

Undular Bore의 발생 과정에 대한 수치해석

배 현 민 · 김 인 철

부산수산대학

(1986년 4월 29일 수리)

Numerical Analysis on the Development of an Undularbore

Heon Meen BAE, In Chull KIM

National Fisheries University of Pusan

(Received April 29, 1986)

A bore is a transition between different uniform flows of water. If a long wave of elevation travels in shallow water it steepens and forms a bore. The bore is undular if the change in surface elevation of the wave is less than 0.28 of the original depth of water.

This paper describes the growth of an undular bore from a long wave which forms a gentle transition between a uniform flow and still water. A physical account of its development is followed by the results of numerical calculations. Finite-difference approximations are used in the partial differential equations of motion.

For undular bores, numerical calculations show that (i) the relationship between relative elevation and relative velocity given by long wave theory is approached for an undular bore, (ii) the amplitude of first crest of an undular bore approaches a finite limit approximately at an exponential rate, and (iii) the distance between the first two crests increases without bound, approximately logarithmically.

기 호 설 명

- h : 정수면의 수심
 λ : 파장
 α : 진폭
 σ : 수심과 파장의 비
 ϵ : 진폭과 수심의 비
 U : 물의 수평 속도
 U_0 : 물의 수평 초기속도
 η : 물의 수직 변위
 η' : 물의 수직 변위의 일시적인 값

서 론

천수 중에서 장파가 진행할 경우, 파면의 경사가 가파르게 되고 bore 를 형성한다¹⁾. bore 는 서로 다른 균

일류 사이의 유동에 대한 변이이고, 일반적으로 균일한 장파형의 개수로에서 많이 연구 되어진다²⁾. bore 는 일반적으로 격렬하고, 쇄파대에 이르면 파고는 수심의 몇배나 된다. 그러나 bore 가 격렬하지 않고 약할 경우 즉 파고 변화가 수심보다 훨씬 적을 때는 파장이 수심보다 수배나 되는 많은 파의 연속으로 이루어진다. 그리고 bore 는 긴 수평수로내의 정수면 위로 갑자기 많은 량의 물을 내보내면 생기는데 이때, 파면은 처음에 매우 완만한 경사를 가지다가 차츰 그 경사가 가파르게 되고, bore 를 형성한다^{3,4)}.

어떤 높이를 가진 파고의 bore 가 일정한 수심을 가진 정수면의 수로에 진행하여 갈때, bore 의 파고와 정수면 수심과의 비가 0.75 보다 작을 경우에는 undular bore 로 되고, 이 비가 0.75 보다 큰 경우에는 undular 형태의 파가 생겨도 파형이 급진적으로 불안정하게 되어 파면이 계단과 같은 형상으로 진행하

는 이상적인 bore에 가까운 형태로 된다. 수평한 수로상을 가진 장방형 수로의 정수면에 bore를 진행시킨 Favre (1935)의 실험에 의하면 bore의 파고와 정수면 수심과의 비가 0.28 보다 작을때 완전한 undular bore의 형태가 나타난다⁵⁾. 그러나, Binnie and Orkney (1955)의 논리에 의하면, 이 비가 0.28 보다 크고, 0.75 보다 작을 경우 여전히 undular bore가 되지만, 굽이치는 파고중의 처음 하나는 적어도 부서진다³⁾. 또, undular bore가 생기는 한계로 Keulegan and Patterson(1940)은 undular bore의 최대파고와 이상적인 bore의 높이와의 비가 1.5로 되는 것을 논의했다⁶⁾. 그리고 이들은 bore의 파고와 정수면 수심과의 비가 0.28~0.75 사이에서는 크노이드파에 접근하는 특징이 있음을 보여준다. 크노이드파는 처음 Korteweg-de Vries(1895)에 의해 해석적으로 유도된 정상 천이해파이다⁷⁻¹²⁾.

본 논문에서는 균일류와 정수면 사이의 완만한 파면경사를 가지는 장파에서 undular bore가 발생되어 가는 과정을 수치적으로 해석한다.

이론해석

1. 물리적 해석

모든 수심의 해역에서 전진하는 파도의 성질을 표현하기 위한 단일하고 계속적인 방법은 크노이드파에 의한 것이며, 심해의 시누소이드 형의 파도와 천해의 교립파는 모두 크노이드파의 특수한 경우이다^{1,14,15)}. Fig.1과 같은 장진수파를 고려하고, 수면의 변화는 처음에 1보다 훨씬 적다고 가정하면, $\sigma^2 \ll \epsilon$ 이다. 여기서 σ 는 수심과 파장의 비로서 $\sigma = h/\lambda$ 이고, ϵ 는 진폭과 수심의 비로 $\epsilon = a/h$ 이다. 파의 형태는 σ^2 이 ϵ 에 가까워짐에 따라 차츰 경사가 가파른 파도로 변하고 이러한 파의 운동은 Airy 이론⁴⁾에 의해 해석된다. 두개의 다른 수면 사이에서 물의 표면은, 물의 수직가속도에 기인한 수평압력 차이 때문에 가파르게 된다. 물의 수직가속도는 E와 C사이에서 위로 향한다. 표면의 바로 밑에서 아래로 향한 압력 기울기는 이 가속도가 발생하기 위해서 정수압보다 커야 한다. 같은 방법으로, C와 A사이의 밑으로 향한 압력 기울기는 물이 밑으로 향한 가속도를 가지기 때문에 정수압보다 작아야 한다. 정수압의 최대변화는 B와 D사이에서 일어나며, B와 D점은 수직가속도와 표면곡률이 최대인 곳이다. D의 바로 밑의 압력은 정수압보다 크고, B의 바로 밑의 압력

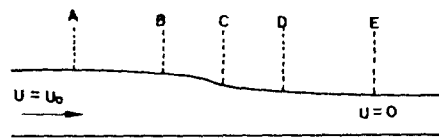


Fig.1 The initial wave

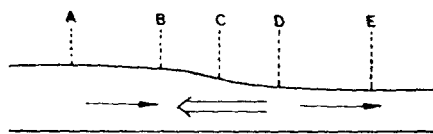


Fig.2 The extra horizontal pressure gradients due to the vertical acceleration of the water

은 정수압 보다 작다. 따라서 수평압력 기울기에 영향을 주어 D로부터 B로 향하는 수평압력 기울기가 생긴다. 같은 방법으로, D에서는 E로 향하고 A에서는 B로 향하는 작은 수평압력 기울기가 발생한다. 이와같은 정수압의 가정으로부터 기대되는 파형의 변화를 비교해보면 B점에서는 높이 올라가는 파정이 생기며, D점에서는 깊이 내려가는 파정이 생긴다. 따라서 A점에서는 D점 보다 작은 파정이 형성되고, E점에서는 B점 보다 작은 파정이 생긴다. 이 과정은 계속되며 파가 연속적으로 생성된다. 이때 파의 진폭은 점점 커져서 undular bore를 형성한다¹³⁾.

2. 적합방정식

사용되는 변수는 정수면으로 부터의 물의 수직 변위인 $\eta^*(x, t)$ 와 물의 수평 속도인 $U^*(x, t)$ 이다.

무차원 변수는 다음과 같이 정의한다.

$$\eta = \eta^*/h, \quad U = U^*/(gh)^{1/2}$$

$$x = x^*/h, \quad t = t^* (g/h)^{1/2}$$

h 는 정수면의 수심을 나타내며, 상수로 주어진다. 독립변수로서 U 와 η 를 사용한 연속방정식은 다음과 같은 완전한 형태로 얻어진다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \eta)U] = 0 \quad (1)$$

흐름은 비회전운동으로 가정하고, $\epsilon = 0(\sigma^2) \ll \dots$ 이라 하면, 교립파와 크노이드파에 적합하다.

운동량방정식은,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial t} + 0(\epsilon^2 \sigma^3) \quad (2)$$

이다. (2)식의 좌변 세번째 항은 압력에 대한 물의 수직가속도의 효과를 나타낸다. (1)식과 (2)식은 한쪽 방향으로만 흐르는 파의 가정에 의해 다음과 같이 간단히 나타내어진다. 즉, +x방향으로만 흐르는 경우

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{3}{2} U \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + 0(\epsilon^2 \sigma^3) \quad (3)$$

이고, $\eta = U + 0(\epsilon^2)$ 이다.

이 방정식에 대한 해석적인 해는 단지 고립파와 크노이드파에 대해서만 알려져 있다. 유한차분법을 이용하여 Fig.1과 같은 초기파로부터 undular bore 의 발생에 상응하는 방정식의 수치해를 계산한다.

3. 수치해석

방정식 (1), (2)와 (3)은 포물-쌍곡선 식이라한다. (3)식에서 $0(\epsilon^2 \sigma^3)$ 은 중요하지 않으므로 생략한다.

그러나 이런 차수 높은 도함수들을 어떤 특별한 방법으로 해석해 나가면 더욱 근사한 값으로 될 것이다

(3)식에 대한 유한차분 근사방정식은,

$$\begin{aligned} & \frac{U_{r,s+1} - U_{r,s}}{\Delta t} \\ & + \left(1 + \frac{3}{2} U_{r,s}\right) \frac{U_{r+1,s+1} - U_{r-1,s+1} + U_{r+1,s} - U_{r-1,s}}{4\Delta x} \\ & = \frac{1}{6\Delta x^2 \Delta t} (U_{r+1,s+1} - 2U_{r,s+1} + U_{r-1,s+1} - U_{r+1,s} \\ & \quad + 2U_{r,s} - U_{r-1,s}) \end{aligned} \quad (4)$$

가 되고 $U_{r,s} = U(r\Delta x, s\Delta t)$ 이다. $U_{r,s}$ ($r=1, 2, 3, \dots, n$) 값과, $U_{1,s+1}$, $U_{n,s+1}$ 의 경계값으로 하여 $U_{r,s+1}$ 의 값을 matrix 계산을 통해 구한다. 해는 시간에 대해 단계적으로 계산하였다. Δx 와 Δt 는 초기단계를 제외하고는 같이 Δ 로써 취급한다.

(2)식과 (3)식에 대한 확실한 유한차분 근사치는 불안정하므로 다음과 같이 해석한다. 연속방정식의 근사식은 한 단계가 지난 시간에서, η 의 일시적인 값 $\eta'_{r,s+1}$ 을 계산하기 위해 사용되고, 이 값으로 운동량 방정식의 근사식에서 $U_{r,s+1}$ 의 값을 구한다. 같은 방법으로 연속방정식에서 $\eta_{r,s+1}$ 의 정확한 값을 구한다. (1)식과 (2)식에 대한 유한차분 방정식은 다음과 같다.

(i) $\eta'_{r,s+1}$ 을 구하기 위한 연속방정식은,

$$\begin{aligned} & \frac{\eta'_{r,s+1} - \eta_{r,s}}{\Delta t} + \left[1 + \frac{1}{2}(\eta'_{r,s+1} + \eta_{r,s})\right] \frac{U_{r+1,s} - U_{r-1,s}}{2\Delta x} \\ & + U_{r,s} \frac{\eta_{r+1,s} - \eta_{r-1,s}}{2\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

이고

(ii) $U_{r,s+1}$ 을 구하기 위한 운동량방정식은,

$$\begin{aligned} & \frac{U_{r,s+1} - U_{r,s}}{\Delta t} + U_{r,s} \frac{U_{r+1,s+1} - U_{r-1,s+1} + U_{r+1,s} - U_{r-1,s}}{4\Delta x} \\ & + \frac{\eta'_{r+1,s+1} - \eta'_{r-1,s+1} + \eta_{r+1,s} - \eta_{r-1,s}}{4\Delta x} \\ & = \frac{1}{3} \frac{U_{r+1,s+1} - 2U_{r,s+1} + U_{r-1,s+1} - U_{r+1,s} + 2U_{r,s} - U_{r-1,s}}{\Delta x^2 \Delta t} \end{aligned} \quad (6)$$

이 된다.

그리고, (iii) $\eta_{r,s+1}$ 에 대한 연속방정식은,

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{r,s+1} - \eta_{r,s}}{\Delta t} + (1 + \eta_{r,s}) \\ & \frac{U_{r+1,s+1} - U_{r-1,s+1} + U_{r+1,s} - U_{r-1,s}}{4\Delta x} \\ & + \frac{1}{2}(U_{r,s+1} - U_{r,s}) \frac{\eta_{r+1,s} - \eta_{r-1,s}}{2\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

이 된다. 위의 근사방정식들에 대한 정확한 계산은 이미 알려져 있는 고립파의 해석해를 사용하여 구했다. 진폭이 0.1인 고립파를 (4)식~(7)식의 초기조건으로 사용하여 계산하였다.

결과 및 고찰

초기파 형태에 대한 수치계산은 대부분 다음식으로 주어진다.

$$U = \frac{1}{2} U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x}{a}\right)\right] \quad (8)$$

$$\eta = U + \frac{1}{4} U^2 \quad (9)$$

$t=0$ 인 경우에 대해서 (4)식의 초기상태를 계산하였다. (9)식의 η 값은 Airy 이론에 일치하고 a 의 값은 Airy 이론⁴⁾에 의해 논의된 초기운동에 대한 것으로 충분히 크게 취했다. 따라서 방정식들이 작은 진폭에 대해서만 정확하다. U_0 는 항상 0.2 또는 그보다 더 작게 취하기 때문에 0.1과 0.2를 택했다. 유한차분 방정식 (4)에 대한 결과는 Fig. 3, Fig. 4에 나타내었다. 이때, $\Delta=0.2$ 로 하고, 각각의 경우 $U_0=0.1$ 과 $U_0=0.2$ 그리고 $a=5$ 와 $a=8$ 을 사용하였다. Airy 이론에 의해 주어지는 해는 점선으로 표시, 비교되어지고, 초기에서는 거의 일치한다. Airy 이론에 위배되는 undular bore의 진행은 물리적 해석을 확실하게 해 주는 것으로 보인다. 초기파정의 속도는 같은 진폭의 고립파와 같고, undular bore에 대한 처음의 파정은 대략 지수함수의 비율로 감소하여 0에 수렴하고, 시간 $t=20$ 이 지난후 undular bore는 안정된 형태를 취하여 시간이 증가함에 따라 처음 두 파정 사이의 거리는 거의 대수적으로 발산한다. 그리고 일반적으로 안정된 상태의 undular bore를 관찰해 보면, bore의 파두 부분에 거의 균일한 파의 연속이 있다. Keulegan and Patterson(1940)은 이 파의 연속이 Favre의 실험에서 크노이드파와 같은 성질이 있는 것을 논증했다⁵⁾. 그러나 Benjamin and Lighthill (1954)은 균일한 흐름의 형태에 단 균일한 크노이드파의 연속이 있고, 흐름에 에너지의 변화

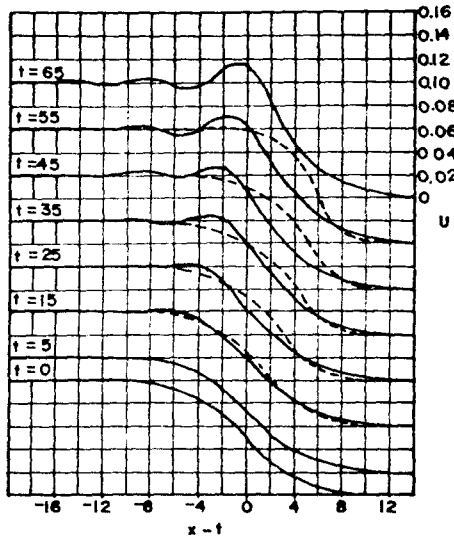


Fig. 3 Development of an undular bore, using eg. (3), with $\Delta=0.2$, $U_0=0.1$, $a=5$. The solution of Airy's theory is indicated by a dashed line.

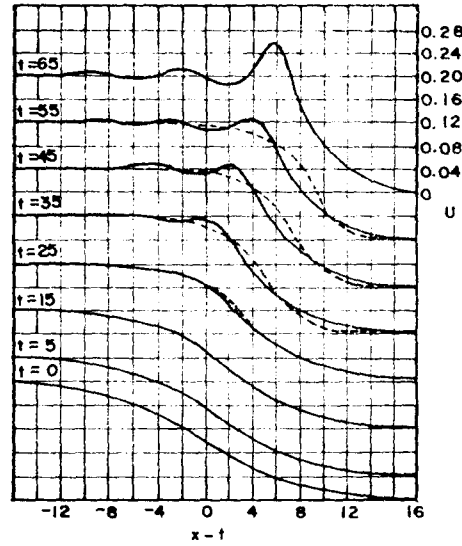


Fig. 4 Development of an undular bore, using eg. (3), with $\Delta=0.2$, $U_0=0.2$, $a=8$. The solution of Airy's theory is indicated by a dashed line.

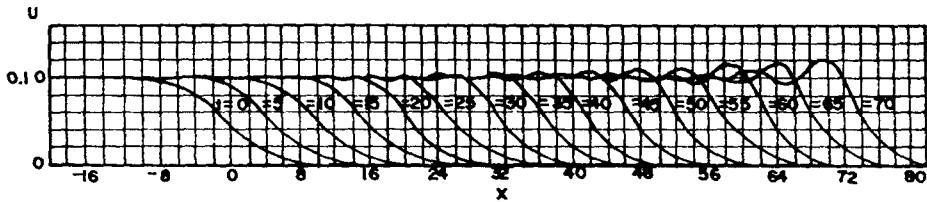


Fig. 5 Development of an undular bore depends on x axis with $\Delta=0.2$, $U_0=0.1$, $a=5$.

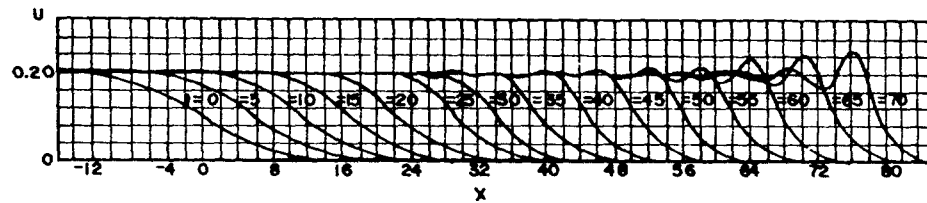


Fig. 6 Development of an undular bore depends on x axis with $\Delta=0.2$, $U_0=0.2$, $a=8$.

가 있다면 그렇지 않다고 논의했다¹⁾. (7)식에 대한 계산은 $U_0=0.1$, $a=2$, $\Delta=0.25$ 에 대하여 행하였으며, 이 결과는 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 5와 Fig. 6에는 x 축에 대한 undular bore의 발생과정을 도시하였다. Fig. 3, Fig. 4에서 보면 진폭이 작은 경우가 진폭이 큰 경우보다 undular bore의 발생이 빨리 일어나며, 진폭이 큰 경우가 진폭이 작은 경우보다 파장이 높고 올라간다. Fig. 7에서 undular bore는 시간이 진행됨에 따라 거의 안정된 상태에 이르게 된

다.

결 론

undular bore의 발생과정에 대한 수치해석의 결과에 의하면 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(1) 초기속도가 $U_0=0.2$ 보다 작은 경우 유한차분법을 이용하여 undular bore의 발생을 해석할 수 있다.

Undular Bore의 발생과정에 대한 수치해석

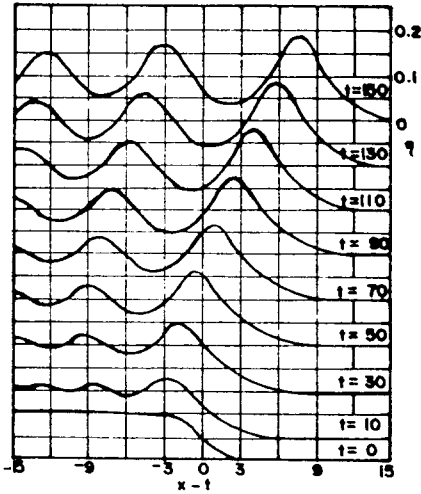


Fig.7 Development of an undular bore, using eq. (1), (2), with $U_0=0.1$, $a=2$, and $\Delta=0.25$.

(2) undular bore에 대한 처음의 파정은 대략 지수함수의 비율로 감소하여 0에 수렴한다.

(3) 진폭이 작은 경우가 진폭이 큰 경우보다 undular bore의 발생이 빨리 일어나며, 진폭이 큰 경우가 진폭이 작은 경우보다 undular bore의 파정이 높고 올라간다.

(4) 시간 $t=20$ 이 지난 후 undular bore는 안정된 형태를 취하며, 시간이 증가함에 따라 처음 두파정 사이의 거리는 거의 대수적으로 발산한다.

(5) bore의 파고와 정수면 수심과의 비가 0.28보다 작을때 완전한 undular bore의 형태가 나타난다.

참 고 문 헌

- 1) Benjamin, T.B. and M.J. Lighthill(1954) : On cnoidal waves and bores. Roy. Proc. Soc. A, pp.224, 448-460.
- 2) Lamb, H.(1932):Hydrodynamics, 6th ed.. Cambridge University Press, Cambridge.
- 3) Binnie, A.M. and J.C. Orkney(1955): Experiments on the flow of water from a reservoir through an open channel. II. Proc. Roy. Soc.

- A. 230-246.
- 4) Stoker, J.J.(1957): Water Wave. New York: Interscience.
- 5) Favre, H.(1935): Ondes de translation. Paris, Dunod.
- 6) Keulegan, G.H. and G.W. Patterson (1940): Mathematical theory of irrotational translation waves. Nat. Bur. Standards J. Res. 24-101.
- 7) Korteweg, D.J. and G. de Vries(1895): Phil. Mag.(V), 39, 422-443.
- 8) Miura, R.M., C.S. Gardner and M.D.Kruskal (1968): Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. J. Math. and Phys., 9, 1204-1209.
- 9) Gardner, C.S., J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura(1967): Method for solving the Korteweg-deVries equation. Phys. Rev. Lett., 19, 1095-1097.
- 10) Kruskal, M.D., R.M. Miura, C.S. Gardner and N.J. Zabusky(1970): Korteweg-de Vries equation and generalizations. V. J. Math. and Phys., 11, 952-960.
- 11) Zabusky, N.J. and M.D. Kruskal(1965): Interaction of "soliton" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett., 240-243.
- 12) Zabusky, N.J.(1968): Solitons and bound states of the timedependent Schrödinger equation. Phys. Rev., 168. 124-128.
- 13) Wehausen, J.V. and E.V. Laitone(1960): Surface waves, Handbuch der Physik, 9(3), 463-468.
- 14) Friedrichs, K.P. and D.H. Hyers(1954): The existence of solitary waves. Comm. Pure Appl. Math., 7, 517-550.
- 15) McCowan, J.(1891): On the solitary wave. Philos. Mag., 32, 45-58.
McCowan, J.(1894): On the highest wave of permanent type. Ibid., 38, 351-358.