

위상 공액 광공진기의 고유 모드 직교성에 관한 연구

(A Study on the Orthogonality Properties of the Eigenmodes of Phase Conjugate Optical Resonator)

趙濟煌*, 金恩洙*, 楊仁應*

(Che Hwang Cho, Eun Soo Kim and In Eung Young)

要 約

본 논문에서는 처음으로 기존 공진기를 구성하고 있는 mirror를 모두 PCM으로 대체한 위상 공액 공진기 내에서 존재하는 고유 모드 간의 직교성을 이론적으로 규명하였다.

공진기 내에서 전파하는 모드를 Huygens 적분식으로 표현하여 얻어진 횡모드 간의 고유 방정식으로부터 kernel을 찾아 그 kernel이 Hermitian임을 입증함으로써 밝혀진 직교성은 위상 공액 공진기 내의 임의의 한 면에서 한 방향으로 진행하는 모드와 반대 방향으로 진행하는 모드 간에 성립함이 입증되었다. 그리고 이러한 결과는 이미 밝혀진 기존 공진기와 하나의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기 내에서 성립하는 모드 직교성과도 일치함이 분석되었다.

Abstract

In this paper, the orthogonal properties of the eigenmodes of optical resonators which have phase conjugate mirrors at both ends are derived. The modes which propagate in resonators are described by the Huygens integral. Then, the eigenequation which is needed in order to prove the orthogonality of the eigenmodes of the resonator is obtained from this representation. When the kernel being a part of the eigenequation is Hermitian as in conventional resonators and in optical resonator with only one phase conjugate mirror, one can show that the eigenmodes have essentially biorthogonal relations, which are satisfied the set of modes propagating in one direction around the resonator and the adjoint set of modes propagating in the reversed direction.

I. 序 論

최근 비선형 광학 분야에서 OPC(optical phase conjugation)라는 새로운 기술의 출현으로 광을 포함한 모든 전자파 정보의 실시간 처리가 가능하게 되어 이에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다.¹⁾ OPC란 비선형적 광학 현상을 이용하여 임의의 전자파의 위상을 정확히 반전시키는 기술로서, 이러한 성질을 갖

는 실제적인 기구인 PCM(phase conjugate mirror)은 매우 특이한 위상 변환 성질을 갖는다.

즉, PCM에서 반사되는 위상 공액파(phase conjugate wave)는 입사시의 파의 진행로를 정확히 되돌아가는 성질 때문에 시반전파(time-reversal wave)라고도 하는데, 이러한 성질을 이용하여 광정보처리, 비선형 레이저 분광학, optical computing, adaptive optics, 레이저 공진기 등 여러 분야에 응용되고 있다.²⁾

특히 최근에는 기존 공진기를 구성하는 두개의 mirror중 한개, 혹은 두개 모두를 PCM으로 대체함으로써 기존 공진기의 여러가지 단점을 보완할 수 있는 위상 공액 공진기(phase conjugate resonator; PC

*正會員, 光云大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Kwang Woon Univ.)
接受日字: 1985年 10月 15日

R)에 대한 연구가 시도되고 있다.¹³⁾ 지금까지의 연구 결과에 의하면 공진기에 PCM을 사용함으로써 캐비티 내의 여러가지 광학 소자에 의한 위상 왜곡을 보상할 수 있고, 기존 공진기와는 달리 캐비티 길이나 거울의 곡률 반경에 관계없이 모두가 항상 인정하고, 가장 적은 회절 손실을 갖는 공진기가 되며, 공진 주파수가 공진기 길이의 변화에 영향을 받지 않는다는 것 등이 밝혀진 바 있다.¹⁴⁾ 이러한 여러 특성에 의해 PCR은 TEM₀₀모드에서 최대 에너지를 갖는다는 중요한 결과를 얻게 되는데, 이러한 TEM₀₀모드를 얻기 위해서는 공진기 내에 hard-edged aperture나 Gaussian aperture와 같은 complex paraxial element를 삽입하는 것이 필요하다.¹⁵⁾

특히 공진기 내에 hard-edged aperture나 Gaussian aperture가 삽입되는 경우, 공진기의 모드를 유도하기 위해서는 Fox-Li 계산¹⁶⁾과 같은 복잡한 수치 절차를 필요로 하는데 일반적으로 캐비티 내에 존재하는 횡모드(transverse mode) 간의 직교성(orthogonality)이 밝혀지면 이러한 복잡한 수치 절차는 상당히 간단해질 수 있다.¹⁷⁾ 이러한 이유에서 1979년과 1982년도에 Siegman과¹⁸⁾ Hardy¹⁷⁾는 기존 공진기에 대한 모드 직교성과 하나의 PCM으로 구성된 PCR에 대한 모드 직교성을 각각 규명한 바 있다.

그러나 아직 두개의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기에서의 모드 직교성에 대한 연구 결과는 보고된 바 없다. 일반적으로 2개의 PCM을 사용한 PCR의 구성은 대부분 self-pumping⁹⁾으로 이루어지고 있으며, 기존 PCR과 다른 여러가지 특성들이 최근 보고되고 있어^{10,11)} 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 따라서 본 논문에서는 이러한 위상 공액 공진기 내에서 존재하는 횡모드 간의 직교성에 대한 이론적 해석과 그 결과에 대해 논하고자 한다.

II. 고유 모드의 직교성 해석

그림 1은 두개의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기를 나타낸 것이다. 그림 1에서의 캐비티는 일반적으로 복소 ABCD 행렬로 표현되는 일련의 광소자들로 구성되며, PCM에 적용되는 비선형 상호 작용은 축퇴된 4광파 합성(degenerate four-wave mixing; DFWM)으로 가정한다.

그림 1에서 PCM II로부터의 반사파는 PCM의 특성에 의해, 입사된 파의 위상 공액된 형태로 $E_r(x) = \rho_{PCM}(x) E_i^*(x) = |\rho_{PCM}(x)| \exp(j\psi_x)$ $E_i^*(x)$ (1)와 같이 표현할 수 있으며,¹⁷⁾ 윗식에서 $E_i(x)$ 와 $E_r(x)$

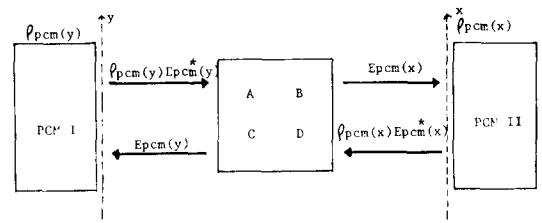


그림 1. 두개의 PCM으로 구성된 PCR
Fig. 1. Schematic description of the PCR with two PCM's at bothends.

는 PCM II로 입사되는 파와 PCM II로 부터 반사되는 파를 각각 나타내며, $|\rho_{PCM}(x)|$ 는 PCM II의 이득 혹은 손실을 나타낸다. 그리고 PCM II가 이상적이거나 aperture되어 있는 경우 위상 ψ_x 는 횡좌표 x와 y에 무관한 일정한 값으로 생각할 수 있다. 같은 방법으로 PCM I에서의 반사파는

$$E_r(y) = \rho_{PCM}(y) E_i^*(y) = |\rho_{PCM}(y)| \exp(j\psi_y) E_i^*(y) \quad (2)$$

와 같이 표현할 수 있다.

윗식에서 $E_i(y)$ 와 $E_r(y)$ 는 PCM I에 입사되는 파와 PCM I에서 반사되는 파를 각각 나타내며, $|\rho_{PCM}(y)|$ 는 PCM I의 이득 혹은 손실을 나타낸다.

위상 ψ_x 는 ψ_y 와 마찬가지로 PCM I이 이상적이거나 aperture되었다고 가정할 때 횡좌표 x와 y에 무관한 일정한 값으로 취급할 수 있다.

그림 1에서 횡방향 고유 모드인 $E_{PCM}(x)$ 가 PCM II 경우, (1)식을 이용하여 PCM I 기준면(즉, y면)에서의 결과적인 필드 분포 $E_{PCM}(y)$ 는 다음과 같이 일반화된 Huygens 적분식¹²⁾으로 표현될 수 있다.

$$r_1 \cdot E_{PCM}(y_1) = \left(\frac{jk}{2\pi B}\right)^{1/2} \int \rho_{PCM}(x_1) E_{PCM}^*(x_1) \cdot \exp\left[-\frac{jk}{2B}(Ax_1^2 - 2x_1y_1 + Dy_1^2)\right] dx_1 \quad (3)$$

(3)식에서 x_1 은 x면에서의 변수이며, y_1 은 파의 한번 왕복을 위한 진행시 y면에서 주어지는 변수가 된다. 그리고 r_1 은 광이 오른쪽에서 왼쪽으로 전파할 때의 손실과 축상 위상 천이(axial phase shift)를 나타내는 상수이다. 같은 방법으로 횡방향 고유 모드인 $E_{PCM}(y)$ 가 PCM I에 입사될 때 (2)식을 이용하여 PCM II 기준면(즉, x면)에서의 결과적인 필드 분포 $E_{PCM}(x)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$r_2 \cdot E_{PCM}(x_2) = \left(\frac{jk}{2\pi B}\right)^{1/2} \int \rho_{PCM}(y_1) E_{PCM}^*(y_1) \cdot \exp\left[-\frac{jk}{2B}(Dy_1^2 - 2y_1x_2 + Ax_2^2)\right] dy_1 \quad (4)$$

(4)식에서 x_2 는 파가 캐비티 내에서 한번 왕복한 후 x

면에서 주어지는 변수이다. 그리고 r_2 는 광이 왼쪽에서 오른쪽으로 전파할 때의 손실과 축상위상천이를 나타내는 상수이다. 그림 1에서 캐비티 내의 파가 왼쪽으로 진행하는 것을 표현하는 (3)식과, 오른쪽으로 진행하는 것을 표현하는 (4)식의 행렬 성분 A와 D는 파의 전파 방향이 정반대이므로 서로 바뀌어 주어지게 된다.

그리고 (3)식과 (4)식으로 부터 $E_{PCM}(x)$ 에 대한 고유방정식을 구하기 위해 (3)식의 양변을 공액 복소를 취하여 (4)식에 대입하면,

$$\begin{aligned} \Gamma_1^* \cdot \Gamma_2 E_{PCM}(x_2) = & \left| \frac{k}{2\pi B} \right| \iint \rho_{PCM}(y_1) \rho_{PCM}^*(x_1) E_{PCM} \\ & (x_1) \cdot \exp \left[\frac{jk}{2} \left\{ \frac{A^*}{B^*} x_1^2 - \frac{2x_1 y_1}{B^*} + \frac{D^*}{B^*} y_1^2 - \frac{D}{B} y_1^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2y_1 x_2}{B} - \frac{A}{B} x_2^2 \right\} \right] dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (5)$$

와 같다.

(5)식은 그림 1에서 파가 x면에서 출발하여 한번 캐비티 내를 왕복한 후 같은 x면에서 주어지는 결과적인 필드 분포를 나타낸다. 그리고 뒤에서 언급되는 것으로서 고유방정식의 kernel이 Hermitian 임을 입증할 때 일반적으로 변수 x_1 과 x_3 , 그리고 변수 y_1 과 y_2 가 동시에 교환되어야 하므로 변수 y_2 를 포함한 방정식이 필요하다. 여기서 y_2 는 캐비티 내의 파가 두번째 왕복을 위한 진행시 y면에서의 변수가 되므로 두번째 왕복후의 결과적인 필드 분포를 구할 필요가 있다.

따라서 캐비티 내의 파가 두번째로 x면에서 출발하여 y면에서 관찰되는 결과적인 필드 분포와, y면에서 출발하여 x면에서 관찰되는 결과적인 필드 분포는 앞에서 구한 (3)식과 (4)식과 같이 Huygens 적분식으로 표현하면 다음과 같이 각각 주어진다.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \cdot E_{PCM}(y_2) = & \left(\frac{jk}{2\pi B} \right)^{1/2} \int \rho_{PCM}(x_2) E_{PCM}^*(x_2) \\ & \cdot \exp \left[- \frac{jk}{2B} (Ax_2^2 - 2x_2 y_2 + Dy_2^2) \right] dx_2 \quad (6) \\ \Gamma_2 \cdot E_{PCM}(x_3) = & \left(\frac{jk}{2\pi B} \right)^{1/2} \int \rho_{PCM}(y_2) E_{PCM}^*(y_2) \\ & \cdot \exp \left[- \frac{jk}{2B} (Dy_2^2 - 2x_3 y_2 + Ax_3^2) \right] dy_2 \quad (7) \end{aligned}$$

(6)식과 (7)식에서 x_3 는 파가 캐비티 내에서 두번째 왕복 후 x면에서 주어지는 변수이고, y_2 는 파의 두번째 왕복을 위한 진행시 y면에서 주어지는 변수가 된다.

그리고 (6)식의 양변을 공액 복소를 취하여 (7)식에 대입하면,

$$\Gamma_1^* \Gamma_2 E_{PCM}(x_3) = \left| \frac{k}{2\pi B} \right| \iint \rho_{PCM}(y_2) \rho_{PCM}^*(x_2) E_{PCM}(x_2)$$

$$\cdot \exp \left[\frac{jk}{2} \left\{ \frac{A^*}{B^*} x_2^2 - \frac{2x_2 y_2}{B^*} + \frac{D^*}{B^*} y_2^2 - \frac{D}{B} y_2^2 + \frac{2y_2 x_3}{B} - \frac{A}{B} x_3^2 \right\} \right] dx_2 dy_2 \quad (8)$$

와 같은 결과를 얻을 수 있다. 따라서 (5)식은 캐비티 내의 파가 x면에서 출발하여 한번 왕복 후 같은 x면으로 돌아왔을 때 관찰되는 필드 분포를 나타내는 반면, (8)식은 다시 두번째로 왕복한 후 x면에서 관찰되는 결과적인 필드 분포를 나타낸다. 그리고 (5)식과 (8)식으로부터 x면에서 출발하여 두번의 완전한 왕복 후의 결과적인 필드 분포를 구함으로써, 이방정식으로 부터 직교성을 밝히는데 필요한 고유직분 방정식이 유도된다. (8)식의 양변에 $\Gamma_1^* \Gamma_2$ 를 곱하고 (5)식을 대입하면,

$$\begin{aligned} (\Gamma_1^* \Gamma_2)^2 E_{PCM}(x_3) = & \left| \frac{k}{2\pi B} \right|^2 \iiint \rho_{PCM}^*(x_1) \rho_{PCM}^* \\ & (x_2) \rho_{PCM}(y_1) \rho_{PCM}(y_2) E_{PCM}(x_1) \cdot \exp \{ k [I_m(A/B) \\ & x_2^2 + I_m(D/B) (y_1^2 + y_2^2)] \} \\ & \cdot \exp \{ -jk/2 [(A/B) x_3^2 - (A/B)^* x_1^2 - (2/B) y_1 x_3 \\ & + (2/B)^* y_1 x_1 - (2/B) y_1 x_2 + (2/B)^* x_2 y_1] \} \\ & dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned} \quad (9)$$

와 같이 주어진다.

윗식에서 $I_m(A/B)$ 와 $I_m(D/B)$ 는 각각 A/B와 D/B의 허수 부분을 나타낸다.

PCM I 과 PCM II 의 구조와 특성이 동일하다고 가정하면 $\phi_x = \phi_y$ 이며, (9)식에서 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\rho_{PCM}^*(x_1) \rho_{PCM}^*(x_2) \rho_{PCM}(y_1) \rho_{PCM}(y_2) = | \rho_{PCM}(x_1) | | \rho_{PCM}(x_2) | \cdot | \rho_{PCM}(y_1) | | \rho_{PCM}(y_2) | \quad (10)$$

따라서 (10)식을 (9)식에 대입한 후 간단히 정리한 고유 방정식을 구하면 아래와 같다. 즉,

$$\begin{aligned} (\Gamma_1^* \Gamma_2)^2 E_{PCM}(x_3) = & \left| \frac{k}{2\pi B} \right|^2 \int | \rho_{PCM}(x_1) \\ & E_{PCM}(x_1) G(x_3, x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (11)$$

윗식에서 kernel $G(x_3, x_1)$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} G(x_3, x_1) = & \iint \int | \rho_{PCM}(x_2) | | \rho_{PCM}(y_1) | | \rho_{PCM}(y_2) | \\ & \exp \{ k [I_m(A/B) x_2^2 + I_m(D/B) (y_1^2 + y_2^2)] \} \\ & \exp \{ -jk/2 [(A/B) x_3^2 - (A/B)^* x_1^2 \\ & - (2/B) y_2 x_3 + (2/B)^* y_1 x_1 - (2/B) y_1 x_2 \\ & + (2/B)^* x_2 y_1] \} dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned} \quad (12)$$

(12)식은 본 논문에서 두개의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기의 직교성을 입증할 때 필요한 결론식으로서 이 식이 Hermitian임이 증명되면 캐비티 내의 고유모드간에 직교성이 성립함을 입증할 수 있다.¹¹⁾

여기서 (11)식을 보다 간단한 형태의 고유 방정식으로 변형시키기 위해 다음과 같이 변형된 고유함 수와 kernel을 정의하자.

$$u(x) = \rho_{PCM}^{1/2}(x) E_{PCM}(x) = |\rho_{PCM}(x)|^{1/2} \exp(j\psi/2) E_{PCM}(x) \quad (13)$$

$$k(x_3, x_1) = |\rho_{PCM}(x_1)|^{1/2} |\rho_{PCM}(x_3)|^{1/2} G(x_3, x_1) \quad (14)$$

따라서 (13)식과 (14)식으로부터 고유 방정식 (11)은

$$\alpha u(x_3) = \int u(x_1) k(x_3, x_1) dx_1 \quad (15)$$

단, $\alpha = |2\pi B/k| r_1^* r_2|^2$ 와 같이 간단히 표현할 수 있다. (15)식은 고유 방정식으로서 kernel $k(x_3, x_1)$ 이 Hermitian일 때 이 방정식의 고유함수 $u(x)$ 는 직교성을 갖는다. kernel $k(x_3, x_1)$ 이 (12)식과 (14)식으로부터 Hermitian임이 증명되므로, 즉, 다음과 같은 관계식이 성립하게 되며,

$$k(x_3, x_1) = k^*(x_1, x_3) \quad (16)$$

고유함수 $u(x)$ 는 다음과 같이 직교 함수의 complete set를 이루게 된다.

$$\int u_n^*(x) u_m(x) dx = \delta_{nm} \quad (17)$$

따라서 (17)식에 (13)식과 (1)식을 대입하여 정리하면,

$$\int E_{r,m}(x) \cdot E_{b,n}(x) dx = \delta_{nm} \quad (18)$$

와 같은 결론식을 얻을 수 있다. (18)식은 두개의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기 내의 파 집행 방향에 수직인 모든 면에서 횡모드 직교성이 성립함을 나타낸 식으로서, Siegman에 의해 증명된 바 있는 기존 공진기¹⁾와 하나의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기 내에서 성립하는 횡모드 직교성¹²⁾이 두개의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기내에서도 똑같이 성립함이 입증되었다.

III. 結 論

본 논문에서는 기존 공진기를 구성하고 있는 mirror를 모두 PCM으로 대체한 위상 공액 공진기 내에서 존재하는 고유 모드 간의 직교성을 이론적으로 규명하였다. 유도 과정에서 두개의 PCM은 이상적이고 구조와 특성이 동일하며, PCM내에서의 비선형 상호 작용은 축퇴된 4광파 합성(degenerate four-wave mixing; DFWM)으로 가정하였다. 즉, 공진기 내에서 전파하는 모드를 Huygens 적분식으로 표현하여 '얼어진' 횡모드 간의 고유 방정식으로부터 kernel을 찾아 그 kernel이 Hermitian임을 입증함으로써 밝혀진 직교성은 두개의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기 내의 임의의 한 면에서 한 방향으로 진행하는 모드와 반대 방향으로 진행하는 모드 간의 직교성임을 입증하였다.

그리고 이러한 결과는 이미 밝혀진 기존 공진기와

하나의 PCM으로 구성된 위상 공액 공진기 내에서 성립하는 모드 직교성과도 일치함이 분석되었다.

參 考 文 獻

- [1] D.M. Peper, "Nonlinear optical phase conjugation", *Opt. Eng.*, vol. 21, p. 155, 1982.
- [2] C.R. Giuliano, "Applications of Optical Phase Conjugation," *Phys. Today*, pp. 27, 1981.
- [3] J. AuYeung, D. Fekete, D.M. Pepper, and A. Yariv, "A theoretical and experimental investigation of the modes of optical resonators with phase-conjugate mirrors", *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-15, pp. 1180, 1979.
- [4] P.A. Belanger, "Phase conjugation and optical resonators", *Opt. Eng.* vol. 21, pp. 226, 1982.
- [5] P.A. Belanger, A. Hardy, and A.E. Siegman, "Resonant modes of optical cavities with phase conjugate mirrors", *Appl. Opt.*, vol. 19, pp. 602, 1980.
- [6] A.G. Fox and T. Li, "Resonant Modes in a Maser Interferometer," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 40, pp. 453, 1961.
- [7] A. Hardy, P. A. Belanger, and A.E. Siegman, "Orthogonality properties of phase-conjugate optical resonators", *Appl. Opt.*, vol. 21, pp. 1122, 1982.
- [8] A.E. Siegman, "Orthogonality properties of optical resonator eigenmodes", *Opt. Commun.* vol. 31, pp. 369, 1979.
- [9] R.A. McFarlane and D.J. Steel, "Laser Oscillator Using Resonator with Self-Pumped Phase-Conjugate Mirror," *Opt. Lett.*, vol. 8, pp. 208, 1983.
- [10] M. Cronin-Golomb, B. Fischer, S.K. Kwong, J.O. White and A. Yariv, "Nondegenerate Optical Oscillation in a Resonator Formed by Two Phase-Conjugate Mirrors," *Opt. Lett.*, vol. 10, pp. 353, 1985.
- [11] M.D. Ewbank, P. Yeh, and M. Khoshnevisan, "Time Reversal by an Interferometer with Coupled Phase-Conjugate Reflectors," *Opt. Lett.* vol. 10, pp. 282, 1985.
- [12] S.A. Collins, Jr., "Lens-system Diffraction Integral Written in Terms of Matrix Optics," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 60, pp. 1168, 1970.
- [13] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, 1970) pp. 743-745. *