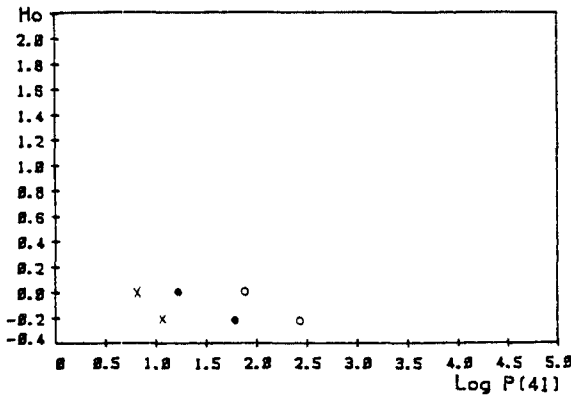


Fig. 10. press-separation relationship (press 41)

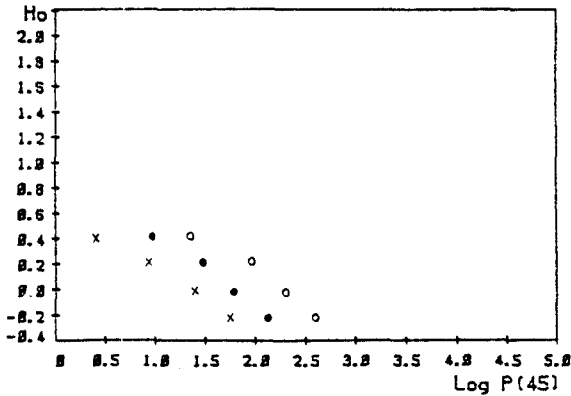


Fig. 11. press-separation relationship (press 45)

각각의 압력의 차이가 도시된 바와 같이 나타나
는 이유는 요소분할을 많이 한 경우는 격자점과
사이간격이 근접되어 이웃한 격자점에 상호작
용을 많이 미치기 때문이다.

또한, 매우 거친 시편 즉 조도가 매우 큰 시
편을 모델로 하였기 때문이다. 조도가 작은 시
편을 사용하였다면 압력값의 차는 미소하였을
것이다. 매우 조도가 큰 재료의 접촉압력을 구
할 경우 상호작용이 현저함으로 상관길이에 따른
표본추출길이를 적게 선택한다면 실제압력값과
일치하는 값을 얻을 수 있다.

4. 결 론

평평한 강체와 거칠은 탄성판과의 접촉시 접
촉압력을 수치적으로 해석하면서 다음과 같은
결론을 얻었다.

1) 조도가 큰 재료는 다른 재료와 접촉시 서
로 상호작용을 함으로써 조도가 작은 재료보다
접촉압력이 크다. 그러므로 자전거, 자동차의
브레이크의 면이 거칠수록 제동력이 크다.

2) 가능한한 요소분할을 적게 함으로써 실제
의 값과 거의 일치하게 된다. 그러나, 조도가
매우 작은 경우에는 많은 요소분할이 불필요하
다.

3) 본 논문의 이론적 해석은 탄성적인 면접
촉, Ball 베어링의 접촉 등 물체표면의 고저를
알 수 있는 경우의 접촉에 대해서 적용되어 질
수 있다. 계기로 측정할 수 없는 아주 미세한
재료의 접촉도 거칠기 상태와 재료의 고유한 특
성치만 주어지면 적용할 수 있다.

기 호 (Nomenclature)

d 거칠기 탄성변형 (elastic deformation
of asperity)

E_1, E_2 탄성계수 (Young's moduli)

h_0 강체판으로부터 기준판까지 간격.

h_r 강체판으로부터 거칠기의 총 간격.

l_x Ω_x 영역의 x 방향 길이

$p(\)$ 접촉압력 (asperity contact pressure)

$$P(\) = \frac{P(\) \lambda_x^*}{E \sigma}$$

q 압력강도 (intensity of pressure)

$R(\)$ 자동상관함수 (auto correlation function)

W_1, W_2 변위 (displacements)

$\Delta x, \Delta y$ 표본추출길이 (sampling interval)

Y_0, \dots, Y_n 중심선부터 측면도 표면까지 수직거리

$\delta(\)$ 표면조도 (surface roughness)

λ_x^*, λ_y^* 상관길이 (correlation lengths)

ν_1, ν_2 poisson's ratio

Ω_c 실제 접촉영역

Ω_v 공칭 접촉영역

σ_1, σ_2 (R. M. S.) 표면조도의 표준편차

$$\sigma = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}$$

REFERENCES

1) Holm, R., "Electric Contacts ; Theory

- and Application," 4th ed., New York, Springer Verlag (1970)
- 2) Mikic, B. B., "Thermal contact Conductance ; Theoretical Considerations." *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 17, pp. 205 - 214 (1974)
 - 3) Patir, N. and Cheng, H. S., "An Average Flow Model for Determining Effects of Three-Dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication." *Trans, ASME, J. Lubr. Tech* 100, pp. 12 - 17 (1978)
 - 4) Greenwood, J. A. and Williamson, J. B. P., "Contact of Nominally Flat Surfaces," *Proc. Roy. Soc. Lond*, A295, pp. 300 - 319 (1966)
 - 5) Whitehouse, D. J. and Archard, J. F. "The properties of Random Surfaces of Significance in Their Contact." *proc Roy. Soc. Lond.*, A316, pp. 97 - 121 (1970)
 - 6) Onions, R. A. and Archard, J. F., "The Contact of Surfaces Having a Random Structure," *J. phys. D, Appl. phys.*, 6, pp. 289 - 304 (1973)
 - 7) Bush, A. W. Gibson, R. D., and Thomas, T. R., "The Elastic Contact of a Rough Surface," *Wear*, 35, pp. 87 - 111 (1975)
 - 8) Nayak, P. R., "Random Process Model of Rough Surfaces." *Trans ASME, J. Lubr. Tech.*, 93, pp. 398 - 407 (1971)
 - 9) Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., "Theory of Elasticity." 3rd ed., Mc Graw Hill Book Co. (1970)
 - 10) Sharman, H. B., "Influence of sample size and the relationships between the common surface texture parameters." *Proc. Inst. Mech. Eng.*, London, 182 (3k) pp. 416 - 424 (1967 - 1968)
 - 11) Patir, N., "A Numerical Procedure for Random Generation of Rough Surfaces," *Wear*, 47, pp. 263 - 277 (1978)