

Convolutional Code/Binary CPFSK 복합 전송시스템의 성능개선에 관한 연구

(Performance Improvement on the Combined Convolutional Coding and Binary CPFSK Modulation)

崔 亮 鎬*, 白 濟 寅**, 金 在 均*

(Yang Ho Choi, Je In Baek and Jae Kyoon Kim)

要 約

Binary CPFSK(Continuous Phase Frequency Shift Keying)는 순간 주파수가 일정하여 위상이 연속적으로 변하므로 좋은 스펙트럼 특성을 보인다.

Convolutional code가 binary CPFSK 신호도 변조되어 AWGN(Additive White Gaussian Noise) 채널에 전송되고 수신단에서 ML(Maximum Likelihood) 검출을 할 때 오차확률은 최소 ED(Euclidean Distance)를 이용하여 근사적으로 표현할 수 있다. 시간당 정보전송량을 줄이지 않고 수신단의 복잡도를 크게함이 없이 오차확률을 작게 할 수 있는 code로 rate 2/4 code를 제안하여 이 code의 최소 ED를 변조지수와 신호 관찰구간을 변화시키면서 rate 1/2 code와 비교하였다.

Abstract

A binary continuous phase frequency shift keying (CPFSK), whose phase is a continuous function of time and instantaneous frequency is constant, is a bandwidth efficient constant envelope signalling scheme. A transmitting signal is formed by combined coding of a convolutional encoder and a binary CPFSK modulator. The signal is transmitted through additive white Gaussian noise (AWGN) channel. If the received signal is detected by a coherent maximum likelihood (ML) receiver, error probability can be expressed approximately in terms of minimum Euclidean distance. We propose rate 2/4 codes for the improvement of error performance without increasing the data rate per bandwidth and the receiver complexity. Its minimum Euclidean distances are compared with those of rate 1/2 codes as a function of modulation index and observation interval.

I. 序 論

주파수 대역폭의 효율적 사용이 요구되는 위성통신이나 이동 무선통신 등을 위해서는 주파수 대역 특성

이 좋은 변조 신호가 필요하다. MPSK(multilevel phase shift keying)는 심벌 종류 M이 2 또는 4일 경우 수신측의 잡음에 대한 민감도(sensitivity)는 양호한 편이지만 위상이 불연속으로 변해서 주파수 대역이 너무 크다. M이 4보다 큰 값으로 MPSK를 이용하면 스펙트럼 특성을 좋게 할 수 있으나 잡음에 민감하게 된다. MSK(minimum shift keying) 또는 FFSK(fast frequency shift keying)는 성능면에서는 M이 2나 4인 coherent PSK와 비슷하고 스펙트럼의 고주파 성

*正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Engineering, KAIST)

**正會員, 韓國電子通信研究所
(Electronics and Telecomms. Research Institute)
接受日字: 1985年 5月 24日

분을 작게 할 수 있다는 장점이 있다.^{1,2} 최근에 이보다 더 좋은 성능과 스펙트럼 특성을 갖는 신호에 대한 연구가 진행되어 왔다. CPFSK는 심벌이 바뀌는 순간에도 위상이 연속적으로 변하여 좋은 스펙트럼 특성을 보인다.^{1,3}

Convolutional code⁴는 block code에 비해서 ensemble 성능이 우수하여 그 동안 많은 연구가 진행되어 왔고, 최근에는 BSC(binary symmetric channel)가 아닌 보다 일반적인 형태의 전송 방식에 대해서 convolutional code를 적용하는 방법이 연구되고 있다. 이 경우에는 binary field에서 정의되는 Hamming distance 대신에 신호 공간에서의 Euclidean distance의 관점에서 code를 구하게 된다. 따라서 최대의 전력이득을 제공하는 최적의 code는 일정하지 않고 사용되는 변조 방식에 따라 다르므로 각각의 경우에 대해서 최적의 결합 형태를 찾아야 한다. Ungerboeck은 MPSK 와 QAM(quadrature amplitude modulation) 신호에 code를 결합하여 신호 대역폭의 증가없이 3~4dB의 전력이득을 얻었으며⁵ Pawula는 noncoherent CPFSK와 convolutional code의 결합시 수신기 구조에 관해 다루었고⁶ Aulin은 rate 1/2 convolutional code 와 coherent CPFSK 신호가 결합할 때 최소 ED(Euclidean distance)를 구해 시스템 parameter에 따른 성능 변화를 보였다.^{4,7}

본 논문에서는 coherent binary CPFSK 변조신호에 대해서 결합이득이 최대가 되는 convolutional code를 찾아 같은 code rate를 가지면서 성능을 개선시킬 수 있는 방안에 관해 연구하였다. 이 방안으로 rate 2/4 code를 제안하였으며 이 code의 최소ED가 rate 1/2 code와 비교되었다. 여분의 비트를 더 주어 성능을 좋게 할 수 있으나 이것은 주파수 대역당 전송속도를 올려야 한다. 전송선로는 AWGN이라 가정하였고 수신단의 복잡도를 고려하여 수신신호 관찰구간과 지연소자 갯수가 같을 때 두 code의 성능을 비교하였다. 2/4 code는 Aulin의 결과⁶ 보다 최고 1.54dB의 이득이 있음을 연구결과는 보여준다.

II. Convolutional Code와 Binary CPFSK 복합 전송 시스템

정보 데이터 sequence \underline{U} 는 convolutional encoder

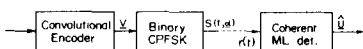


그림 1. 송수신 시스템
Fig. 1. Transmitter and receiver.

에 의해 코딩되어 code sequence \underline{V} 가 발생한다. 부호화된 비트는 binary CPFSK 신호로 변조된다.

Binary CPFSK 신호 $S(t, \underline{\alpha})$ 는

$$S(t, \underline{\alpha}) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \phi(t, \underline{\alpha}) + \phi_0) \quad (1)$$

이며 정보는 위상 $\phi(t, \underline{\alpha})$ 에 실려져 있다.

$$\phi(t, \underline{\alpha}) = \pi h \alpha_1 \frac{t - (i-1)T}{T} + \pi h \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j; \quad (i-1)T \leq t < iT \quad (2)$$

데이터 심벌 α 는 binary로 부호화된 비트 V 가 0이면 -1 , 1이면 $+1$ 값을 가진다. T 는 α 의 전송시간이며 E 는 심벌 에너지, f_0 는 캐리어 주파수이고, ϕ_0 는 초기 위상으로 coherent 전송에서는 0으로 놓아도 일 반성을 잃지 않는다. h 는 변조지수(modulation index)이다. α 와 \underline{U} 는 일대일 대응 관계에 있으므로 전송신호를 필요에 따라 $S(t, \underline{\alpha})$ 와 $S(t, \underline{U})$ 로 병행해서 쓴다.

Binary CPFSK는 식 (2)에서 보듯이 前심벌 구간에서의 위상을 출발점으로 하여 선형적으로 위상이 변하기 때문에 심벌이 바뀌는 순간에도 위상이 연속적이라는 점이 FSK와 다른 점이다. 위상이 연속적으로 변함에 따라 심벌은 상호 간에 관련성을 가지게 되어 수신단에서 검출하고자 하는 심벌외에 주변 심벌을 살펴 보므로써 성능 개선이 이루어 질 수 있다. 그림 2는 binary CPFSK 신호의 위상 궤적(phase trajectory)을 나타낸 것이다.

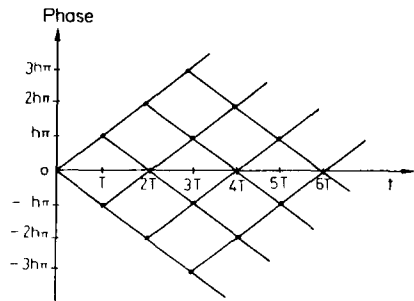


그림 2. Binary CPFSK 신호의 위상궤적
Fig. 2. Phase trajectories for binary CPFSK.

이 전송신호는 AWGN 채널을 통과하여 잡음신호 $n(t)$ 가 더해져 수신된다. 즉, 수신신호 $r(t)$ 는

$$r(t) = S(t, \underline{\alpha}) + n(t) \quad (3)$$

이고 $n(t)$ 는 one-sided noise power spectral density N_0 를 가진다. 수신단에서는 이 신호를 coherent

ML(maximum likelihood) 방식으로 검출한다. 수신단에서 검출할 메시지 블록을 \underline{U}_0 라 하면 coherent 검출인 경우에는 \underline{U}_0 를 포함하여 그 후의 신호를 관찰, 검출한다. 관찰구간(observation interval)을 N' 개의 메시지 블록으로 한정하면, 한 블록은 b 비트의 데이터에 해당되므로 결국, $bN' = N$ 비트의 데이터를 관찰하게 된다. 한 개의 데이터 비트가 발생하는 시간을 T_u 라 하면 coherent ML 검출기는 다음과 같은 likelihood parameter를 계산한다.^{18,19)}

$$\begin{aligned} l_1 &= \sum_{\mathbf{R} \in \mathbf{R}} \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^{NT_u} r(t) s(t, \underline{U}_0, \mathbf{R}) dt\right) \\ l_2 &= \sum_{\mathbf{R} \in \mathbf{R}} \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^{NT_u} r(t) s(t, \underline{U}_1, \mathbf{R}) dt\right) \\ &\vdots \\ l_m &= \sum_{\mathbf{R} \in \mathbf{R}} \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^{NT_u} r(t) s(t, \underline{U}_m, \mathbf{R}) dt\right) \end{aligned} \quad (4)$$

\mathbf{R} 은 검출할 메시지 블록 \underline{U}_0 이후에 연속되는 길이가 $N' - 1$ 인 메시지 블록 sequence이다. 다시 말하면

$$\mathbf{R} = (\underline{U}_1, \underline{U}_2, \dots, \underline{U}_{N-1}) \quad (5)$$

이고 \mathbf{R} 은 가능한 모든 경우의 \mathbf{R} 의 집합이다. 검출하고자 하는 메시지 블록이 같지 않은 $m (= 2^b)$ 개의 likelihood parameter를 계산하여 이중 가장 큰 값에 해당하는 \underline{U}_0 를 전송 데이터로 판정한다. 그림3은 coherent ML 검출기이다. $(\underline{U}_0, \mathbf{R})$ 이 같더라도 convolutional encoder의 초기상태 S_0 에 따라 부호화된 비트 V 가 달라져서 전송신호는 같지 않음을 유의해야 한다. Likelihood parameter는 신호대 잡음비가 큰 경우 다음과 같이 간단한 식으로 근사시킬 수 있다.⁹⁾

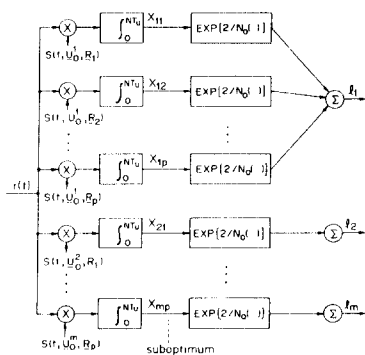


그림 3. 신호대 잡음비가 큰 경우의 준최적 coherent ML 수신기와 최적 수신기

Fig. 3. Optimum and high SNR suboptimum coherent receiver.

$$\begin{aligned} l_k &= \sum_{j=1}^p \exp\left(\frac{2}{N_0} x_{kj}\right) \\ &\simeq \exp\left(\frac{2}{N_0} x_{k\lambda}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $p = 2^{n-b}$ 이고 x_{kj} 는 수신신호와 전송신호 간의 correlation 값이다.

$$x_{kj} \triangleq \int_0^{NT_u} r(t) s(t, \underline{U}_k, \mathbf{R}_j) dt \quad (7)$$

$x_{k\lambda}$ 는 x_{kj} 중 가장 큰 것을 나타낸다. Exp함수는 단조 증가함수이므로 $x_{k\lambda}$ 값에 의해 출력의 결정되며 수신기는 단지 x_{kj} ($k=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, p$)들을 계산하여 \underline{U}_0 를 판별한다. 이 경우 수신기는 그림 3에서 적분하는 부분까지만 필요하게 된다.

III. 최소 Euclidean Distance 계산

Convolutional encoder에 b 비트가 들어와 n 비트가 나가는 code를 편의상 b/n code라 하였고 이때 code rate r 은 b/n 가 되며 데이터 심벌 α 의 전송시간 T 와 정보비트 U 의 전송시간 T_u 의 관계는 $T = r T_u$ 이고 심벌 에너지 E 와 비트 에너지 E_b 는 $E = r E_b$ 의 관계를 가지고 있다. 관찰구간이 N 일때 두 신호 $s(t, \underline{U}_k, \mathbf{R}_j)$ 와 $s(t, \underline{U}_l, \mathbf{R}_l)$ 간의 ED¹³⁾, $D_w(i, j; k, l)$ 은 다음처럼 쓸 수 있다.¹⁵⁾

$$D_w^2(i, j; k, l) = \int_0^{NT_u} \{s(t, \underline{U}_k, \mathbf{R}_j) - s(t, \underline{U}_l, \mathbf{R}_l)\}^2 dt \quad (8)$$

D_w 을 비트 에너지로 정규화 한다. 정규화된 SED(squared Euclidean distance) d_w^2 은

$$d_w^2 = \frac{D_w^2}{2E_b} \quad (9)$$

이다. 수신신호 $r(t)$ 를 NT_u 시간동안 관찰하여 최대의 correlation 값 $x_{k\lambda}$ 에 의해 수신 데이터를 판독하는 준최적 ML 수신기의 오차확률 P_e 은 union bound를 이용하여 근사시킬 수 있다.¹¹⁾

$$P_e \simeq CQ\left(\sqrt{d_{\min, n}^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (10)$$

여기서

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (11)$$

이고 C 은 E_b/N_0 와 무관한 상수이다. $d_{\min, n}$ 은 MNSED(minimum normalized squared Euclidean distance)로 d_w^2 중 최소치를 의미한다. 따라서 최소거리 $d_{\min, n}$ 은

$$d_{\min, n} = \min \{d_{ij}^k(i, j, k, l)\} \quad (12)$$

$$S_0, i, j, k, l$$

$$i \neq k$$

으로 encoder의 가능한 모든 초기상태 S_0 에 따라 검출하고자 하는 메시지 블록 U_0 가 같지 않은 두 신호 간의 ED중 가장 작은 정규화된 SED이다.

다음 식처럼 encoder의 지연소자 갯수 ν 가 d 인 convolutional code의 집합 A 를 정의하자.

$$A = \{\nu = d \text{인 } \frac{d}{n} \text{ convolutional codes}\} \quad (13)$$

집합 A 에 속하는 code중 식 (12)를 가장 크게 하는 code를 구하는 것이 필요하다. 이 code가 binary CPFSK 변조와 가장 적합한 결합(optimum combination)이다. 즉

$$\max_A \{d_{\min, n}^2\} \quad (14)$$

집합 A 에 속하는 모든 code에 대하여 최소 ED를 관찰구간 N 에 따라 계산하여 그중 가장 큰 값을 주는 code를 찾아야 한다. 어떤 code가 주어 졌을 때 전송신호가 binary CPFSK이고, $2\pi f_0 T \gg 1$ 이라 가정하면 d_{ij}^k 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d_{ij}^k(i, j, k, l) = r \sum_{n=0}^{N-1} \left[1 - \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} \cos \{ \pi h (\alpha_n^{(i, j)} - \alpha_n^{(k, l)}) \frac{t-nT}{T} + \theta \} dt \right] \quad (15)$$

$\alpha_n^{(i, j)}$ 은 입력 sequence가 (U_0^i, R_i) 일때 $n+1$ 번째 데이터 심벌을 나타내고 θ 은 $t=nT$ 에서 두 신호 사이의 위상차이다.

$$\theta = \pi h \sum_{w=0}^{n-1} \{ \alpha_w^{(i, j)} - \alpha_w^{(k, l)} \} \quad (16)$$

식 (8) 또는 (15)를 보면 ED는 관찰구간 N 이 증가함에 따라 감소하지는 않는다. 만약 $t \geq k T_u$ 에서 두 신호가 같으면 N 이 증가하더라도 ED의 변화는 없게 된다. $t=0$ 에서 식리되기 시작한 두 신호가 $t \geq k T_u$ 구간에서 서로 일치하기 위해서는 일반적으로 다음 두 조건이 동시에 만족되어야 한다.

1) $0 \leq t < k T_u$ 에서 발생한 출력비트의 1의 갯수가 같고,

2) $t = k T_u$ 에서 encoder의 상태가 같아야 한다.

조건 1을 만족하면 $t = k T_u$ 에서 두 신호 간의 위상차 즉, 식 (16)이 0이 되고 조건 2가 만족되면 $t \geq k T_u$ 에서 $\alpha^{(i, j)} = \alpha^{(k, l)}$ 이 되므로 $t \geq k T_u$ 에서는 식 (15)에서의 적분항이 1이 되어 더이상 distance는 증가하

지 않는다. 그런데 조건 2만 만족되더라도 두 신호가 일치할 수 있으며 이때는 θ 가 0이 아니라도 2π 의 정수배가 되는 경우를 말하는데 이것은 특정한 h 값에서만 가능하다. 이러한 h 를 weak modulation index⁽¹⁾라 부른다. Binary CPFSK에서의 weak modulation index는 $h=1$ 에서 나타난다. 또한 catastrophic code⁽²⁾인 경우 encoder의 상태가 같지 않아도 두 code sequence는 같을 수 있으므로 조건 1만 만족해도 두 신호는 일치할 수 있다. $d_{\min, n}$ 을 계산하기 위해서는 U_0 가 같지 않은 모든 두 전송신호 간의 ED 계산이 필요하다. 관찰구간 N 을 증가시켜 다음 관찰구간에서의 ED를 구하려면 현 시점에서의 encoder상태, 전송신호의 위상과 ED값이 기억되어야 한다. N 이 증가함에 따라 계산량과 기억될 양은 지수적으로 증가하게 된다. 두 신호가 일치하면 ED는 더이상 증가하지 않고 $d_{\min, n}$ 은 모든 ED중 최소치이므로 일치된 신호 간의 ED 보다 큰 두 신호간의 ED는 더 이상 조사하지 않으므로써 많은 계산시간과 기억용량을 줄일 수 있다.

IV. 수치 계산 결과

데이터 rate의 손해나 encoder의 지연소자 갯수 ν 를 증가하지 않고 성능을 개선시킬 수 있는 code로 2/4code의 성능이 $0 < h \leq 1$ 영역에서 1/2code와 비교되었다. 그림 3에서 보듯이 관찰구간 N 과 ν 에 따라 ML 수신기의 복잡도가 달라지므로 이러한 변수를 비교하는데 기준으로 하였다. III장에서 설명한 것처럼 ED는 두 신호가 일치하면 더 이상 증가하지 않는다. 따라서 MNSED는 상한값 $d_{\min, n}^2$ 로 제한되고 이때의 N 을 N_0 로 표시하였다. 표 1은 관찰구간 N 이 4와 6 그리고 N_0 인 경우에 대해서 식 (14)에 의거하여 구한 최적 encoder의 연결패턴($r=1/2$ 에서는 2개, $r=2/4$ 에서는 4개)을 그림 4에 쓰여진 식에 따라 계산된 값을 보여준다. 예를 들어 (1, 2)code는 그림 4(a)의 encoder에서 $g_{1,1}=0, g_{2,1}=1, g_{1,2}=1, g_{2,2}=0$ 을 의미한다. 표에서는 한개의 encoder만 표시되어 있지만 실제로는 같은 성능을 보인 또 다른 encoder가 있을 수 있음을 밝혀둔다. Code rate가 1/2이고 $N=N_0$ 인 경우는 Aulin의 결과⁽⁴⁾와 일치함을 보였다.

이들 code들의 distance 값을 그림 5에 나타내었다. $N=4$ 이면 $h=0.3, 0.4, 0.75, 0.95, 1.0$ 에서 2/4code가 큰 값을 보이며 다른 h 에서는 1/2code가 크거나 같은 값을 보인다. 관찰구간을 늘려 $N=6$ 인 경우 $h=0.45$ 에서 2/4code의 MNSED가 약간 작으나 그 외에 다른 영역에서는 1/2code보다 크거나 같은 값을 가지며 $h=0.75, 1.0$ 에서 1.25dB의 가장 큰 이득을 보인다

표 1. Rate 2/4, 1/2code의 최적 encoder
Table 1. Optimum encoder of rate 2/4, 1/2codes.

h	r=1/2				r=2/4			
	N=4	N=6	N=N _B	N _B	N=4	N=6	N=N _B	N _B
0.05	(1,2)	(1,2)	(1,2)	3	(2,1,1,4)	(2,1,1,4)	(2,1,1,4)	4
0.10	(")	(")	(")	3	(" ,)	(")	(")	4
0.15	(")	(")	(")	3	(")	(")	(")	4
0.20	(")	(")	(")	3	(")	(")	(4,1,1,2)	10
0.25	(")	(")	(")	3	(")	(")	(")	10
0.30	(")	(")	(")	4	(1,6,1,1)	(1,1,5,2)	(")	10
0.35	(2,1)	(2,1)	(2,1)	4	(1,1,6,6)	(1,2,4,1)	(1,4,1,6)	26
0.40	(")	(")	(")	5	(1,6,1,1)	(1,6,1,1)	(4,1,6,1)	8
0.45	(")	(")	(")	6	(1,4,2,4)	(1,2,6,1)	(")	14
0.50	(3,1)	(3,1)	(2,3)	6	(1,2,4,2)	(1,2,4,2)	(1,2,4,2)	6
0.55	(")	(")	(2,1)	9	(")	(")	(1,4,3,1)	8
0.60	(2,1)	(2,1)	(")	5	(1,6,1,1)	(1,5,2,1)	(1,5,2,1)	8
0.65	(")	(")	(")	5	(4,1,2,4)	(1,2,4,1)	(1,4,6,1)	32
0.70	(")	(")	(")	5	(1,4,2,1)	(1,4,1,6)	(")	12
0.75	(")	(")	(")	4	(")	(4,1,6,1)	(4,1,6,1)	6
0.80	(")	(")	(")	4	(")	(4,1,1,2)	(4,1,1,2)	6
0.85	(")	(")	(")	4	(")	(")	(4,1,1,6)	8
0.90	(")	(")	(")	4	(1,7,7,1)	(")	(")	10
0.95	(3,2)	(1,2)	(")	8	(1,3,7,5)	(1,3,7,5)	(")	18
1.00	(")	(3,2)	(2,3)	3	(")	(")	(1,3,7,5)	4

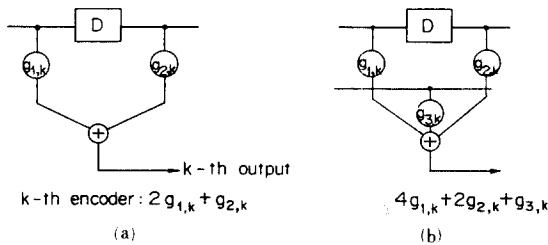


그림 4. Convolutional encoder의 k번째 출력
(a) b=1, v=1 (b) b=2, v=1

Fig. 4. k-th output of convolutional encoder.
(a) b=1, v=1. (b) b=2, v=1.

다. 상한값을 보면 2/4code는 $0 < h \leq 1$ 전 영역에서 1/2code distance 값 이상임을 나타내며 $h=0.3$ 에서 상대적 성능이 가장 우수하여 1.54dB의 전력이득을 준다.

V. 結 論

Binary CPFSK 변조 방식에서 변조지수 h와 수신단의 관찰구간 N이 주어질 때 최적 convolutional code를 찾아 code rate가 2/4, 1/2일때 성능을 비교하였다. 최적 convolutional code는 Hamming distance를 가장 크게하는 code와 언제나 일치하는 것은 아님을

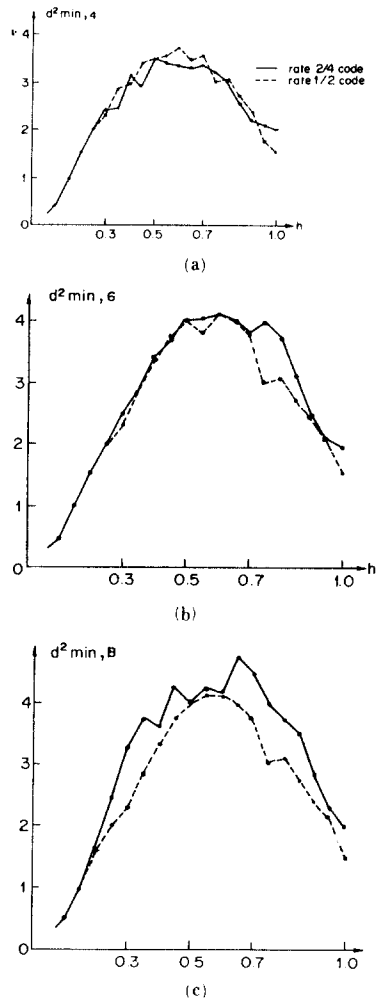


그림 5. Rate 2/4, 1/2code의 MNSD
(a) N=4 (b) N=6 (c) N=N_B
Fig. 5. MNSD for rate 2/4, 1/2codes.
(a) N=4. (b) N=6. (c) N=N_B.

확인하였다. 2/4code는 1/2code와 같은 rate를 가진다. 따라서 두 code에 의한 전송신호의 주파수 대역을 같다고 볼 수 있다. 2/4code는 관찰구간이 작을 때는 1/2code에 비해 성능이 떨어지나 $N \geq 6$ 이면 1/2code 보다 좋은 성능을 얻을 수 있고 $h=0.3$ 에서 1.54 dB의 최대 이득을 보인다. 같은 관찰구간에서 2/4code는 2비트를 결정하는데 비해 1/2code는 1비트를 결정하므로 처리시간(processing time)에서 잇점이 있다.

다른 CPM(continuous phase modulation) 방식과 convolutional code와 결합한 경우와 지연소자 갯수를 1보다 크게 했을 때의 성능에 대한 연구가 앞으로의 과제로 남아있다.

參 考 文 獻

- [1] T. Aulin, C.E. Sundberg, "Continuous phase modulation - Part I: full response signaling," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp. 196-209, Mar. 1981.
- [2] F. Amoroso, "Pulse and spectrum manipulation in the minimum shift keying format," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp. 381-384, Mar. 1976.
- [3] A.J. Viterbi and J.K. Omura, *Principles of Digital Communication and coding*. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [4] G. Ungerboeck, "Channel coding with multilevel/phase signals," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 55-67, Jan. 1982.
- [5] R.F. Pawula, R. Golden, "Simulation of convolutional coding/Viterbi decoding with noncoherent CPFSK," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp. 1522-1526, Oct. 1981.
- [6] T. Aulin, G. Lindell, C.E. Sundberg, *Minimum Euclidean Distance for Short Convolutional Codes and Continuous Phase Modulation*. Globe Com., pp. 1101-1105, 1982.
- [7] G. Lindell, C.E. Sundberg, T. Aulin, "Minimum Euclidean distance for combinations of short rate $\frac{1}{2}$ convolutional codes and CPFSK modulation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-30, pp. 509-519, May 1984.
- [8] W.P. Osborne and M.B. Luntz, "Coherent and noncoherent detection of CPFSK," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-22, pp. 1023-1036, Aug. 1974.
- [9] T.A. Schonhoff, "Symbol error probabilities for M-ary CPASK: coherent and noncoherent detection," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24 pp. 644-652, June 1976.
-